Probabilités, Processus Stochastiques et Applications
Florin Avram

Table des matières

Chapitre 1

Processus stochastiques : collections infinies des variables aléatoires

Nombreux problèmes de modélisation aléatoire en physique, biologie, etc., ramènent à l'étude des **processus/champs aléatoires**. Il s'agit de collections des variables aléatoires $X_t, t \in \mathcal{I}$, où l'ensemble des indices $\mathcal{I}$ peut etre par exemple $\mathbb{N}^d, \mathbb{Z}^d, \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$, un ensemble fini, etc. Un exemple classiques est la marche aléatoire (par exemple des grains de pollen dans un verre d'eau, remarqué par Robert Brown, botaniste britannique 1773-1858, et utilisée par Einstein pour calculer la densité des mollecules, ou la constante d'Avogadro). Un autre est le processus de risque de Cramér-Lundberg.

Définition 1.1. *Soit $\mathcal{I}$ un ensemble quelconque. On appelle processus aléatoire X indexé par $\mathcal{I}$ toute famille $(X_t \in \mathcal{E}, t \in \mathcal{I})$, de vecteurs aléatoires définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et appartenant à un espace d'états métrisable $\mathcal{T}$.*

Elargissons un peu sur les quatres elements de cette definition.

1. L'espace $\mathcal{I}$ est souvent le temps, ainsi : $\mathcal{I} = \mathbb{N}$: instants successifs à partir d'un instant initial t_0. $\mathcal{I} = \mathbb{Z}$: instants successifs avant et après un instant t_0. $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$: idem mais processus à temps continu. $\mathcal{I} = \mathbb{Z}^2$: images. $\mathcal{I} = \mathbb{Z}^3$: modèle de la matière. Nous allons considérer ici surtout des processus à indices unidimensionnels, à temps discret $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou continu $\mathbb{R}$ (les premièrs deux cas étant appelés aussi séries chronologiques en statistique). L'étude est facilitée alors par l'existence d'un ordre complet entre les indices.
2. Lorsque $\mathcal{E} = \mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$ et $p = 1$, une seule valeur est observée à chaque instant t, alors que lorsque $p > 1$, plusieurs variables sont observées et on parle de processus multidimensionnels ou multivariés.
3. L'espace "mère" de probabilité $(\Omega, \mathcal{F})$ commence d'habitude par une description du phénomène (comme dans le cas du processus de risque de Cramér-Lundberg). Une visualisation, sous forme d'arbre par exemple, est possible dans des cas plus simples, comme celui du "jeu des motifs" –voir Ch. 1.1, 6.
4. La mesure de probabilité P commence par une spécification "consistante" de l'ensemble de toutes les **distributions jointes d'ordre fini**.

   Définition 1.2. *Soit $X_. = X_t, t \in \mathcal{I}$ un processus aléatoire et soit $J = \{t_1, t_2, ..., \} \subset \mathcal{I}$ un sous-ensemble fini des temps d'observation du processus. On dénotera par X_J la distribution jointe des variables $X_t, t \in J$. L'ensemble $X_J : J \subset \mathcal{I}, |J| < \infty$ sera appelé la famille des distributions jointes d'ordre fini de $X_.$*

En temps continu, il y a encore des choix a faire après ; par exemple, pour le mouvement Brownien on se restreint a l'espace des fonctions continues.

Dans le cas des espaces d'états $\mathcal{E}$ **finis ou dénombrables**, les variables $X_i, i \in \mathcal{I}$ sont appelées discrètes ; pour $\mathcal{E} = \mathbb{R}^d$, on parle des variables continues ou hybrides.

Le cas discret est le plus simple, car il permet d'éviter plusieurs détails techniques (par exemple, dans ce cas, l'ensemble des événements mesurables pour une variable X_{i_0} est simplement l'ensemble de toutes les parties de $\mathcal{E}$).

Quelques exemples des processus stochastiques.

1. Les processus les plus simples sont les **processus à variables i.i.d.** Le cas particulier des variable aléatoires avec un nb. fini des valeurs mérite une mention à part.

   Définition 1.3. *Nous appelerons processus ≪multi-Bernoulli≫ ou dé un processus à variables i.i.d.* $X_t \in \{1, 2, ...J\}, t \in \mathbb{N}$, *avec* X_t *ayant une loi discrète* $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_J)$. *Dans ce cas, les lois jointes sont simplement des produits de la loi marginale* $\boldsymbol{p}$.

   On peut voir ce processus comme des résultats $X_0, X_1, ..., X_t...$ des lancers d'un **"dé truqué/biaisé", avec un nb fini des faces**.

2. Pour une modélisation plus realiste, mais pratique quand-même, on considérera des "processus de Markov", qui evoluent suivant des trajectoires des "systèmes dynamiques stochastiques". Intuitivement, à chaque moment ces processus choisissent leur prochaine pas en fonction des résultats des lancés d'un dé. Plus rigoureusement, ils ont la **propriété de Markov** d'oubli du passé antérieur à la dernière position − voir chapitre **??**. Dans ce cas, les lois jointes admettent une factorisation simple. Ces processus fournissent un compromis acceptable, joignant le réalisme avec la simplicité de modélisation. Le premier exemple sont les marches aléatoires/sommes des variables i.i.d.

3. Les processus sans oubli, avec dependances possible entre tous les variables, sont très difficiles ètudier. Une exception est la classe des martingales : officicieusement, pour simplifier, il s'agit des processus qui retiennent du passé le premier moment, qui est constant en temps. Finalement, les super(sous) martingales fournissent des exemples des processus avec premier moment qui diminue(augmente).

Avec les processsus aléatoires, nous sommes amenés a etudier des nouvelles questions concernant des limites, et aussi concernant des propriétés des trajectoires, comme la continuité (en temps continu).

1.1 Le jeu des motifs : exemple introductif de chaîne de Markov

Exercice 1.1. *Des femmes et des hommes arrivent dans un magasin, après des temps fixes, unitaires. Chaque instant, une femme arrive avec probabilité* λ_F, *ou un homme arrive avec probabilité* λ_H, *ou il n'y a pas d'arrivée, avec probabilité* $q = 1 - \lambda_F - \lambda_H$. *On a donc un processus stochastique* $X_t \in \{H, F, 0\}, t \in \mathbb{N}$, *défini par des* **lois jointes produits** *de la loi discrète* $(\lambda_H, \lambda_F, q)$. *On considère le temps d'arret* $N = \inf\{t : X_t \in \{H, F\}\}$

1. *Trouver la probabilité qu'une femme entre avant un homme, c.-à-d.* $P[X_N = F]$. *Reécrire la reponse en fonction de* $k = \lambda_F/\lambda_H$ *et* q.

   Indication : *Dessiner l'espace d'états (arbre). Conditionnez sur le premier instant* $t = 1$, *ou sur le nombre* N *d'instants jusqu'à la première arrivée.*

2. *Formuler le problème précédent comme problème d'absorbtion d'une marche aléatoire sur le "graphe des états nécessaires pour étudier l'evolution du processus". Quelle est la matrice de transition de la chaîne de Markov obtenue ainsi ?*
3. *Trouver la probabilité qu'au moins trois femmes entrent avant le premier homme, et que exactement trois femmes entrent avant le premier homme.*
4. *Considerer l'evenement A qu'au moins deux hommes soient entrés consecutivement (i.e. avec aucune femme entre eux, mais pas forcement aux moments succesifs), avant que trois femmes ne soient entrées consecutivement (mais pas forcemment aux instants successifs).*

   Formuler ce problème comme problème d'absorbtion d'une marche aléatoire sur le "graphe des états nécessaires pour étudier l'evolution du processus". Quelle est la matrice de transition de la chaîne de Markov obtenue ainsi ?
5. *Trouver les probabilité $P_i[A], i \in \mathcal{T}$, où $\mathcal{T}$ sont les elements transitoires dans l'espace d'états de la chaîne de Markov de l'exercice précédent.*
6. *Quelle est la probabilité qu'au moins m hommes soient entrés consecutivement, avant que n femmes ne soient entrées consecutivement ?*

Remarque 1.1. *Dans cet exercice, nous utilisons la très importante* **méthode de conditionnement sur le premier pas** *Durrett [1999]. Celle ci reduit l'étude de chaînes de Markov à la resolution des équations linéaires, qui peuvent être abordés systématiquement à partir d'une matrice P contenant les probabilités de transition.*

R :

1. La probabilité p_F satisfait

$$p_F = \lambda_F + (1 - \lambda_F - \lambda_H)p_F \iff p_F = \frac{\lambda_F}{\lambda_F + \lambda_H}$$

2. On peut formuler ce problème comme problème d'absorbtion d'une marche aléatoire sur $\{F, 0, H\}$, avec matrice de transition $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_F & q & \lambda_H \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cela n'est pas nécéssaire ici (comme le pb. est très simple, la loi du temps N étant géométrique), mais ça deviendra utile avec plus d'états transitoires.
3. $p_F^3, p_F^3(1 - p_F)$.
4. Considèrons la chaîne de Markov en temps discret sur l'espace des états : $(H1, H2, H3, ...) \cup (F1, F2, F3, ...)$, qui enregistre au temps t la longueur k de la dernière série des clients $k \in \{1, 2, ...\}$ du même sexe entrés consecutivement, et leur sexe (H/F).

   On peut simplifier ce problème, en prenant en consideration seulement les temps quand la chaîne saute, et en supposant que $q = 0$. On a alors une marche aléatoire qui "avance" sur les suites d'hommes/femmes a.p. $p_H = 1 - p_F$ et p_F, et "change de sexe" outrement. Par exemple, si $\lambda_F = 2\lambda_H$, les deux probas sont $p_H = \frac{1}{3}, p_F = \frac{2}{3}$.

   Les états d'arrêt souhaités étant $H2, F3$, nous sommes ramenés a formuler des equations de conditionnement sur le premier par pour les états $H1, F1, F2$.

   On arrive ainsi à un problème d'absorbtion d'une marche aléatoire sur $\{F3, F2, F, H, H2\}$ avec matrice de transition $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_F & 0 & 0 & p_H & 0 \\ 0 & p_F & 0 & p_H & 0 \\ 0 & 0 & p_F & 0 & p_H \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (et trois états transitoires).

5. En denotant par x_i/y_i la probabilité de notre evenement en partant d'une suite des i femmes/hommes, il faudra resoudre :

$$\begin{aligned} y_1 &= p_H + p_F x_1 \\ x_1 &= p_H y_1 + p_F x_2 \\ x_2 &= p_H y_1 \end{aligned}$$

6. Generalisant pour m hommes et n femmes et posant $S_{F,k} = \sum_{i=1}^k p_F^i$, $S_{H,k} = \sum_{i=1}^k p_H^i$, nous trouvont

$$y_1 = \frac{p_H^{m-1}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}, x_1 = \frac{p_H^m S_{F,n-2}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

et finalement

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^m (1 + p_F S_{F,n-2})}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}} = \frac{p_H^m S_{F,n-1})}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

Pour $m = 2, n = 3$, on trouve :

$$y_1 = \frac{p_H}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}, x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$

et

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F + p_F^2)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$

Exercice 1.2. *Trouver l'esperance du nombres des a) lancés d'un dé jusqu'au premier 6 (en l'incluant) ; b) lancés d'une paire des dés jusqu'au premier 66 (en l'incluant) ; lancés d'un dé jusqu'au premier 66 (en l'incluant).*

Chapitre 2

Deuxième exemple de chaîne de Markov : les marches aléatoires/sommes des variables i.i.d.

Motivation : Les marches aléatoires sont parmi les modèles probabilistes les plus utiles (par exemple en physique, mathématiques financières, files d'attente, statistique, etc.). Ils sont aussi parmi les modèles les meilleurs compris, car ils permettent souvent des solutions analytiques.

Définition 2.1. Marches aléatoires sur $\mathbb{R}^d$. *Soit* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réels* **i.i.d** *(c.-à-d. indépendantes et de même loi), à valeurs en* $\mathbb{R}^d$. *Le processus* $X_n \in \mathbb{R}^d, n = 0, 1, ...$ *donné par la somme de ces variables*

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

s'appelle **marche aléatoire**. *Comme alternative, la marche aléatoire peut etre définie récursivement par la récurrence*

$$X_n = X_{n-1} + Z_n \tag{2.2}$$

Exemple 2.1. Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ *Typiquement, on s'intéresse au cas où l'espace d'états est un maillage régulier comme* $\mathbb{Z}^d$, *c.-à-d.* $X_0, Z_n \in \mathbb{Z}^d$ *ont une loi discrète* $\mathbf{p} = (p_i, i \in \mathbb{Z}^d)$ *(dans ce cas, nous avons à faire à une chaîne de Markov à espace d'états dénombrable).*

Exemple 2.2. *Si en plus* $|Z_n| = 1$, *c.-à-d.* $p_i \neq 0$ *ssi* i *est un voisin de l'origine, le processus (2.1) est appelé une* **marche aléatoire simple**.

Exemple 2.3. *Pour une marche aléatoire simple en dimension* $d = 1$, *la loi de* Z_n *est de la forme* $p\delta_1 + (1-p)\,\delta_{-1}$, *c.-à-d.* $P\,[Z_n = 1] = p$ *et* $P\,[Z_n = -1] = 1 - p$ *avec* $0 < p < 1$. *Si* $p = q = .5$ *on parle d'une* **marche aléatoire symétrique**, *et avec* $p \neq q$ *on parle d'une* **marche aléatoire biaisée**.

2.1 Moments et cumulants des marches aléatoires

Exercice 2.1. *Soit* $X_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ *une marche aléatoire avec* $X_0 = 0$.

Pour un exemple concret, considerez une marche simple, representant le capital au temps n *d'un joueur. Au temps* $n = 1, 2, ...,$ *le joueur gagnera* $Z_n = 1$ *avec probabilité* p *et perdra* $Z_n = -1$ *avec probabilité* $1 - p$, *où* $0 < p < 1$.

Calculez :

1. *L'espérance* $e_n = EX_n$.
2. *La variance* $v_n = \mathrm{Var}\, X_n$.
3. *La fonction génératrice des moments* $M(u,n) = Ee^{uX_n}$.
4. *La fonction génératrice des cumulants* $\kappa(u,n) = \log(Ee^{uX_n})$.
5. *La loi de* X_2.

Remarque 2.1. *On voit que la propriétée de linéarité de l'espérance et de la variance sont vraies aussi pour les cumulants et pour leur fonction génératrice, pour chaque marche aléatoire.*

Remarque 2.2. *La connaissance de la loi et la connaissance de la fonction génératrice des moments d'une variable* X *sont toujours équivalents. Mais, pour les sommes* $\sum_{i=1}^n Z_i$ *des variable aléatoire i.i.d., la loi est la n-ième convolution* $\boldsymbol{p}^{*,n}$ *de la loi* $\boldsymbol{p}$ *de* Z_i *; par contre, la fonction génératrice des moments* $Ee^{\theta \sum_{i=1}^n Z_i}$ *est la n-iṁe puissance de la fonction génératrice des moments* $Ee^{\theta Z_1}$*, beaucoup plus simple à obtenir.*

Exercice 2.2. *Soit* $m_n = m_n(X), n = 0, 1, 2, \ldots$ *les moments d'une variable aléatoire* X*, soit* $\kappa_X(u) = \log M_X(u) = \log(\sum_n \frac{u^n}{n!} m_n) = \sum_n \frac{u^n}{n!} \kappa_n(X)$ *la fonction génératrice des cumulants, où* $\kappa_n = \kappa_n(X) = \frac{\partial^n \kappa(u)}{(\partial u)^n}_{u=0}$ *sont les cumulants. Montrez (en utilisant éventuellement un logiciel symbolique) que*

$$\forall X, m_2 = \kappa_2 + \kappa_1^2, m_3 = \kappa_1^3 + 3\kappa_1\kappa_2 + \kappa_3, \ldots \Longleftrightarrow$$
$$\kappa_0 = 0, \kappa_1 = m_1, \kappa_2 = \mathrm{Var}\,(X) = m_2 - m_1^2, \kappa_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3, \ldots$$

Nt : 1) Le cumulant d'un ordre donné est un polynôme dans les moments d'ordre plus petit ou égal, et réciproquement. 2) Les coefficients de l'expansion des moments en fonction des cumulants sont donné par des nombres des partitions (de Stirling). 3) Les cumulants d'une variable centrée ($m_1 = 0$) coïncident avec les moments jusqu'au troisième ordre. C'est le quatrième cumulant, la «kurtosis», donné dans le cas centré par $\kappa_4 = m_4 - 3m_2^2$, qui joue un rôle important dans certains tests statistiques (comme de nonnormalité, par exemple).

Exercice 2.3. *Pour la marche simple, calculez*

1. *Le premier, deuxième et troisième cumulants* $\kappa_i(n), i = 1, 2, 3$ *de* X_n*, c.-à-d. les premiers trois coefficients dans l'expansion* $\kappa(u,n) = \sum_i \kappa_i(n) u^i$ *en puissances de u.*
2. *Le deuxième moment de* X_n*. Quelle est la particularité du cas* $p = 1/2$ *?*
3. *Le troisième moment de* X_n.

Remarque 2.3. *Un des pb les plus anciens des probas a été d'établir que la répétition d'un expériment (comme la jetée d'une monnaie) un grand nb des fois dévoile sa moyenne), et que l' histogramme (loi) des déviations de la moyenne converge vers «la courbe en cloche de Gauss».*

Chapitre 3

Problèmes de premier passage des marches aléatoires et relations de récurrence

3.1 La marche symmétrique par la méthode du conditionnement sur le premier pas, et par les chaînes de Markov

Exercice 3.1. La marche aléatoire symétrique. *On cherche a trouver la probabilité d'un joueur qui s'engage dans une série de parties (indépendantes) à un jeu où à l'issue de chaque partie il gagne 1F avec une probabilité* $1/2$ *et perd 1F avec une probabilité* $1/2$*, et qui décide de s'arrêter de jouer dès qu'il aura* B *francs en poche, ou dès qu'il n'a plus d'argent. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on note* X_n *la fortune du joueur au bout de* n *parties, et* $X_0 = i$ *sa fortune à l'entrée dans le Casino. Ça revient à étudier la marche aléatoire symétrique*

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, X_n \in \mathbb{Z}$$

avec $P\left[Z_n = 1\right] = P\left[Z_n = -1\right] = 1/2$*, jusqu'au ≪temps d'arret/sortie≫* $N = \min[N(0), N(B)]$ *quand le processus sort de l'intervalle* $[0, B]$ *(en prenant* 0 *et* B *comme états absorbants). On dénotera par* $\mathrm{E_i}$ *l'espérance en commençant de* i *(conditionnant sur* $X_0 = i$*), et on désigne par* E *l'événement que le joueur gagne, c.-à-d.* $E = \{x_N = B\} = [\exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $X_n = B, X_k > 0, k = 1, ..., n-1]$*. Pour tout* i *de* $\{0, ..., B\}$*, on pose :*

$$b_i = P\left(E \mid X_{t_0} = i\right) = P\left(E \mid \text{ en partant de } i\right)$$

(la probabilité du ≪bonheur≫).

1. *En supposant* $B = 3$*, énumérer et esquisser* **l'espace de tous les chemins** *du bonheur/ruine qui commencent avec* $X_0 = 1$*, en développant ≪l'arbre de toutes les possibilités≫. Calculer la probabilité du chaque chemin, et vérifier que leur somme vaut* 1.
2. *Expliquer graphiquement sur ≪l'arbre de toutes les possibilités≫ les équations* $b_1 = 1/2 b_2, b_2 = 1/2 b_1 + 1/2$*. Déduisez* b_0, b_3*, et en suite* b_1, b_2*.*
3. *En supposant* $B = 4$*, calculer* b_1, b_2 *et* b_3*.*
4. *Calculer* $b_i, i = 0, ..., B$ *pour* B *quelconque.*
5. *Calculez les espérances* $\mathbf{t} = (t_1, t_2, ..., t_{B-1}), t_i = E_i[N]$ *du nombre des pas du jeu, pour* B *quelconque.*

R : On pourrait essayer de calculer b_i en ajoutant les probabilités de tous les chemins du bonheur qui commencent avec $X_0 = 1$ (en regardant l'arbre de toutes les possibilités).

Mais comme cet arbre est (typiquement) infini et très compliqué, cette analyse n'est pas facile. Par contre, une approche «diviser pour conquérir» de décomposition de l'arbre dans ses branches obtenues en conditionnant sur le premier pas ramène à des'équations linéaires faciles à résoudre.

Cet exercice illustre de nouveau la puissance de la **méthode du conditionnement sur le premier pas** Durrett [1999] ("first step analysis", et il constitue aussi une deuxième rencontre avec les chaînes de Markov.

Exercice 3.2. *a) Ecrivez les équations pour $\boldsymbol{b} = (b_0, ..., b_4)$ dans la forme $\boldsymbol{b} = P\boldsymbol{b}$. Donnez une interpretation probabiliste pour les elements de la matrice P.*

b) Ecrivez les équations pour $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3), t_i = E_i[N]$ dans la forme $\boldsymbol{t} = Q\boldsymbol{t} + \mathbf{1}$. Donnez des interpretation probabilistes pour les elements de Q

R : La matrice P de la marche symétrique absorbante sur $[0, 4]$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.1. *Pour les marches sur $\mathbb{Z}$, les elements de la matrice P,*

$$(p_{ij} = \mathbb{P}\{X_n = j/X_{n-1} = i\} = \mathbb{P}\{Z_n = j - i\})_{i,j \in \mathbb{N}},$$

representent des probabilités de transition de i a j. Les elements $0, 4$ sont appellés absorbants, et les autres elements $1, 2, 3$ sont appellés transients. Q est la matrice de transition entre les elements transients, et $\boldsymbol{q}$ sont les probabilités d'absorbtion dans un pas.

Il s'avère que les mêmes systèmes linéaires, avec la même structure matricielle, décrivent la solution des problèmes analogues pour toutes les chaînes de Markov à espace d'états comptable, et avec des états absorbants.

Par contre, dans le cas des matrices Q à «diagonales»' constantes comme dans notre exemple, appellées matrices de Toeplitz, il est plus efficace d'aborder les systèmes linéaires correspondantes par la méthode des recurrences à coefficients constants.

Dans les chapitres suivants, nous continuerons a regarder des problèmes Markoviennes de premier passage, résolubles par le conditionnement sur le premier pas.

3.2 La ruine du joueur pour la marche aléatoire simple

Nous généralisons maintenant les résultats du chapitre précédant pour la marche unidimensionnelle symétrique au cas des marches simples asymétriques. En même temps, nous étudierons d'autres problèmes concernant l'absorption de la marche aléatoire simple unidimensionnelle (des équations similaires peuvent etre obtenues dans toute dimension, mais les solutions sont disponibles explicitement seulement dans le cas unidimensionnel).

Exemple 3.1. La ruine du joueur et autres «problèmes de Dirichlet» pour la marche aléatoire simple. *Considérons la marche aléatoire simple*

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, X_n \in \mathbb{Z}$$

avec (Z_n) *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi* $P[Z_n = \pm 1] = p, q$. *Nous étudierons la marche jusqu'au «temps d'arret/sortie»* $N = \min[N(0), N(B)]$ *quand le processus sort de l'intervalle* $[0, B]$ *pour* B *donné, c.-à-d. on prend* 0 *et* B *comme états absorbants. On appelle ce problème* **la ruine du joueur**, *à cause de l'interprétation d'un joueur qui s'engage dans une série de parties (indépendantes) à un jeu où à l'issue de chaque partie il gagne 1F avec une probabilité* p *et perd 1F avec une probabilité* $q = 1 - p$, *et qui décide de s'arrêter de jouer dès qu'il aura* B *francs en poche, ou dès qu'il n'a plus d'argent. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on note* X_n *la fortune du joueur au bout de* n *parties, et* $X_0 = i$ *représente sa fortune à l'entrée dans le Casino. On dénotera par* $\mathrm{E_i}$ *l'espérance en commençant de* i *(conditionnant sur* $X_0 = i$*), et on désigne par* E *l'événement que le joueur gagne, c.-à-d.* $E = \{x_N = B\} = [\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } X_n = B, X_i > 0, i = 1, ..., n-1]$. *Pour tout* i *de* $\{0, ..., B\}$, *on pose :*

$$b_i = P(E \mid \text{ en partant de } i).$$

1. *Quelles sont les valeurs de* b_0 *et* b_B *?*
2. *Montrer que :*

$$\forall\, i \in \{1, ..., B-1\}\ ,\ b_i = p\, b_{i+1} + q\, b_{i-1} \text{ (on rappelle que } q = 1 - p\text{).}$$

3. *Obtener une expression explicite de* b_i *pour tout* i *de* $\{1, ..., B\}$.
4. *Pour tout* i *de* $\{0, ..., B\}$, *on pose* $r_i = P(F \| \text{ en partant de } i)$ *où* F *est l'événement »'le joueur repart ruiné»' . En procédant comme auparavant, montrer que :*

$$r_i = \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^B}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^B} \text{ si } p \neq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{B-i}{B} \text{ si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Pour tout i *de* $\{0, ..., B\}$, *calculer* $r_i + b_i$. *Que peut-on en déduire ?*
5. *Calculez les probabilités de ruine quand* $\Psi_i = \lim_{B \to \infty} r_i$, *pour* $p > q$ *et pour* $p \leq q$. *Expliquez la relation avec le comportement de* $X(t), t \to \infty$.
6. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du gain final* $f_i = \mathrm{E_i X_N}$. *Calculez cette fonction pour* $p = q$.
7. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du temps de jeu :* $t_i = \mathrm{E_i[N]}$. *Calculez cette fonction, pour* $p = q$, *et pour* $p < q$, *quand* $B \to \infty$.
8. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du «coùt cumulé d'inventaire»* $c_i = \mathrm{E_i} \sum_{\mathrm{t=0}}^{\mathrm{N-1}} \mathrm{X(t)}$. *Calculez cette fonction, pour* $p = q$, *et pour* $p < q$, *quand* $B \to \infty$.
9. **Probléme homogène/de gain final arbitraire**. *Obtenez les équations de récurrence et les conditions frontière satisfaites par* $f_x = \mathrm{E_x g(X_N)}, \mathrm{g} : \{0, \mathrm{b}\} \to \mathbb{R}$.
10. **Probléme non-homogène/de coût total arbitraire**. *Obtenez les équations de récurrence et les conditions frontière satisfaites par* $c_x = \sum_{t=0}^{N-1} h(X(t))]$.
11. **(*) Valeurs actualisées**. *Montrer par conditionnement que* $\phi_x = \mathrm{E_x a^N g(X_N)}, \mathrm{a} \in (0, 1]$ *satisfait :*

$$\phi_x = \mathrm{E_x[a^N g(X_N)] = a(p\phi_{x+1} + q\phi_{x-1})}, \tag{3.1}$$
$$\phi_x = g(x) \text{ pour } x \in \{0, B\}.$$

   Obtenez les équations de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $v_x = \mathrm{E_x[a^N g(X_N) + \sum_{t=0}^{N-1} a^t h(X(t))], a \in (0, 1)}$.

12. Avec $B = \infty$, déduire, en differentiant (3.1) *par rapport à a, et en passant à la limite $a \to 1$, que $t_x := E_x[N(0); N(0) < \infty]$ satisfait $Pt_x + \Psi_x = t_x, t_0 = 0$.*

Nous allons résoudre cet exercice en utilisant la méthode du **conditionnement sur le premier pas** Z_1, l'idée de laquelle est d'obtenir des relations de récurrence qui lient les valeurs de l'espérance conditionnée à partir de tous les points de départ possibles. Nous verrons, en examinant les questions de cet exercice, qu'ils utilisent toutes le même opérateur

$$(Gf)_n := (P - I)(f)_n = p\, f_{n+1} + q\, f_{n-1} - f_n \tag{3.2}$$

la seule différence étant dans les conditions frontière et dans la partie nonhomogène.

Solution :

1. $b_0 = 0, b_B = 1$
2. Gain final espéré, $g(x) = 1_{x=B}$. En conditionnant, on trouve :

$$\begin{aligned} b_n &= \mathbb{P}_n[X(N) = B] \\ &= p\, \mathbb{P}_n[X(N) = B \mid \text{ en partant de n+1}] + q\, \mathbb{P}_n[X(N) = B \mid \text{ en partant de n-1}] \\ &= p\, b_{n+1} + q\, b_{n-1} \quad 1 \le n \le B-1 \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[X(N) = B/X(0) = n, X(1) = n \pm 1] = \\ &\mathbb{P}[X(N) = B/X(1) = n \pm 1] = \mathbb{P}[X(N) = B/X(0) = n \pm 1] = b_{n\pm1} \end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov et l'homogénéité en temps (le fait que "changement d'heure" après un pas ne change pas le résultat).

3. Quand $p = q = 1/2$, $b_x = P_x[X(N) = B]$ satisfait :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{b_{n-1}}{2} \quad \text{for any } 1 \le n \le B-1 \\ b_B &= 1 \\ b_0 &= 0 \end{aligned}$$

La méthode de résolution des équations de récurrence homogènes à coefficients constants commence en cherchant des solutions de la forme $b_n = r^n$. Si les racines de l'équation auxiliaire sont distinctes, la solution générale est :

$$b_n = k_1 \rho_1^n + k_2 \rho_2^n$$

où k_1, k_2 sont déterminées en utilisant les conditions frontière. Ici, cherchant des solutions puissances ρ^x ramène à l'équation $\rho^2 - 2\rho + 1 = 0$ à deux racines identiques $\rho_{1,2} = 1$. La solution générale est $b_x = A + Bx$. Les conditions frontière donnent $b_x = \frac{x}{B}$.

Solution finale si $p \neq q$: $b_n = \frac{1-(q/p)^n}{1-(q/p)^B}$.

Pour aller plus vite, remarquez que la solution satisfaisante $b_0 = 0$ est de la forme :

$$b_i = \begin{cases} k\,(1 - (\frac{q}{p})^i) & \text{quand } p \neq q \\ k\, i & \text{quand } p = q \end{cases}$$

et déterminer k tq la condition frontière de b_B soit satisfaite.

4. $r_i + b_i = 1$, et donc la marche sera finalement absorbée dans une des deux frontières (elle ne peut pas rester à l'intérieur indéfiniment).
5. Pour $p = q$, $\lim_{B\to\infty} r_n = \lim_{B\to\infty} \frac{B-n}{B} = 1$.
   En conclusion,

$$\Psi_n := \lim_{B\to\infty} r_{n,B} = \lim_{B\to\infty} \frac{(q/p)^n - (q/p)^B}{1-(q/p)^B} = \begin{cases} (q/p)^n, & q < p \\ 1, q > p. \end{cases}$$

   Remarque 3.2. *Le fait que $\Psi_n = \rho_i^n$, où ρ_i satisfait l'équation charactéristique, a une interpretation probabiliste evidente, car $\Psi_n = \Psi_1 \Psi_{n-1} \implies \Psi_n = (\Psi_1)^n$. Par contre, pour pour decider si $\Psi_1 = 1$ ou si $\Psi_1 = \frac{q}{p}$, on a besoin d'utiliser l'esperance de Z_1 est la loi des nombres forts.*
6. $f_x = E_x[X(N)]$ (valeur finale espérée) satisfait $Gf(x) = 0, f(0) = 0, f(B) = B$.
   Pour $p = q$, la solution $f_x = x$ est obtenue comme ci-dessus :

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{f_{x+1}}{2} + \frac{f_{x-1}}{2} \quad \text{for any } 1 \le x \le B-1 \\ f_B &= B \\ f_0 &= 0 \end{aligned}$$

   (C'est aussi une fonction «harmonique», mais avec conditions frontière différentes.)
7. $t_x = E_x[N]$ (temps de sortie espéré) est un coùt total accumulé espéré (obtenu en prenant $h(x) = 1$), qui satisfait le système inhomogène

$$t_x = p(1+E_{x+1}[N]) + q(1+E_{x-1}[N]) = pt_{x+1} + qt_{x-1} + 1 \iff Gt(x) + 1 = 0, t(0) = 0, t(B) = 0.$$

   Pour $p = q$

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + 1 \quad \text{for any } 1 \le x \le B-1 \\ t_B &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

   La solution d'une équation nonhomogène est donnée par

$$t_x = t_p(x) + h(x)$$

   où $t_p(x)$ est une solution particulière et $h(x)$ est la solution générale de l'équation homogène. Commençons par l'équation homogène. La solution générale homogène («fonction harmonique») $h(x) = A + Bx$ pour cet opérateur a été déjà obtenue ci-dessus. Nous aimerions maintenant trouver une solution particulière $t_p(x)$ de l'équation $Gt_p(x) = -1$ de la même forme que la partie nonhomogène -1 de l'équation, donc , $t_p(x) = C$; mais comme les constantes, et puis aussi les fonctions linéaires vérifient l'équation homogène $Gt_p(x) = 0$, nous devrons modifier deux fois cette forme en multipliant par x, en arrivant donc à $t_(x) = Cx^2$. Comme $Gx^2 = 2x(p-q) + 1 = 1$, on trouve $C = -1$ et finalement la solution particulière

$t_p(x) = -x^2$. La solution générale est donc $t(x) = -x^2 + A + Bx$ et les conditions frontière ramènent à $t_x = x(B-x)$. Pour $p \neq q$

$$\begin{aligned} t_x &= pt_{x+1} + qt_{x-1} + 1 \quad \text{for any } 1 \leq x \leq B-1 \\ t_B &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution générale homogène avec $p \neq q$ est $h(x) = k_1(q/p)^n + k_2$ et le terme non-homogène 1 suggère une solution particulière constante , k, mais comme ça satisfait l'équation homogène, on modifie à kn. Finalement, $k = \frac{1}{q-p}$. La solution particulière est $t_p(x) = \frac{x}{q-p}$; elle satisfait déjà $t_p(0) = 0$. La partie homogène $h(x) = t_x - t_p(x)$ devra aussi satisfaire $h(0) = 0$ et donc elle sera de la forme $h(x) = A\widetilde{h}(x)$ où $\widetilde{h}(x) = ((q/p)^x - 1)$. En demandant que $t_n = \frac{n}{q-p} + A(q/p)^n - 1)$ satisfait la condition frontière $t_B = 0$ on trouve :

$$t_n = t_p(n) - t_p(B)\frac{\widetilde{h}(n)}{\widetilde{h}(B)} = \frac{n}{q-p} - \frac{B}{q-p}\frac{(q/p)^n - 1}{(q/p)^B - 1}.$$

La limite quand $B \to \infty$ est $t_n = \begin{cases} \infty & \text{si } p > q \\ t_p(n) = \frac{n}{q-p} & \text{si } p < q \end{cases}$; on peut aussi obtenir ce résultat en utilisant l'approximation détérmiste $X_n - X_0 \sim nE(Z_1)$, appelée aussi limite fluide.

8. $c_x = E_x[\sum_0^{N-1} X(t)]$ (coùt total d'inventaire espéré) satisfait le système inhomogène $Gc(x) + x = 0, c(0) = 0, c(B) = 0$. Pour $p = q$:

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{c_{x+1}}{2} + \frac{c_{x-1}}{2} + x \quad \text{for any } 1 \leq x \leq B-1 \\ c_B &= 0 \\ c_0 &= 0 \end{aligned}$$

Une solution particulière est $c_p(x) = \frac{-x^3}{3}$. Finalement, on arrive à $c(x) = \frac{x(B^2-x^2)}{3}$. Pour $p \neq q$, une solution particulière est $c_p(x) = \frac{x^2}{2(q-p)}$ (elle satisfait déjà $c_p(0) = 0$). La partie homogène satisfaisant $h(0) = 0$ sera toujours $h(x) = A\widetilde{h}(x)$ où $\widetilde{h}(x) = ((q/p)^x - 1)$. En demandant que $c_n = c_p(n) + A(q/p)^n - 1)$ satisfait la condition frontière $c_B = 0$ on trouve :

$$c_n = c_p(n) - c_p(B)\frac{\widetilde{h}(n)}{\widetilde{h}(B)}$$

La limite quand $B \to \infty$ est $c_n = \begin{cases} \infty \text{ si } p > q \\ c_p(n) \text{ si } p < q \end{cases}$.

9. $Gf(x) = 0, f(0) = g(0), f(B) = g(b)$
10. $Gc(x) + h(x) = 0, c(0) = 0, c(B) = 0$

11. Soit $T_x = T$; on part de x. Remarquer que

$$T_x|\{Z_1 = \pm 1\} = 1 + T_{x\pm 1}, \text{ i.e. } \mathcal{L}[N_x|\{Z_1 = \pm 1\}] = \mathcal{L}[1 + T_{x\pm 1}].$$

On a

$$\phi_x = E[a^{N_x}] = pE[a^{1+T_{x+1}}|Z_1 = 1] + qE[a^{1+T_{x-1}}|Z_1 = -1] = a(p\phi_{x+1} + q\phi_{x-1}).$$

On a $v_x = g(x)$, pour $x \in \{0, B\}$, et le conditionnement donne la relation : $v_x = a(pv_{x+1} + qv_{x-1}) + h(x)$.

Remarque 3.3. *Les questions qui nous intéressent se regroupent en cinq types :*

1. *"Gain final espéré"* $f_n = \mathrm{E_n[g(X_N)]}$ *induit par* $g : \{0, B\}- > \mathbb{R}$ *(pb. Dirichlet), satisfaisant :*

$$f_n = pf_{n+1} + qf_{n-1} \Longleftrightarrow (Gf)_n = 0, \quad f(0) = g(0), f(B) = g(B)$$

2. *"Coùt total accumulé espéré"* $c_n = \mathrm{E_n}[\sum_0^{\mathrm{N}-1} \mathrm{h(X_i)}]$, *induit par* $h : \{1, 2, ..., n-1\}- > \mathbb{R}$ *(pb. de Poisson), satisfaisant :*

$$c_n = h(n) + pc_{n+1} + qc_{n-1} \Longleftrightarrow (Gc)_n + h(n) = 0, \quad c(0) = 0, c(B) = 0$$

3. *"Gain final espéré actualisé "* $\phi_n = \mathrm{E_n[a^N g(X_N)], a \in (0, 1]}$, *induit par* $g : \{0, B\}- > \mathbb{R}$, *satisfaisant :*

$$\phi_n = a(p\phi_{n+1} + q\phi_{n-1}) \quad \phi(0) = g(0), \phi(B) = g(B)$$

4. *"temps total espéré, multiplié par une fonction de la position finale"* $t_n = \mathrm{E_n[Ng(X_N)]}$, *induit par* $g : \{0, B\}- > \mathbb{R}$, *satisfaisant :*

$$t_n = f(n) + pt_{n+1} + qt_{n-1} \Longleftrightarrow (Gb)_n + f(n) = 0, \quad t(0) = 0, t(B) = 0, \tag{3.3}$$

   où $f(n)$ *est la solution du pb. Dirichlet 1.*

5. *"Coùt total accumulé espéré, multiplié par une fonction de la position finale"* $c_n = \mathrm{E_n}[\mathrm{g(X_N)} \sum_0^{\mathrm{N}-1} \mathrm{h(X_i)}]$, *induit par* $h : \{1, 2, ..., n-1\}- > \mathbb{R}, g : \{0, B\}- > \mathbb{R}$, *satisfaisant :*

$$c_n = f(n) + pc_{n+1} + qc_{n-1} \Longleftrightarrow (Gb)_n + f(n)h(n) = 0, \quad c(0) = 0, c(B) = 0, \tag{3.4}$$

   où $f(n)$ *est la solution du pb. Dirichlet 1.*

Conclusion : Nous avons rencontré ici quelques idées très importantes, appliquables en toute généralité à la modélisation Markovienne :

1. Les espérances liées aux temps de premier passage aux états transitoires, vues comme fonctions de l'état initial, satisfont certaines systèmes linéaires d'équations exprimant des "relations entre voisins transients", avec **une inconnue pour chaque état initial possible**.
2. Les équations s'obtiennent facilement par la méthode de conditionnement sur le premier pas (en utilisant essentiellement la propriété de l'oubli du passé des processus de Markov).

3. Les systèmes associés avec un processus fixe impliquent toujours la même partie homogène appelée «**opérateur**» G ou encore **générateur du processus**. C'est le premier MIRACLE des processus de Markov, dêtre charactérisé entièrement par un seul operateur. Par contre, les termes non homogènes et les conditions frontière varient (et certains incluent ces conditions dans l'operateur).

Remarque 3.4. *Les problèmes de cette section ont aussi des versions à espace d'états continu, obtenu en considérant des marches avec incréments infinitésimaux ϵ, et en prenant la limite $\mathbb{E} \to 0$. La marche aléatoire devient ainsi un processus avec chemins continus, appelé mouvement Brownien. L'opérateur associé est un opérateur différentiel, le Laplacien.*

Remarque 3.5. *(*) Les marches aléatoires sont des cas particuliers des chaînes de Markov.* [§] *Il s'avère que les mêmes équations décrivent la solution des problèmes analogues pour toutes les chaînes de Markov à espace d'états comptable, et avec des états absorbants.*

Dans le cas des chaînes de Markov en temps discret et à espace d'états fini ou dénombrable, l' opérateur est la matrice $P - I$, où P est la "matrice de transitions". Par exemple, la matrice P de la marche symétrique absorbante sur $[0, 4]$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'opérateur $G = P - I$ agit sur un vecteur $\vec{v} = (v_0, ..., v_4)$ par la formule $(P - I)\vec{v} = (0, \frac{v_0+v_2}{2} - v_1, \frac{v_1+v_3}{2} - v_2, ..., \frac{v_{n-1}+v_{n+1}}{2} - v_n, ..., 0)$.

Pour le cas d'une marche aléatoire $X(t) = \sum_{i=1}^{t} Z_i$ avec des pas bornés $p_k = P[Z_i = k], k \in [-c, d]$ on a encore $G = P - I$, où $P = \sum_k p_k T^k$ et T est l'opérateur de translation $(Tf)_k = f_{k+1}, k \in \mathbb{Z}$.

Finalement, nous pourrions obtenir les équations correspondantes pour les problèmes respectifs, juste en remplaçant l'ancien opérateur par le nouveau.

Cela reste vrai pour toute la classe des processus de Markov, $X(t)$, différents qu'elles soient, vivant sur des espaces S considérablement plus compliqués, la seule différence étant que l'opérateur $G_X : F(S) -> F(S)$ associé a ces processus sera plus compliquée !

En conclusions, il existe une correspondance un á un entre les processus de Markov et une certaine classe des opérateurs déterministes associés ; nous l'appellerons «Le Dictionnaire».

---

§. Pour une preuve que ces processus sont Markoviens au cas $Z_i \in \mathbb{Z}$, voir Exe 5,6 en poly Philippe-Viano, qui démontre que chaque processus définit par une récurrence

$$X_{n+1} = f(X_n, Z_n)$$

où Z_n sont i.i.d. est Markovien. Pour les marches sur $\mathbb{Z}$, la matrice de transition $P = (p_{ij} = \mathbb{P}\{X_n = j/X_{n-1} = i\} = \mathbb{P}\{Z_n = j - i\})_{i,j \in \mathbb{N}}$ a aussi la propriété que $P_{i,j} = p_{i-j}$, où $p_k = \mathbb{P}\{Z_n = k\}$; les matrices de cette forme, c.-à-d. à «'diagonales»' constantes, s'appellent matrices Toeplitz.

3.3 La loi du temps de ruine d'une marche aléatoire simple sur l'interval semi-infini $[0, \infty)$

Nous avons deja calculeé la probabilité de ruine pour une marche aléatoire simple sur $[0, \infty)$

$$\Psi_n := P[N(0) < \infty] = \lim_{B \to \infty} \Psi_{n,B} = \begin{cases} (q/p)^n, & q < p \\ 1, & q \geq p \end{cases},$$

en partant de la récurrence sur un domaine borné $[0, B]$ pour $\Psi_{n,B} := P[N(0) < N(B)]$, et en passant à la limite (la limite existe, car il s'agit d'une suite croissante des événements) la probabilité de ruine sur $[0, \infty)$ pour une marche aléatoire. Nous allons considerer maintenant une question plus difficile :

Question 1. *Soit $N = N(0)$. Quelles sont les probabilités $p(t) = P[N = t \mid$ en partant de 1$]$?*

On a $p(1) = q, p(2) = 0 = p(4) + ..., p(3) = pq^3, p(5) =?$ (on rentre dans l'analyse combinatoire, ce qui presage l'usage des fonctions génératrices).

Dans un cadre Markovien, il est naturel d'"upgrader" (monter en gamme/grade ?) la question et trouver des équations pour $p_n(t) = P[N = t \mid$ en partant de $n], n \geq 1$.

Avant de repondre a cette question, remarquons que les calculs ci-dessous avec le passage à la limite $B \to \infty$ deviennent assez assomants pour les marches aléatoires non-simples. Alors, pour faire plus vite, nous admettront des résultats faciles a croire comme

$$E[Z_1] > 0 \Longrightarrow \lim_{x \to \infty} \Psi(x) = 0,$$

(que nous appellerons le "théorème de Bill Gates", officieusement, bien-sûr). Cela implique qu'il faut retenir seulement les racines ρ_i de l'équation charactèristique avec $|\rho_i| < 1$ quand on calcule les probas de ruine, et cela continue d'être vrai (même que moins evident) pour le calcul des espérances de temps de ruine.

Exercice 3.3. 1. *Pour une marche aléatoire simple sur l'interval $[0, B]$, obtenir des équations pour $p_n(t) = P[N = t/X_0 = n], n \in [1, B-1], t \geq 1$.*

2. *Obtenir un système d'équations pour*

$$\phi_i = \mathrm{E_i z^N} = \sum_{\mathrm{k=0}} \mathbb{P}_\mathrm{i}[\mathrm{N = k}]\mathrm{z^k}$$

(qui est la fonction génératrice des probabilités $\mathbb{P}[N = k | X_0 = i]$) pour la marche simple sur $[0, B]$, et résoudre, pour $z < \min(1, \frac{1}{\sqrt{4pq}})$.

3. *Avec $B = \infty, |z| < 1$, montrer que*

$$\phi_i = E_i[z^{N(0)}; N(0) < \infty] = E_i[z^{N(0)}] = \rho(z)^i,$$

avec $\rho(z)$ a determiner.

4. *Avec $B = \infty$ calculer les probabilités de ruine $P_1[N(0) = k], k = 1, 2, 3, ...$*

5. *Obtenir a) les probabilités de ruine et b) l'espérance*

$$t_n = E_n[N(0); N(0) < \infty]$$

à partir du résultat 3. précedent.

6. *Calculer la la fonction génératrice des probabilités $P_k = \mathbb{P}[N \le k | X_0 = i]$.*

R :

1. $p_n(t) = pp_{n+1}(t-1) + qp_{n-1}(t-1), t, n \in \{1, 2, ...\}, p_0(t) = p_B(t) = 0, \forall t$. Résoudre une recursion double est rarement possible. Pour se debarasser d'une variable, passons à la fonction génératrice $\phi_n = \sum_{t=1}^{\infty} z^t p_n(t) = E_n[z^N]$.
2. $\phi_x(z) = z(p\phi_{x+1} + q\phi_{x-1}), \phi_0 = \phi_b = 1$.

   Remarque 3.6. *Pour $z \in (0, 1)$, c'est comme si avant chaque pas, on tuait le processus avec proba $1 - z$, et on cherchait la probabilité d'arriver en B ou 0 avant d'être tué !*

   On arrive a $\phi_x(z) = A_1 z_1^x + A_2 z_2^x$, où $z_i = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pqz^2}}{2pz}, z^2 \le \frac{1}{4pq}$ sont les racines de $ap\zeta^2 - \zeta + aq = 0$, et A_i satisfont $A_1 z_1^B + A_2 z_2^B = 1, A_1 + A_2 = 1$. Pour $z \to 0$, on a une "petite racine" (analytique en z autour de 0) $z_2 \sim qz \to 0$, et une "grande racine" $z_1 \sim \frac{1-pqz^2}{pz} \to \infty$.

   Pour $z^2 < \frac{1}{4pq}$, on a $z_1 > z_2 \in \mathbb{R}$, et $\phi_x(z) = \frac{z_1^x - z_2^x + (z_1^B z_2^x - z_2^B z_1^x)}{z_1^B - z_2^B} = \frac{z_1^x(1-z_2^B)}{z_1^B - z_2^B} - \frac{z_2^x(1-z_1^B)}{z_1^B - z_2^B}$
3. Quand $B \to \infty$, la grande racine disparait et

   $$\boxed{\phi_x(z) = (\rho(z))^x},$$

   où $\rho(z) = z_2(z) = \frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2pz}$ est la petite racine (analytique autour de $z = 0$).
4. Les probas $p_1(t)$ de premier passage de 1 a 0 peuvent être recupèrées par le developpement limité binomial de la racine carré

   $$\rho(z) = qz + pq^2 z^3 + 2p^2 q^3 z^5 + 5p^3 q^4 z^7 + 14p^4 q^5 z^9 + 42p^5 q^6 z^{11} + O\left(z^{12}\right). \quad (3.5)$$

   Ceci s'accomplit aussi par inversion de Lagrange de l'équation $z = \frac{\rho}{q+p\rho^2}$, qui donne $[z^n]\rho(z) = n^{-1}[\rho^{n-1}]\left((q + p\rho^2)^n\right)$. Finalement

   $$p_1(2n-1) = [z^{2n-1}]\rho(z) = 2^{2n-1}\binom{1/2}{n} p^{n-1} q^n. \quad (3.6)$$

   En particulier, si $p = q$, $\rho = z^{-1}(1 - \sqrt{1-z^2}) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{8}z + \frac{2}{32}z^5 + ...$ donne les probabilités $P_1[N(0) = 1] = \frac{1}{2}$, $P_1[N(0) = 3] = \frac{1}{8}$, ...
5. a) En particulier,

   $$\boxed{\Psi_n = P_n\left[N(0) < \infty\right] = \rho(1)^n}.$$

   La racine $\rho := \rho(1)$ satisfait

   $$\rho = \frac{1 - |p-q|}{2p} = \begin{cases} 1 & q > p \\ \frac{q}{p} & p > q \end{cases} = \Psi(1).$$

   Remarque 3.7. *Le resultat $\Psi_n = \rho^n$ peut aussi être obtenu par un raisonnement basée sur une decomposition en morceaux independants -voir Remarque 3.2 et Chapitre 3.4– ou en utilisant la martingale de Wald $\rho(z)^{X_n}, \rho \in (0, 1)$– voir ci-dessous.*

b) Pour $t_n = E_n[N(0); N(0) < \infty]$, vérifions d'abord que $\phi_1'(z) = \rho'(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-4pqz^2}}-1}{2pz^2}$

$$\Longrightarrow t_1 = \rho'(z)|_{z=1} = \rho\frac{1}{|q-p|} = \begin{cases} \frac{1}{q-p} & q > p \\ \rho\frac{1}{p-q} = \frac{q/p}{p-q} & p > q \\ \infty & p = q \end{cases},$$

et

$$t_x = [(\rho(z))^x]'\,|_{z=1} = \boxed{\begin{cases} \frac{x}{q-p} & q > p \\ \rho^x\frac{x}{p-q} & p > q \end{cases}}.$$

Remarque 3.8. *Nous pouvons aussi vérifier l'équation de récurrence* (3.4) *satisfaite par t_x, au cas $p > q$. En calculant Gt_x, on trouve*

$$Gt_x = \frac{1}{p-q}\Big(p(x+1)\rho^{x+1} + q(x-1)\rho^{x-1} - x\rho^x\Big)$$
$$= \frac{1}{p-q}\Big(q(x+1)\rho^x + p(x-1)\rho^x - x\rho^x\Big) = -\rho^x \Longrightarrow Gt_x + \Psi_x = 0.$$

La dernière egalité est vrai en effet pour toutes les marches aléatoires, et peut-être demontré aussi en utilisant les martingales et l'identité de Wald.

Remarque 3.9. *On s'aperçoit que pour $p > q$, on a*

$$E_x[N(0)|N(0) < \infty] = \frac{x}{p-q} := x\tilde{t}_1,$$

qui est exactement le temps esperé pour descendre x unités de la marche renversée $\widetilde{X}_n$ avec

$$\tilde{Z}_n = -Z_n = \begin{cases} 1 & a.p.q \\ -1 & a.p.p \end{cases}.$$

On peut generaliser le cas particulier ci-dessus pour des marches arbitraires avec tendance positive ; les espérance $E_x[N(0)|N(0) < \infty]$ coincident avec celles des certaines marches avec tendance positive, obtenues par une certaine "conjugaison" qui change la direction.

Exercice 3.4. *(*) Pour la marche sur $[0, B]$ avec $B = 2$, soit $t_i = E_i[N; X(N) = B]$. Montrer que $t_2 = \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)p^kq^{k-1} = \frac{p+p^2q}{(1-pq)^2}, t_1 = \sum_{k=1}^{\infty}(2k)p^{k+1}q^{k-1} = \frac{2p^2}{(1-pq)^2}$, en utilisant une somme sur tous les chemins possibles.*

En conclusion, le calcul de la fgp (**fonction génératrice des probabilités de ruine**) $\phi_n(z) = E_n\left[z^{N(0)}\mathbb{1}_{N(0)<\infty}\right] = E_n\left[z^{N(0)}\right], |z| < 1$ est une question de grand intêret. Cela permet de retrouver $\Psi_n = \phi_n(1) = P_n\left[\mathbb{1}_{N(0)<\infty}\right]$, et l'espérance $t_n = E_n[N(0); N(0) < \infty] = \phi_n'(1)$. Finalement, le calcul de l'espérance du temps de ruine $t_n = E_n[N(0)|N(0) < \infty]$ dans le cas où $EZ_1 > 0$ semble suggérer que le conditionnement change le mechanisme de la marche.

Nous examinerons ci-dessous la généralisation de ces questions pour des marches "non-simples" d'un coté, mais "simples" de l'autre.

3.4 Problème de ruine pour les marches aléatoires continues en bas

Définition 3.1. *Nous appelerons une marche sans des sauts strictement plus grands que* 1 *en haut/bas continue en haut/bas.*

Pour les marches continues en bas avec $Z_i \in \{-1, 0, 1, ...\}$, le problème de la ruine peut être abordé par un argument probabiliste. On remarque d'abord que l'absence des sauts en bas plus grands que 1 impose une récurrence

$$\Psi_n = \rho \Psi_{n-1}, \quad \rho = P_n[N_{n-1} < \infty], \Psi_0 = 1.$$

La fonction Ψ_n est donc multiplicative en n, c.-à-d. $\Psi_n = \rho^n$. Soit

$$p_Z(z) = Ez^{Z_1} = \sum_{i=-1}^{\infty} p_i z^i.$$

En conditionnant sur le premier pas, on trouve que ρ doit satisfaire l'équation caractéristique

$$\boxed{1 = p_Z(\rho)} \tag{3.7}$$

Remarque 3.10. *L'équation* (3.7) *est importante aussi pour les marches arbitraires sur* $\mathbb{Z}$*, mais en général* ρ *n'a pas d'interpretation comme probabilité. En général, il aparaît dans la recherche des martingales de Wald, ou en cherchant des solutions puissances de l'équation* $Gf_n = 0$.

Par «miracle», pour les marches continues en bas il y aura toujours exactement une solution unique de (3.7) satisfaisant $\rho \in (0, 1]$, ce qui détermine ρ uniquement. En plus, si l'espérance des sauts $EZ_i \leq 0$, alors $\rho = 1$ (on demontre ça en examinant la limite de X_n quand $n \to \infty$), et si $Z_i > 0$, alors $\rho < 1$.

Exercice 3.5. *a) Calculer l'espérance du temps de ruine* $E_x[N(0)]$ *et la probabilité de ruine* $\Psi(x)$ *pour une marche avec* $\left\{p_2 = \frac{3}{8}, p_1 = \frac{1}{8}, p_{-1} = \frac{1}{2}\right\}$. *b) Calculer* $t_x = E_x[N(0); N(0) < \infty]$*, en utilisant les équations de récurrence* $Pt_x + \Psi_x = t_x, t_0 = 0$. *c) Donner l'espérance du temps de ruine* $E_x[\widetilde{N}(0)]$ *et la probabilité de ruine pour la marche renversée avec increments* $\widetilde{Z}_i = -Z_i$.

R : a) $E[Z_1] = \frac{3}{8} > 0 \Longrightarrow E_x[N(0)] = \infty$. Les racines charactéristiques sont $2/3, -2, 1$. La continuité en bas + $E[Z_1] > 0$ impliquent $\Psi_x = \rho^x, \rho = \frac{2}{3}$. b) La solution particulière est $p_x = Ax\rho^x, A = 3$.

On a une seule condition frontiére $t_0 = 0$, donc forcement deux racines charactéristiques inacceptables -2 et 1. En admettant cela, $t_0 = 0 \Longrightarrow t_x = p_x = Ax\rho^x$. Rémarquez que $E_x[N(0)/N(0) < \infty] = Ax$, donc le premier moment du temps T_x de la marche conditionné par ruine est linéaire, ce qui suggère une evolution approximativement linéaire.

Rémarquez aussi que $\lim_{x\to\infty} t_x = 0$ et réciproquement,

$$t_x = p_x \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} t_x = 0.$$

Donc, pour justifier l'absence des racines -2 et 1, il suffit de démontrer ou d'accepter que

$$E[Z_1] > 0 \implies \lim_{x\to\infty} E_x[N(0); N(0) < \infty] = 0$$

("deuxième théorème Bill Gates").

c) La marche renversée a $\left\{p_{-2} = \frac{3}{8}, p_{-1} = \frac{1}{8}, p_1 = \frac{1}{2}\right\}$ a racines charactéristiques **réciproques** $3/2, -1/2, 1$, et $E[\widetilde{Z}_1] = -\frac{3}{8} \implies \widetilde{\Psi}_x = 1$ (remarquer que les racines sont les réciproques des racines de la marche initiale). La solution de la récurrence $G\widetilde{t}_x + 1 = 0, t_0 = 0, t_{-1} = 0$ est de la forme

$$\widetilde{t}_x = A_1(\frac{3}{2})^x + A_2(\frac{-1}{2})^x + A_3 + Ax, A = \frac{8}{3}. \tag{3.8}$$

Avec trois inconnues et deux conditions frontière, une est de trop et doit être eliminé par un théorème limite (rémarquer aussi que les premières équations donnent $\widetilde{t}_2 = 2(\widetilde{t}_1 - 1), \widetilde{t}_3 = 3(\frac{5}{4}t_1 - 2), \ldots \widetilde{t}_n = f(\widetilde{t}_1)$, et t_0 ne peut pas être déterminé sans connaitre le comportement limite de $t_n, n \to \infty$).

On peut resoudre la récurrence en supposant $A_1 = 0$ (i.e. l'impossibilité d'une augmentation exponentielle), ce qui donne

$$\widetilde{t}_x = E_x[\widetilde{N}(0)] = \frac{8}{3}x + \frac{8}{9}(1 - (\frac{1}{-2})^x) \Longrightarrow \widetilde{t}_1 = 4, \widetilde{t}_2 = 6, \widetilde{t}_3 = 9, \ldots$$

Rémarquer que $\lim_{x\to\infty} \frac{\widetilde{t}_x}{x} = \frac{8}{3} = \frac{1}{E[\widetilde{Z}_1]}$.

L'impossibilité d'une augmentation exponentielle est justifié par un théorème de limite "fluide" (a admettre)

$$E[\widetilde{Z}_1] < 0 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\widetilde{t}_x}{x} = \frac{1}{-E[\widetilde{Z}_1]}. \tag{3.9}$$

Remarque 3.11. *Une autre marche interessante et la marche "conjuguée", obtenue en multipliant les probas de Z_i par ρ^i* $\implies \left\{p_2 = \frac{3}{8}\frac{4}{9} = \frac{1}{6}, p_1 = \frac{1}{8}\frac{2}{3} = \frac{1}{12}, p_{-1} = \frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{4}\right\}$

3.5 Problème de ruine pour les marches aléatoires avec un nombre fini des sauts possibles en bas

Pour les marches qui sautent parfois plus de un en bas, la probabilité de ruine n'est plus simplement une puissance, mais une combinaison linéaire des puissances. Le «miracle» se répète : il y aura toujours exactement autant des "bonnes racines" satisfaisant $|\rho| \in (0, 1]$ qu'on aura besoin pour satisfaire toutes les conditions frontière en bas nécessaires.

Exercice 3.6. *a) Calculer l'espérance du temps de ruine $E_x[N(0)]$ et les probabilités de ruine $\Psi_x, x \in \mathbb{N}$, pour une marche sur les nombres naturels, avec la distribution de chaque pas donné par : $\left\{p_1 = \frac{8}{10}, p_{-1} = \frac{1}{10}, p_{-2} = \frac{1}{10}\right\}$. Montrer que les probabilités de ruine Ψ_x sont positives.*

b) Calculer aussi les probabilités de ruine $\Psi_x^{(-1)} = p_x[\tau < \infty, X_\tau = -1], x \in \mathbb{N}$, et $\Psi_x^{(-2)} = p_x[\tau < \infty, X_\tau = -2], x \in \mathbb{N}$. Ind : Utiliser les martingales de Wald.

c) Calculer les probabilités de ruine et l'espérance du temps de ruine pour la marche renversée.

d) (*) Calculer l'esperance $E_x[N(0); N(0) < \infty]$, en resolvant les équations de récurrence $Pt_x + \Psi_x = t_x, t_0 = 0$.

R : a) La moyenne est $m_1 = 1/2 > 0 \Longrightarrow E_x[N(0)] = \infty$. Les probabilités de ruine satisfont $\Psi_x = \frac{8}{10}\Psi_{x+1} + \frac{1}{10}\Psi_{x-1} + \frac{1}{10}\Psi_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine de

$$\frac{8}{10}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{10}\rho + \frac{1}{10} = (\rho - 1)(\frac{8}{10}\rho^2 - \frac{2}{10}\rho - \frac{1}{10}) = \frac{8}{10}(\rho - 1)(\rho - 1/2)(\rho + 1/4)$$

$\Psi_x = A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(\frac{-1}{4})^x$ satisfait $\Psi_0 = \Psi_{-1} = 1$ ssi $A_1 = 5/6, A_2 = 1/6$. Les probabilités de ruine sont :

$$\Psi_x = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}\right)^x \approx \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

b) ... c) $\widetilde{\Psi}_x = 1, \widetilde{t}_x = \frac{x}{m_1} = 2x$. d) Cherchons une solution particulière de $Gp_x + \Psi_x = 0$ de la forme $p_x = x[A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(\frac{-1}{4})^x]$. Il suffit de calculer $G[x(\frac{1}{2})^x]$ et $G[x(\frac{-1}{4})^x]$.

$$G[x(\frac{1}{2})^x] = \frac{8}{10}[(x+1)(\frac{1}{2})^{x+1} - x(\frac{1}{2})^x] + \frac{1}{10}[(x-1)(\frac{1}{2})^{x-1} - x(\frac{1}{2})^x] + \frac{1}{10}[(x-2)(\frac{1}{2})^{x-2} - x(\frac{1}{2})^x] = -\frac{3}{5}(\frac{1}{2})^x.$$

Plus généralement, nous avons besoin de $GD_x[z^x] = G[xz^{x-1}]$, où $G = \sum_i p_i(T^i - 1)$. On vérifie que T et D_x commutent, et donc

$$GD_x[z^x] = D_x G[z^x] = xz^{x-1}(\phi(z) - 1) + z^x\phi'(z).$$

En particulier, pour z racine charactéristique, on a

$$G[xz^{x-1}] = z^x\phi'(z) \Longrightarrow G[xz^x] = z^x z\phi'(z),$$

et $G[x(\frac{-1}{4})^x] = -3(\frac{-1}{4})^x$. La solution particulière est $\frac{25}{18}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{4}\right)^x$ et finalement

$$t_x = \frac{1}{27}2^{-x-2}\left(150x - 35(-1)^{2x} + 81\right) + \frac{1}{27}2^{-2x-2}\left(6(-1)^x x - 86(-1)^x + 40(-1)^{3x}\right)$$

Remarque 3.12. *Une méthode alternative pour les probas de ruine des marches avec un nombre fini des sauts possibles en bas et en haut est fournie par le théorème d'arrêt des martingales de Doob, et la recherche des martingales de Wald ρ^{X_t}.*

On trouvera toujours que $E[Z_1] > 0$ assure que le nombre des racines ρ_i de $\phi_Z(\rho) = 1$ qui sont plus petites que 1 en valeur absolue est égal au nombre des sauts possibles en bas. §

§.

Théorème 3.1. *Supposons que la marche aléatoire discrète $X_t = x + \sum_{i=1}^t Z_i$, avec Z_i i.i.d. et $E[Z_1] > 0$ est tel que $\phi_Z(\theta) = p_+(\theta) + p_-(\frac{1}{\theta})$, where $p_\pm(\theta)$ sont des polynômes des degrés $n_\pm$. Alors*

a) L'équation $p_Z(\theta) = 1$ a $n_- + n_+$ racines, dont exactement n_- racines plus petites que 1 en valeur absolue et $n_+ - 1$ racines plus grandes que 1 en valeur absolue.

b) Les probabilités de ruine sur $[0, \infty)$, $\Psi_x, x \in \mathbb{N}$ sont des combinaisons de n_- racines plus petites que 1 en valeur absolue.

3.6 (*) Fonction génératrice des probabilités de ruine pour les marches continues en haut

Exercice 3.7. *a) Montrer par la méthode de fonctions génératrices que pour une marche $X(t) = x + \sum_i Z_i$ continue en haut, la fonction génératrice des probabilités de survie $\bar{\Psi}_n = 1 - \Psi_n$ satisfait*

$$\bar{\Psi}^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Psi}_n z^n = \frac{p_{-1}\bar{\Psi}_1}{p_Z(z) - 1} \tag{3.10}$$

b) Recalculer les probabilités de ruine pour la marche aléatoire simple.

Sol : a) Soit $q = p_{-1}$. On ajoute les équations $\bar{\Psi}_n = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \bar{\Psi}_{n+i} + q\bar{\Psi}_{n-1}$, multipliées respectivement par $z^n, n = 1, 2, ..$ On obtient ainsi l'équation : ...

b)

$$\Psi^*(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{zp\bar{\Psi}_1}{p + qz^2 - z} = \frac{p - qz - pz\bar{\Psi}_1}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p - qz - z(p-q)}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p}{p-qz}$$

car le numerator s'annule en 1 («méthode du noyau») et donc $p\bar{\Psi}_1 = p - q$. De lors, $\Psi_n = (q/p)^n$.

3.7 (*) Processus de Markov en temps continu

Remarque 3.13. *(*) Au lieu de la matrice de transition P, on peut aussi baser l'étude des chaînes de Markov sur la matrice "des taux de transition" $G = P - I \Leftrightarrow P = I + G$ où G est une matrice génératrice. Si on étudie un processus après des intervalles très courtes dt, la matrice de transition après dt s'écrit*

$$P(dt) \approx I + dtG_{dt} \Longrightarrow P(t) \approx (I + dtG_{dt})^{t/dt} \to e^{tG}$$

où $G = \lim_{dt \to 0} G_{dt}$ est la matrice des taux de transition du processus en temps continu.

Finalement, pour considerer des processus de Markov en temps continu, on garde le graphe de communication du temps discret, mais on remplaçe les probabilités de transition ("jetées de dé") en chaque sommet par par des taux de transition. Le prochaîne sommet a visiter, ainsi que la loi du temps de passage sont déterminées par une "competition des exponentielles" du type illustré dans l'exercice **??**.

Exercice 3.8. *Quels sont les taux associés au processus de l'exercice* **??** *? Arranger ces taux dans une matrice génératrice G (ayant somme 0 sur chaque ligne).*

Définition 3.2. *Une densité $E(\lambda_1, \lambda_2, ...)$ d'une somme indépendante des variables exponentielles avec taux $\lambda_1, \lambda_2, ...$ s'apelle densité d'Erlang généralisée.*

Sa transformée de Laplace est $\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{s+\lambda_i}$.

L'étude des chaînes et processus de Markov en temps discret et en temps continu comporte trois types des problèmes. En ordre de difficulté, il s'agît de :

1. loi d'équilibre : $\lim_{n\to\infty} P^n$ et $\lim_{t\to\infty} e^{tG}$
2. lois de premier passage, concernant le temps et la position au temps du premier passage d'une frontière

3. lois transitoires P^n et e^{tG}

Pour le deuxième problème, on vera que la fonction de survie ainsi que la densité d'un temps d'arret τ d'un processus de Markov absorbant en temps continu ont des réprésentations matricielles :

$$\bar{F}_\tau(t) = \vec{\beta} e^{t\mathbf{B}} \mathbf{1} \Leftrightarrow f(t) = \vec{\beta} e^{t\mathbf{B}} \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{b} = -B\mathbf{1}, \tag{3.11}$$

où B est la matrice sous-génératrice des transitions sur la partie transitoire, et $\vec{\beta}, \mathbf{1}$ dénotent des vecteurs ligne et colonne.

La transformée de Laplace est rationelle, de la forme

$$f^*(s) = \vec{\beta}(sI - B)^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i s^i}$$

Remarque 3.14. *Les lois ayant une transformée de Laplace rationelle sont appelées aujourd'hui lois de type matrice-exponentielle. Si en plus la matrice B est sous-génératrice et le vecteur $\vec{\beta}$ est non-négatif, on utilise le nom de loi de type phase.*

Exercice 3.9. *Trouver une formule pour la densité du temps de la dernière des n ampoules identiques a s'éteindre (exercice **??**.8), en utilisant :*
a) la réprésentation matricielle associée à l'ordre $\{n, n-1, ..., 1\}$.
b) la réprésentation matricielle associée à l'ordre $\{1, ..., n-1, n\}$.

Remarque 3.15. *Les processus de Markov etendent au domaine aléatoire le concept d'evolution controlée par une équation différentielle. Ils sont specifiés par un mechanisme de transition, ils ont des conditions initiales, et possiblement des limites asymptotiques. La classe des processus Markoviens est extremêment riche, avec une complexité qui depend des ensembles $\mathcal{E}, \mathcal{I}$.*

Deux méthodes de base sont fondamentales pour l'étude des processus de Markov : a) la méthode du conditionnement, qui permet de deriver des équations pour les espérances conditionnés par létat initial, et la resolution des équations en utilisant des transformées (de Laplace, Fourier, fonctions génératrices, ...). Parfois les reponses demandent seulement le calcul des exponentielles des matrices.

3.8 Exercices

1. **La marche paresseuse :** Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = 1]$ =p, $P[Z_n = -1]$ =q et $P[Z_n = 0]$ =1- p-q, avec $0 < p + q < 1$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par $\mathrm{E_x}$ l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés.
   (a) Classifiez les pbs suivantes $p_x = \mathbb{P}_x\{X_N = K\}$, $f_x = E_x[X_N]$, $g_x = E_x[X_N^2]$, $t_x = \mathrm{E_x[N]}$, $c_x = E_x[\sum_0^{N-1} X(t)]$, et $d_x = E_x[\sum_0^{N-1} X_t^2]$ comme des pbs de prix final ou de coùt accumulé. Quelles sont les équations de récurrence et les conditions frontière correspondant à chaque pb ?
   (b) (*) Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $\phi_x = \mathrm{E_x a^N}$.

(c) Rappeler les étapes principales de la résolution des équations de récurrence avec coefficients constants qui en résultent pour a) p_x, b) f_x, c) t_x, et d) c_x, dans les deux cas possibles $p < q$ et $p = q < 1/2$. Donner les réponses finales dans le cas $p = q < 1/2$.

2. Calculer les **probabilités de ruine** $p_x, x \in \mathbb{N}$, pour une marche sur les nombres naturels, avec la distribution de chaque pas donnée par : $\left\{p_1 = \frac{6}{7}, p_{-1} = 0, p_{-2} = \frac{1}{7}\right\}$. Vérifier la positivité du résultat.

   Calculer aussi l'esperance du temps de ruine.

R :

1. (a,b) Soit $(Gf)_x = p\,(f_{x+1} - f_x) + q\,(f_{x-1} - f_x)$ (formellement, la même expression comme dans le cas «non paresseux», sauf que maintenant $p+q < 1$. Les équations sont respectivement :

$$\begin{aligned}(Gp)(x) = 0, p_K = 1, p_0 = 0\\ (Gf)(x) = 0, f_K = K, f_0 = 0\\ (Gg)(x) = 0, g_K = K^2, d_0 = 0\\ (Gt)(x) + 1 = 0, t_K = 0, t_0 = 0\\ (Gc)(x) + x = 0, c_K = 0, c_0 = 0\\ (G\phi)x + [1 - a^{-1}]\phi_x, \phi_K = 1, \phi_0 = 1\end{aligned}$$

Ces sont exactement les mêmes équations comme pour une marche non paresseuse, sauf que l'opérateur est différent.

[c] Pour p_x et f_x on obtient donc les mêmes équations comme pour une marche symétrique avec $p = 1/2$, par exemple :

$$\begin{aligned} 2pp_x &= pp_{x+1} + pp_{x-1} \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1\\ p_K &= 1, \quad p_0 = 00\end{aligned}$$

et donc les mêmes réponses $p_x = \frac{x}{K}, \quad f_x = K^2\frac{x}{K} = xK$.

[d] Pour $t_x = E_x[N]$ [temps de sortie espéré] on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= pt_{x+1} - [p+q]t_x + qt_{x-1} + 1 \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1\\ t_K &= 0, \quad t_0 = 0\end{aligned}$$

Soit $t_0(x) = \frac{x}{q-p}$ une solution particulière qui satisfait $t_0(0) = 0$. La solution est $t_x = t_0(x) - t_0(K)\frac{h(x)}{h(K)}$ où $h(x) = 1-(q/p)^x$ est une solution homogène satisfaisante $h(0) = 0$. Pour $K = \infty, q > p$ on obtient $t(x) = t_0(x)$. Pour c_x on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= pc_{x+1} - [p+q]c_x + qc_{x-1} + x \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1\\ c_K &= 0, \quad c_0 = 0\end{aligned}$$

Soit $c_0(x) = \frac{x^2}{2(q-p)} + \frac{x(q+p)}{2(q-p)^2}$ une solution particulière qui satisfait $c_0(0) = 0$. La solution est $c_x = c_0(x) - c_0(K)\frac{h(x)}{h(K)}$ où $h(x) = 1-(q/p)^x$ est une solution homogène satisfaisant $h(0) = 0$. Pour $K = \infty, q > p$ on obtient $c(x) = c_0(x)$.

Remarque : Le fait que les équations sont identiques pour ces deux marches [paresseuse et non-paresseuse] n'est pas une coïncidence. En fait, il s'avère que les réponses obtenues sont les mêmes por n'importe quel processus Markovien homogène, si on défini l'opérateur de la façon juste. Donc, la réponse pour tous les problèmes concernant espérances variable aléatoire impliquer un seul opérateur G [seulement les conditions frontière et la partie non homogène changent d'un problème à l'autre]- en fait, la famille des processus aléatoires Markoviens est isomorphe à une famille d'opérateurs déterministes. En plus, la structure des réponses en fonction de G est la même pour tous les processus aléatoires Markoviens, malgré leur diversité ; c'est un fait remarquable, qui démontre la puissance de ce concept.

2. Les probabilités de ruine satisfont $p_x = \frac{6}{7}p_{x+1} + \frac{1}{7}p_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine de

$$\frac{6}{7}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{7} = (\rho - 1)(\frac{6}{7}\rho^2 - \frac{1}{7}\rho - \frac{1}{7}) = \frac{6}{7}(\rho - 1)(\rho - 1/2)(\rho + 1/3)$$

$p_x = A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(\frac{-1}{3})^x$ satisfait $p_0 = p_{-1} = 1$ ssi $A_1 = 4/5, A_2 = 1/5$.

3.9 Problèmes de premier passage sur un intervalle semi-infini

Soit $\psi_n := P[T_0 < \infty] = \lim_{B\to\infty} \psi_{n,B}, \psi_{n,B} := P[T_0 < T_B]$ (il s'agit d'une suite croissante des événements) la probabilité de ruine sur $[0, \infty)$, pour la marche simple. On vérifie facilement, en partant des récurrences sur un domaine borné $[0, B]$, et en passant à la limite, que :

$$\psi_n = \lim_{B\to\infty} \psi_{n,B} = \begin{cases} (q/p)^n, & q < p \\ 1, & q \geq p. \end{cases}$$

Pour la marche simple, ou pour toute marche qui n'a pas des sauts en bas strictement plus grands que 1, cette solution peut etre trouvée aussi directement, sans passer par la probabilité de ruine $r_n(B)$ sur $[0, B]$. On remarque d'abord que l'absence des sauts en bas plus grands que 1 impose une récurrence

$$\psi_n = \rho\psi_{n-1}, \quad \rho = P_n[T_{n-1} < \infty].$$

La fonction ψ_n est donc multiplicative en n, c.-à-d. $\psi_n = \rho^n$, avec un ρ determiné par l'èquation caractéristique ; par "miracle", il y aura toujours exactement une solution satisfaisant $\rho \in (0, 1)$. On choisira en suite $\rho = 1$ ou $\rho < 1$, selon l'espérance des sauts (qui determine la limite de X_n quand $n \to \infty$).

Mais, cette approche ne resout pas le cas des marches "qui sautent" parfois en bas. Dans ce cas, la solution n'est plus simplement une puissance, mais une combinaison linéaire des puissances. Le "miracle" se repete : il y aura toujours exactement autant des solutions satisfaisant $|\rho| \in (0, 1)$ qu'on aura besoin pour satisfaire toutes les conditions frontiére (en bas) nécessaires.

Exercice 3.10. *Calculer les probabilités de ruine $\psi_x, x \in \mathbb{N}$, pour une marche sur les nombres naturelles, avec la distribution de chaque pas donné par :* $\left\{p_1 = \frac{8}{10}, p_{-1} = \frac{1}{10}, p_{-2} = \frac{1}{10}\right\}$. *Montrer qu'elles sont positives.*

R : La moyenne est $m_1 = 1/2 > 0$. Les probabilités de ruine satisfont $\psi_x = \frac{8}{10}\psi_{x+1} + \frac{1}{10}\psi_{x-1} + \frac{1}{10}\psi_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine de

$$\frac{8}{10}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{10}\rho + \frac{1}{10} = (\rho - 1)(\frac{8}{10}\rho^2 - \frac{2}{10}\rho - \frac{1}{10}) = \frac{8}{10}(\rho - 1)(\rho - 1/2)(\rho + 1/4)$$

$\psi_x = A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(\frac{-1}{4})^x$ satisfait $\psi_0 = \psi_{-1} = 1$ ssi $A_1 = 5/6, A_2 = 1/6$. Les probabilités de ruine sont :

$$\psi_x = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}\right)^x \approx \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Exercice 3.11. *Calculer les probabilités de ruine pour une marche avec* $\left\{p_2 = \frac{3}{8}, p_1 = \frac{1}{8}, p_{-1} = \frac{1}{2}\right\}$

Une autre approche possible est par le théorème d'arret des martingales.

Examinons maintenant la méthode de fonctions génératrices (analogues à la transformée de Laplace), qui n'est pas réellement nécessaire pour la marche simple, mais qui est la méthode la plus puissante pour la resolution des èquations de differences (différentielles).

On ajoute les équations $\overline{\psi}_n = p\overline{\psi}_{n+1} + q\overline{\psi}_{n-1}$ multipliées respectivement par $z^n, n = 1, 2, ..$ On obtient ainsi une èquation pour la fonction $\overline{\psi}^*(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z^n \overline{\psi}_n$:

$$\overline{\psi}^*(z) = \frac{p\overline{\psi}_1}{\Phi(z) - 1}$$

où $\Phi(z) = Ez^{Z_1} = pz^{-1} + qz$

De lors,

$$\psi^*(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{zp\overline{\psi}_1}{p + qz^2 - z} = \frac{p - qz - pz\overline{\psi}_1}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p - qz - z(p-q)}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p}{p-qz}$$

car le numerator s'annule en 1 ("méthode du noyau") et donc $p\overline{\psi}_1 = p - q$.

De lors, $\psi_n = (q/p)^n$.

3.10 Le paradoxe du singe savant et les chaînes de Markov

"Donnons du temps au temps."

Avec suffisamment de temps, un chimpanzé qui tape au hasard sur le clavier d'une machine à écrire, produira sùrement (ac. proba 1) une copie de la pièce de théâtre Hamlet de Shakespeare.

Mais combien de temps faut-il attendre avant que ça arrive ? Voila une version allegée de cette question.

Exercice 3.12. *1. On considère une pièce non équilibrée que l'on lance un nombre indéterminé de fois. La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$, et la probabilité de sortir face est égale à $q = 1 - p$. Les lancers sont indépendants. On note N le temps d'attente du premier pile, c'est-à-dire le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir le premier pile, en incluant le pile ($N \in \{1, 2, ...\}$). Par exemple, si $X_1 = F, ...X_{j-1} = F$ et $X_j = P, j \geq 1$, la valeur de N est j.*

Dessinez l'arbre de toutes les possibilités pour cet expériment.

2. Calculez $p_k = P[N] = k, k = 0, ...$ Quelle est la loi de N ? Calculez le premier moment $m =$ EN.

3. *Formuler une équation pour le premier moment $m = EN$ par la méthode du conditionnement sur le premier pas, et la résoudre* § *.*
4. *Trouvez l'espérance $m_2 = EN_2$ du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient* **deux piles consécutives***, en incluant les deux derniers résultats.*

   Ind : Sauf m_2, il faudra trouver en même temps $m_1 = \mathrm{E_1 N^{(2)}}$ du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient deux piles consécutives, à partir du moment qu'on a obtenu la première.
5. *Généraliser pour $k = 3$ piles consécutives, et pour k arbitraire. Indication : On pourrait utiliser un processus de Markov qui retient l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu, et qui contient l'état final desiré, et tous ses prefixes.*
6. *Trouvez l'espérance $\widetilde{m}$ du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient* **pile-face-pile***, en incluant les trois derniers résultats.*
7. *(*) "Mieux que les moments :" Trouvez la fonction génératrice des probabilités $\phi_N^*(z) = \mathrm{Ez^N} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \mathrm{p_k z^k}$, et deduisez l'espérance* EN *(en calculant $\phi'(1)$), et aussi $m_2 = \mathrm{EN}^2$.*
8. *(*) Soit $k = 2$. Abordez les mêmes questions pour $\phi^*_{N^{(k)}}(z)$, ainsi que pour $\phi^*_{N^{(k)'}}(z)$, où la dernière variable représente le nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient k piles consécutives, en incluant la suite finale des piles.*

   Trouver les probabilités $P[N^{(2)} = k]$ pour $q = 1/3$.
9. *(*) Reabordez la question précédente pour $k = 3$.*

Solutions :

1. L'espace des expériments se décompose en : $E = \{P, FP, FFP, FFFP, ...\} = \{P\} \cup F(E)$. En representant l'espace comme un arbre, on trouve une branche avec une seule feuille $\{P\}$, et une branche qui est identique au arbre initial, après avoir enlevé la feuille initiale $\{F\}$. Rémarquons cette structure recursive, qui est la clé du pb !

   Les probas sont $p_k = pq^k, k = 0, 1, ...$ On a à faire avec une distribution bien connue (la géométrique ! !).
2. Il est quand même intéressant de remarquer que l'espérance peut aussi se calculer par un conditionnement sur le premier pas :

$$m = p \times 0 + q(1 + m) \Leftrightarrow m = \frac{q}{p} \text{ §}$$

   Note : Pour l'autre définition d'une variable g'eométrique $N^{(1)'} := N + 1 \in \{1, 2, ...\}$ (en incluant la première face), on obtient par le résultat précedent

$$n := EN^{(1)+1} = E(N + 1) = \frac{1}{p},$$

§. on utilise la relation $\mathcal{L}(N|X_1 = F) = \mathcal{L}(1 + N)$, qui est une conséquence de la décomposition "premier pas + le reste" $N = 1 + N'$ et du fait que les distributions conditionnées par le premier pas du "reste" N' sont connues : a) $(N'|X_1 = P) \equiv 0$ et b) $\mathcal{L}(N'|X_1 = F) = \mathcal{L}(N)$ par le fait que la seule difference entre les réalisations possibles de N' et ceux de N est le moment "de départ de la montre", qui n'affecte pas la distribution d'une chaîne homogène

§. Cela est une conséquence de la décomposition "premier pas + le reste"

$$N_1 = 1 + N'$$

et du fait que les distributions conditionnées par départ du "reste" sont connues : a) $(N'|X_1 = P) \equiv 0$ et b) $\mathcal{L}(N'|X_1 = F) = \mathcal{L}(N_1)$ par la proprieté de Markov (oubli du passé), et par le fait que la seule difference entre les réalisations possibles de N' et ceux de N_1 est le moment "de départ de la montre", qui n'affecte pas la distribution d'une chaîne avec matrice de transition stationnaire.

ou encore par conditionnement sur le premier pas :

$$\begin{aligned} n = \mathbb{E}[N^{(1)+1}] &= \mathbb{P}[X_1 = P]\mathbb{E}[N^{(1)+1}|\{X_1 = P\}] + \mathbb{P}[X_1 = F]\mathbb{E}[N^{(1)+1}|\{X_1 = F\}] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = P]1 + \mathbb{P}[X_1 = F](1 + \mathbb{E}[N^{(1)+1}]) = p * 1 + q * (1 + n) = 1 + q * n \end{aligned}$$

3. Méthode A : Cherchons encore une fois une décomposition de l'espace des expériments, en regardant simultanement l'arbre associé : $E = \{FPP, FFPP, ..., PFPP, PFFPP, ..., PP, \} = F(E) \cup PF(E) \cup \{PP\}$.
   Les trois événements $F(E), PF(E), PP$ fournissent une décomposition de l'espace d'états . Par conséquant, la formule ET donne :

   $$m_2 = q(m_2 + 1) + pq(m_2 + 2) + 2p^2 \Leftrightarrow m_2 = \frac{q + 2p}{1 - q - pq} = \frac{1 + p}{p^2}$$

   Méthode B : Après le premier pas, on a une décomposition

   $$E = F(E) \cup P(E_1)$$

   où on a dénoté E_1 l'arbre de toutes les expériments pour arriver a deux piles, en partant d'une pile.
   Cette décomposition donne $m_2 = q(1+m_2)+p(1+m_1)$. Finalement, la décomposition

   $$E_1 = F(E) \cup \{PP\}$$

   donne $m_1 = q(1 + m_2) + p(1 + 0)$
4. Remarquons que les quatre événements F, PF, PPF, PPP fournissent une décomposition de l'espace d'états qui permet soit de constater que notre événement d'arret est arrivé, soit de relancer le processus du debut. Le conditionnement ces événements donne : $n = q(n + 1) + pq(n + 2) + p^2q(n + 3) + 3p^2 \Leftrightarrow n = \frac{q(1+2p+3p^2)+3p^3}{p^3} = \frac{1+p+p^2}{p^3}$
   On devine que pour k piles consecutives, le résultat sera $\frac{1+p+p^2+p^{k-1}}{p^k}$.
   Méthode C : Alternativement, on peut utiliser une chaîne de Markov sur l'espace $\{0P, 1P, 2P, 3P\}$, avec état absorbant $3P$ ($X(t) = nP$ signifie ici que la suite observé au temps t contient exactement n piles à la fin. Pour illustrer, voila un exemple d'un expériment possible et de l'evolution associé pour la chaîne de Markov

   $$\begin{pmatrix} & P & F & F & P & F & P & P & P \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   Soit $Q = \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice des transitions entre les états transients $0, 1, 2$. Le vecteur $\boldsymbol{m}$ des trois espérances inconnues $\boldsymbol{m} = (x_0, x_1, x_2)$ satisfait $\boldsymbol{m} = \mathbf{1}+Q\boldsymbol{m} \implies \boldsymbol{m} = (I - Q)^{-1}\mathbf{1}$. La réponse est

   $$x_2 = \frac{1}{p^3}, x_1 = \frac{1 + p}{p^3}, x_0 = \frac{1 + p + p^2}{p^3}$$

5. La méthode des fonctions génératrices.

   Le calcul de Ez^N demande de remplaçer chaque terme de l'espace des expériments $E = \{P, FP, FFP, FFFP, ...\} = \{P\} \cup F(E)$ par $p^{nb.P} q^{nb.F} z^{nb.F+nb.P}$ (avec $nb.P = 1$). Soit $\phi(z)$ le résulat obtenu en ajoutant tous les termes. Observons qu'en rajoutant tous les termes avec $nb.H + nb.T = n$, on obtient precisement $p_n z^n$, et donc la somme totale est la fonction génératrice des probabiltés $\phi(z) = \sum_n p_n z^n$.

   En rajoutant tous les termes, utilisant la formule de p_n, on obtient $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{p}{1-qz}$.

   Mais, il est beaucoup plus efficace d'exploiter la structure recursive, qui implique la décomposition $\phi(z) = p + qzp(z)$, qui implique encore $\phi(z) = \frac{p}{1-qz}$.

   Finalement, $\mathrm{EN} = \phi'(1) = \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}}$.

   Rem : La méthode des **fonctions génératrices** (qui n'est pas vraiment nécessaire dans cet exercice simple) s'avère une des méthodes les plus puissantes pour les espaces d'états infinis.

6. Les probabilités p_k sont moins evidentes à obtenir. *Ind : Utilisons la chaîne de Markov associé sur l'espace* $E = \{0P, 1P, 2P\}$, *avec état absorbant* $2P$.

   $p_0 = p^2, p_1 = qp^2, p_2 = q^2p^2, p_3 = qp_2 + pqp_1, ...p_n = qp_{n-1} + pqp_{n-2}, \forall n \geq 3$. On trouve ainsi une récurrence à coefficients constants, qui donne $p_n = C_+ \lambda_+^n + C_- \lambda_-^n$, $\lambda_\pm = \frac{q \pm \sqrt{q(4-3q)}}{2}$. Le système $C_+ + C_- = p^2, C_+/\lambda_+ + C_-/\lambda_- = 0$ donne $C_+ = \frac{p^2(q-\lambda_-)}{\lambda_+ - \lambda_-}, C_+ = \frac{p^2(\lambda_+ - q)}{\lambda_+ - \lambda_-}$.

   On peut trouver la même réponse à partir de la mgf

$$\frac{p^2}{1 - qz - pqz^2} = \frac{C_+}{1 - z/\lambda_+} + \frac{C_-}{1 - z/\lambda_-}.$$

7. Utilisons la chaîne de Markov sur l'espace $\{0P, 1P, 2P, 3P\}$, avec état absorbant $3P$. Soit Q la matrice des transitions entre les états transients $0, 1, 2$. Le vecteur $\boldsymbol{\phi}$ des fonctions génératrices des moments satisfait $\boldsymbol{\phi}(z) = z(Q\boldsymbol{\phi}(z) + \boldsymbol{t})$.

   Rem : On peut aussi trouver une formule generale pour $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\phi}'(1)$. En différentiant le système, on trouve $\boldsymbol{\phi}'(z) - zQ\boldsymbol{\phi}'(z) = Q\boldsymbol{\phi}(z) + \boldsymbol{t} \Rightarrow (I - Q)\boldsymbol{\phi}'(1) = Q\mathbf{1} + \boldsymbol{t} = \mathbf{1}$.

Dans le chapitre 5 on vera une solution plus simple, qui nous permettra de calcluler l'espace d'états du temps pour qu'un chimpanzé qui tape au hasard produit le mot ABRACADABRA (et le pb. analogue pour produire Hamlet sera asigné en devoir maison).

Conclusion : Nous avons vue dans ces exercices une des idées les plus importantes de la modélisation Markovienne : **les espérances, vues comme fonctions de l'état initial, satisfont certaines équations qui font toujours intervenir un opérateur associé fixe, appelé générateur du processus, même que les conditions frontière, termes non homogènes, et d'autre "details" (comme la presence/absence d'une multiple de l'operateur identité) peuvent varier**.

Les equations s'obtient facilement par la méthode de conditionnement sur le premier pas, en utilisant la propriété de l'oubli du passé des processus de Markov ; mais, il y a des parties specifiques a chaque probléme, qui ne sont pas oubliées !

Il s'avère que les mêmes èquations décrivent la solution des problèmes analogues pour toutes les chaîne de Markov à espace d'états comptable, et avec des états absorbants – voir la prochaîne section.

Par exemple, pour les chaînes de Markov, l'operateur associé est $G = P - I$, où P est la matrice de transition, et pour le cas particulier d'une marche aléatoire $X_t = \sum_{i=1}^t Z_i$ avec $p_k = P[Z_i = k], k \in [-c, d]$ on a encore $G = P - I$, où $P = \sum_k p_k F^k$ et F est l'operateur de translation $(Ff)_k = f_{k+1}, k \in \mathbb{Z}$.

Alors, nous obtendrons des èquations similaires pour les problèmes respectives, juste en remplaçant l'ancien operateur par le nouveau.

On rencontre la même situation pour toute la classe des processus "de Markov", X_t, différents qu'elles soient, vivant sur des espaces S considerablement plus compliqués, la seule difference étant que l'operateur $G_X : F(S)- > F(S)$ associé a ces processus sera plus compliqué !

Par exemple, les problèmes de cette section ont aussi des versions à espace d'états continu, obtenu en considérant des marches avec incréments infinitésimaux ϵ, et en prenant la limite $\mathbb{E} \to 0$. La marche aléatoire devient ainsi un processus avec chemins continus, appelé mouvement Brownien. Les équations resterons les mêmes, seul l'operateur G changera (dans un operateur différentiel).

En conclusions, il existe une correspondance un á un entre les processus de Markov et une certaine classe des operateurs deterministes associés ; nous l'appellerons "Le Dictionnaire".

Chapitre 4

Récurrences et équations différentielles linéaires

L'étude des marches aléatoires et des processus Markoviens ramène souvent à des équations différentielles ou des récurrences linéaires. Le cas des coefficients constants est assez simple, car toutes les solutions peuvent être construites à partir des solutions basiques exponentielles e^{rx}. Comme le cas des équations différentielles à coefficients constants est très bien connu, on rappelle ici seulement le cas de récurrences linéaires.

4.1 L'équation de récurrence linéaire à coefficients constants

Les deux équations de récurrence linéaire de deuxième ordre ci-dessous

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0, \tag{4.1}$$

$$av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = d_n, \tag{4.2}$$

sont appelées **homogène** et **nonhomogène** respectivement.

L'équation homogène

Si les coefficients a, b et c sont constants, on sait qu'ils existent des solutions de la forme $u_n = x^n$ pour tout n (fonctions exponentielles). Pour trouver x on remplace x^n en (4.1) et on trouve que x doit satisfaire **l'équation auxiliaire** :

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{4.3}$$

Soient x_1 et x_2 les deux racines de l'équation de deuxième degré (4.3). On en déduit que la solution *générale* de (4.1) est toujours de la forme

1. Si $x_1 \neq x_2$
$$u_n = Ax_1^n + Bx_2^n,$$

2. Si $x_1 = x_2$,
$$u_n = Ax_1^n + Bnx_1^n,$$

   avec des constantes A et B.

Dans les deux cas A et B doivent être déterminées à partir des conditions supplémentaires sur la frontière.

L'équation nonhomogène

La résolution du problème nonhomogène (4.2) comporte quatre pas :

1. Trouver une base pour l'espace vectoriel des solutions de l'équation auxiliaire homogène (4.1), et donc la solution générale u_n pour cette équation.
2. Déterminer une solution particulière de (4.2), par exemple en utilisant une expression «essai» $\widetilde{v}_n$ qui a la même forme générale que le membre droit d_n,, mais des coefficients non déterminés. Par exemple, si d_n est un polynôme d'ordre k, on essaie un polynôme général d'ordre k.
3. Néanmoins, si votre expression d'essai a des termes qui sont inclus dans l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène obtenue au pas 1 (et donc qui vont être annihilés par l'opérateur des différences), il faut multiplier l'expression d'essai par $n, n^2, ...$ jusqu'à ce qu'il n'y a plus des termes inclus dans cet'espace .
4. Après la décision de la forme d'essai, on trouve les valeurs des coefficients de $\widetilde{v}_n$ à partir de (4.2), par la méthode des coefficients non déterminés.
5. La solution générale de (4.2) est de la forme $v_n = \widetilde{v}_n + u_n$. On trouve finalement les coefficients encore non déterminés en u_n, en utilisant les conditions sur la frontière pour v_n.

Exemple 4.1. *On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in N}$ qui vérifient la relation suivante :*

$$(R) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + \frac{3}{2}u_{n+1} - u_n = 0.$$

1. *Rechercher les suites géométriques qui vérifient cette relation (R).*
2. *On note r_1 et r_2 leurs raisons et on admet que E est un espace vectoriel de dimension 2, c.-à-d. toute suite de E s'écrit sous la forme*

   $$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Soit (a_n) la suite de E qui vérifie $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Calculer a_n.

Exemple 4.2. *On considère l'ensemble E' des suites (v_n) qui vérifient la relation :*

$$(R') \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} + \frac{3}{2}v_{n+1} - v_n = 4n + 1.$$

1. *On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = an + b$. Déterminer a et b pour que (u_n) soit une solution particulière de (R').*
2. *Soit (v_n) une suite de E'.*
   (a) *Pour toute suite (t_n) de E' on définit la suite (u_n) par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n - t_n$. Vérifier que $(u_n) \in E$.*
   (b) *En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + an + b$.*
   (c) *Déterminer v_n pour $v_0 = -\frac{5}{9}$ et $v_1 = -\frac{26}{9}$.*

Exemple 4.3. *Obtenez les formules analytiques des suites décrites par les relations de récurrence ci-dessous, et vérifiez-les en utilisant les premiers termes de la suite t_2, t_3.*

1. $t_i = 2t_{i-1} + i - 1, \quad t_0 = 0$

2. $t_i = 2t_{i-1} + 5 \cdot 2^i, \quad t_0 = 0$
3. $t_i = 3t_{i-1} - 2t_{i-2} + 2,\ t_0 = 0, t_1 = 2$
4. $t_i = 2t_{i-1} - t_{i-2} + 2,\ t_0 = 0, t_1 = 2$

Solution :

1. C'est une équation nonhomogène, alors nous aurons :

$$t_i = \widetilde{t}_i + A2^i,\ \ \widetilde{t}_i = c_1 i + c_2 \ \text{ avec }\ c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{array}{rcl} c_1 & = & 2c_1 + 1 \quad \text{et}\ \ c_1 = -1 \\ c_2 & = & -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et}\ \ c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \widetilde{t}_i & = & -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 & = & = 0 = -1 + A \quad \text{et}\ \ A = 1 \\ t_i & = & -i - 1 + 2^i \end{array}$$

2. C'est une équation nonhomogène, alors :

$$t_i = \widetilde{t}_i + A2^i,\ \ \widetilde{t}_i = ci2^i \ \text{ avec }\ ci2^i = 2(c[i-1]2^i/2) + 52^i$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{array}{rcl} c & = & 5, \quad t_i = 5i2^i + A2^i \quad \text{et finalement,} \\ t_0 & = & = 0 = A \quad \text{et}\ \ A = 0 \\ t_i & = & 5i2^i \end{array}$$

3. C'est une équation de différences nonhomogène et l'équation quadratique attachée a les racines $1, 2$, alors nous aurons :

$$t_i = \widetilde{t}_i + A_1 2^i + A_2,\ \ \widetilde{t}_i = ci \ \text{ avec }\ ci = 3(ci - c) - 2(ci - 2c) + 2$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{array}{rcl} c & = & -2 \quad \text{et}\ \ c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \widetilde{t}_i & = & -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 & = & = 0 = -1 + A \quad \text{et}\ \ A = 1 \\ t_i & = & -i - 1 + 2^i \end{array}$$

4. C'est une équation de différences nonhomogène dont les racines de l'équation quadratique attachée sont confondues égales à 1 donc nous aurons :

$$t_i = \widetilde{t}_i + A_1 + A_2 i,\ \ \widetilde{t}_i = c_1 i + c_2 \ \text{ avec }\ c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{array}{rcl} c_1 & = & 2c_1 + 1 \quad \text{et}\ \ c_1 = -1 \\ c_2 & = & -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et}\ \ c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \widetilde{t}_i & = & -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 & = & = 0 = -1 + A \quad \text{et}\ \ A = 1 \\ t_i & = & -i - 1 + 2^i \end{array}$$

4.2 La méthode des fonctions génératrices

Exercice 4.1. *Calculez, par la méthode des fonctions génératrices : a)* $T(z) = \sum_{n\geq 0} T_n z^n$, *où*

$$T_0 = 0, \quad T_n = 2T_{n-1} + 1, n \geq 1$$

Trouvez T_n*. b) Calculez* $T(z) = \sum_{n\geq 0} T_n z^n$*, où*

$$T_0 = 1, \quad T_n = 2T_{n-1} + n - 1, n \geq 1$$

Trouvez T_n*.*

Sol : b) Par la méthode de décomposition des équations linéaires : $T_n = 2^{n+1} - (n+1)$. La fonction génératrice de T_n est $T(z) = 2/(1-2z) - 1/(1-z)^2 = (2z^2-2z+1)/(1-2z)(1-z)^2$. En appliquant directement la méthode des fonctions génératrices à $T_n = 2T_{n-1} + n - 1$ on trouve l'équation : $T(z) = 1 + 2zT(z) + z/(1-z)^2 - (1/(1-z) - 1) = 2zT(z) + (2z^2 - 2z + 1)/(1-z)^2$, et on retrouve la même réponse. L'avantage de cette méthode plus compliquée est qu'elle réussit parfois quand la première méthode échoue.

Exercice 4.2. *a) Obtenez une formule explicite pour la suite décrite par la relation de récurrence ci-dessous (et vérifiez-la en utilisant les premiers termes de la suite)*

$$T_n = 4T_{n-1} - 3T_{n-2} + n, n \geq 1, \quad T_0 = a, T_{-1} = 0 \tag{4.4}$$

b) Calculez la fonction génératrice $T(z) = \sum_{n\geq 0} T_n z^n$ *c) (*) Obtenez la fonction génératrice* $T(z)$ *directement, en appliquant la méthode des fonctions génératrices à l'équation* (4.4)*.*

Sol : a)

$$(a + 3/4)\, 3^n - \frac{1}{4}(3 + 2n)$$

$$\frac{a + 3/4}{1 - 3z} - \frac{1/4}{1 - z} - \frac{1/2}{(z-1)^2} = \frac{a(z-1)^2 + z}{(z-1)^2(3z-1)}$$

Exercice 4.3.
a) Obtenez une formule explicite pour la suite décrite par la relation de récurrence ci-dessous (et vérifiez-la en utilisant les premiers termes de la suite)

$$T_n = 2T_{n-1} - T_{n-2} + 2, n \geq 2, \quad T_0 = T_1 = 0 \tag{4.5}$$

b) Calculez la fonction génératrice $T(z) = \sum_{n\geq 0} T_n z^n$ *c) Obtenez la fonction génératrice* $T(z)$ *directement, en appliquant la méthode des fonctions génératrices à l'équation* (4.5)

Exercice 4.4. *a) Obtenez la fonction génératrice* $T(z) = \sum_{n\geq 0} T_n z^n$ *pour la récurrence*

$$T_n = \lambda T_{n-1} + \lambda_2 T_{n-2}, n \geq 2, \quad T_0 = 1, T_1 = \lambda T_0 \tag{4.6}$$

b) Calculez (directement, ou par développement limité) les premiers termes, et vérifiez qu'ils sont des combinaisons linéaires de puissances des racines caractéristiques.

Exercice 4.5. *a) Obtenez une formule explicite pour la suite décrite par la relation de récurrence ci-dessous (et vérifiez-la en utilisant les premiers termes de la suite)*

$$T_n = 4T_{n-1} - 3T_{n-2} + 2, n \geq 2, \quad T_0 = T_1 = 0 \tag{4.7}$$

b) Calculez la fonction génératrice $T(z) = \sum_{n\geq 0} T_n z^n$ *c) (*) Obtenez la fonction génératrice* $T(z)$ *directement, en appliquant la méthode des fonctions génératrices à l'équation* (4.8)*.*

Solution :

1. a)

$$T_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) - n$$

b)

$$T(z) = \frac{1}{2(1-3z)} - \frac{1}{2(1-z)} - \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{2(1-3z)} + \frac{1}{2(1-z)} - \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{2z^2}{(1-z)^2(1-3z)}$$

La dernière expression peut être obtenue directement, à partir de la récurrence.

Exercice 4.6. *a) Obtenez une formule explicite pour la suite décrite par la relation de récurrence ci-dessous (et vérifiez-la en utilisant les premiers termes de la suite)*

$$T_n = 4T_{n-1} - 3T_{n-2} + n, n \geq 1, \quad T_0 = a, T_{-1} = 0 \tag{4.8}$$

b) Calculez la fonction génératrice $T(z) = \sum_{n \geq 0} T_n z^n$ *c) (*) Obtenez la fonction génératrice* $T(z)$ *directement, en appliquant la méthode des fonctions génératrices à l'équation* (4.8).

Solution : a)

$$(a + 3/4)\, 3^n - \frac{1}{4}\left(3 + 2n\right)$$

b)

$$\frac{a + 3/4}{1 - 3z} - \frac{1/4}{1 - z} - \frac{1/2}{(z-1)^2} = \frac{a(z-1)^2 + z}{(z-1)^2(3z-1)}$$

Chapitre 5

Martingales I

5.1 Définition

Les martingales sont une famille des processus stochastiques qui a emergée récemment. Une motivation a été de généraliser le concept de jeux juste/équitable (comme le pile ou face), mais d'autres applications dans plusieurs branches des probabilités ont été trouvé également. Un résultat important est le théorème de Doob, qui nous assure que dans la plupart des jeux équitables qui peuvent finir en succes ou en désastre, la somme des espérances de ces deux résultats est 0. Le terme martingale par contre désignait à l'origine une stratégie de doubler les mises, permettant de gagner à coup sùr, donc une façon de jouer pour la quelle le théorème de Doob ne s'applique pas.

Soit $X_n, n \in \mathbb{N}$, une suite des variables qui représente la fortune d'un joueur au temps n, et soit $Z_n = X_n - X_{n-1}$ le gain du jeu n. Alors,

$$X_n = X_{n-1} + Z_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

Si Z_i sont i.i.d., alors on est dans le cadre des probabilités classiques (marches aléatoires), mais justement les martingales généralisent ce cadre considérablement.

Premièrement, on permet aux Z_n de dépendre sur ≪l'information du passé≫

$$\mathcal{F}_{n-1} := \sigma(Z_1, Z_2, ..., Z_{n-1})$$

(en particulier, les "mises" risqué au temps n peuvent dependre de l'histoire). On arrive aussi a des X_n qui ne sont plus des marches aléatoires.

Deuxièmement, on permet aux tribus/informations possibles $\mathcal{F}_n$ au temps n d'être plus larges que $\sigma(Z_1, Z_2, ..., Z_n) = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$. Cela permet la presence d'"inside information" qui ne peut pas être déduite par l'étude des observations.

Le cadre sera finalement un espace probabilisé **filtré** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$, où

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 ... \subset \mathcal{F}_n ... \subset \mathcal{F}$$

est une **filtration** de $\mathcal{F}$.

Un jeu est caractérisé finalement par une paire $(X_n \in \mathcal{F}_n)$, et il est appelé martingale (ou jeu juste) si

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n, \forall n.$$

Résumons les définitions de base de la théorie des martingales.

Définition 5.1. *Une* **filtration** *est une suite croissante (au sens de l'inclusion)* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{A}$*, où* $\mathcal{T}$ *est un ensemble ordonné (muni d'une relation d'ordre).*

Définition 5.2. *Un processus* $X(t)$ *est dit* **adapté** *à une filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si* $X(t)$ *est* $(\mathcal{F}_t)$*-mesurable pour chaque* t*. La notation est* $X(t) \in \mathcal{F}_t$*.*

Définition 5.3. *Un jeu est une paire formée par une filtration* $\mathcal{F}_t$ *et par une suite des variable aléatoire* $X(t) \in \mathcal{F}_t$*.*

Intuitivement, les tribus $\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}$ modélisent «'l'évolution de l'information»' disponible jusqu'au temps t (pensez par exemple à l'information accumulée pendant les étapes d'un jeu de poker Texas hold'em), et $X(t)$ représentent la valeur d'un jeu, comme perçue au temps t.

Nous allons introduire maintenant trois catégories des processus stochastiques, l'importance desquelles peut être comparée à celles des fonctions constantes, croissantes et décroissantes, dans le calcul déterministe.

Définition 5.4. *Une suite des variable aléatoire* $X(t) \in \mathcal{F}_t, X(t) \in L_1(dP)$ *est appelée*

martingale/sur-martingale/ sous-martingale

$$\textit{ssi} \quad \mathrm{E}[\mathrm{X}_{\mathrm{t}'}/\mathcal{F}_{\mathrm{t}}] \begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases} \mathrm{X(t)}, \quad \textit{quand } \mathrm{t}' > \mathrm{t}.$$

Exemple 5.1. Martingales en temps discret. *Soit* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, intégrables, indépendantes et centrées. Pour tout* n *de* $\mathbb{N}$ *, la suite de tribus :* $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, ..., Y_n)$ *est une filtration. Une suite* $(X_n) \in (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *,* $n \in \mathbb{N}$ *de variables aléatoires réelles intégrables est une martingale en temps discret par rapport à* $(\mathcal{F}_n)$ *si elle vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n.$$

5.2 Exemples

Exemple 5.2. Martingale additive=Somme de variables aléatoires indépendantes de moyenne 0. *Si* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes et* **centrées***, alors la suite des sommes :*

$$X_n = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$$

est une martingale «additive» par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, ..., Y_n)$*.*

Si les Y_i *ne sont pas centrées, mais de moyenne* a *alors* $X_n - na$ *est une martingale.*

Exemple 5.3. Martingale multiplicative=Produit de variables aléatoires indépendantes de moyenne 1. *Si* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes avec moyennes* 1*, alors la suite des produits :*

$$X_n = Y_0 \times Y_1 \times \cdots \times Y_n = \prod_{k=0}^{n} Y_k$$

est une martingale «multiplicative» par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, ..., Y_n)$. *En effet, prenant espérance conditionnelle de la formule récursive* $X_{t+1} = X(t)Y_{t+1}$ *donne :*

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \mathrm{E}[\mathrm{X}_t \mathrm{Y}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \mathrm{X}(t)\mathrm{E}\mathrm{Y}_{t+1} = \mathrm{X}(t)$$

Là aussi, dans le cas où les Y_i *ne sont pas de moyenne* 1 *mais de moyenne* $a \neq 0$, *on considérera* $X_n = a^{-n} \prod_{k=0}^{n} Y_k$.

Les propriétés dans les exercices suivantes sont vrais pour tous les martingales. On peut quand-même se "clarifier les idées" en les abordant d'abord dans les cadre additif (des marches aléatoires).

Exercice 5.1. *a) Montrer que les martingales ont espérance constante, i.e.*

$$E[X_{n+1}] = E[X_n] = ... = E[X_1] = E[X_0],$$

et que les différences de martingales $Z_i = X_i - X_{i-1}$ *ont espérance* 0.

b) Montrer que pour une martingale :

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_0] = E[X_n|\mathcal{F}_0] = ... = E[X_1|\mathcal{F}_0] = X_0.$$

Interprétation : Un jeu «juste» doit satisfaire que $\mathrm{EZ_i} = 0$. Alors, par la decomposition $X(t) = X_0 + \sum_{i=1}^{t} Z_i$, il est évident que $\mathrm{EX(t)} = \mathrm{EX_0}, \forall \mathrm{t}$.

Exercice 5.2. *a) Montrer qu'une martingale additive ou multiplicative* **en temps discret** X_n *(satisfaisant* $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$*)) satisfait aussi :*

$$E[X_{n+k}|\mathcal{F}_n] = X_n, \forall k \geq 0,$$

où $F_n = \sigma(X_1, \ldots X_n)$ *est l'information au temps n.*

b) Montrer que la même conclusion est vraie pour chaque martingale **en temps discret**.

Sol : a) Ce cas est très facile, car pour les martingales additives et multiplicatives, les espérances conditionnelles se réduisent a des espérances non conditionnelles. En effet

$$\begin{aligned} E[X_{k+n}|\mathcal{F}_n] &= E[X_n + \sum_{i=1}^{k} Z_{n+i}|\mathcal{F}_n] \\ &= X_n + E[\sum_{i=1}^{k} Z_{n+i}] = X_n \end{aligned}$$

Le cas des martingales multiplicatifs est similaire.

b) On a besoin de la loi ET généralisé (prop. (8))

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[\mathrm{X}|\mathcal{B}]|\mathcal{C}] = \mathrm{E}[\mathrm{X}|\mathcal{C}] \text{ si} \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \tag{5.1}$$

Pour $k = 2$ par exemple :

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}_{t+2}|\mathcal{F}_t] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[\mathrm{X}_{t+2}|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t] = \mathrm{E}[\mathrm{X}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \mathrm{X}(t)$$

Alternativement, on peut utiliser l'idée de la démo du cas additif, car on peut toujours décomposer une martingale comme une somme des «différences de martingale» Z_i :

$$X_{t+k} = X(t) + \sum_{i=1}^{k} Z_{t+i},$$

tq $X(t) \in \mathcal{F}_t \Longrightarrow Z_t \in \mathcal{F}_t$, et $\mathrm{E[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t = 0}$. Prenant espérance conditionnelle :

$$E[X_{t+k}|\mathcal{F}_t] = E[X(t) + \sum_{i=1}^{k} Z_{t+i}|\mathcal{F}_t]$$

et il nous reste à montrer $E[Z_{t+i}|\mathcal{F}_t] = 0, \forall i \geq 2$. On procède par récurrence. Pour obtenir le résultat pour $j+1$, on conditionne sur l'information supplémentaire au temps $t+j$ $E[Z_{t+j+1}|\mathcal{F}_t] = E\ E[Z_{t+j+1}/\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_{t+j}]] = E[E[Z_{t+j+1}|\mathcal{F}_{t+j}]|\mathcal{F}_t] = E[0] = 0$ ■

Exercice 5.3. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
a) Soient m et n deux entiers positifs tels que $m < n$, calculer $E\left[(X_{m+1} - X_m)(X_{n+1} - X_n)\right]$.
b) Calculer $Var(X_n)/$

R :

$$E\left[X_m\left(X_{n+1} - X_n\right)\right] = E\left[E\left(X_m(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_m\right]\right] = E\left[X_m E\left((X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_m\right]\right]$$
$$= E\left[X_m(X_m - X_m) = 0\right].$$

Pareillement,

$$E\left[X_{m+1}\left(X_{n+1} - X_n\right)\right] = E\left[E\left(X_{m+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_{m+1}\right]\right] = E\left[X_{m+1} E\left((X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_{m+1}\right)\right]$$
$$= E\left[X_{m+1}(X_{m+1} - X_{m+1}) = 0,\right]$$

car $n \geq m+1$. En conclusion, les différences de martingale sont noncorrélés.

Exercice 5.4. *Accumulation des données sur une va ζ (filtrage)*
On se donne $\zeta \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ et une filtration $(\mathcal{F}_n)_n, \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$\mathbb{E}(\zeta|\mathcal{F}_n) = \zeta_n, n \geq 0.$$

Montrer que ζ_n est une martingale. Calculer ζ_n si $\zeta(x) = f(x), x \in [0,1]$, si $\mathcal{F}_n$ est la tribue engendrée par $\{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}), k = 0, ..., 2^n - 1\}$.

Exercice 5.5. *Soit $X_{n+1} = \begin{cases}\beta X_n + \alpha & a.p. \quad X_n \\ \beta X_n & a.p. \quad 1 - X_n\end{cases}$, où $X_0, \alpha, \beta \geq 0, \alpha+\beta \leq 1$. Montrer que X_n est toujours une surmartingale et une martingale dans le cas $\alpha + \beta = 1$.*

R : Ecrivons $X_{n+1} = \beta X_n + \alpha B_{n+1}, n \geq 0, X_0 = x$ où $B_n, n \geq 1$ sont des v.a. i.i.d. avec loi de Bernoulli $B(p)$, avec $p = X_n$. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(B_1, B_2, ..., B_n) = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$. Alors,
$\mathrm{E[X_{n+1}|X_n] = \beta X_n + \alpha X_n = (\beta + \alpha) X_n}$ [§] .

§. Il est interessant de investiguer la convergence de X_n dans les cas $\alpha + \beta < 1$ et $\alpha + \beta = 1$.

5.3 Théorème de Doob

Nous allons presenter maintenant une des applications les plus importantes des martingales, inspirée par la théorie des jeux.

Question 2. *Nous venons de voir dans l'exercice 5.1 qu'un joueur qui s'arrête a un temps fixe ne peut pas améliorer l'espérance de ses gains cumulés juste en variant les mises Z_i, tant que* $\mathrm{EZ_i} = 0$. *Il se pose alors la question si des mises plus sophistiquées, conditionnées par le passé, ou d'autres* **stratégies d'arrêt** T, *par exemple* $T = min(T_L, T_K)$, *peuvent améliorer ses chances. Mais, cf. le problème de la ruine du joueur concernant la marche symmétrique simple, on sait que le temps d'arrêt* $T = min(T_L, T_K)$ *ne peut améliorer l'espace d'états des gains futurs non-plus.*

La reponse est fourni par le théorème d'arrêt de Doob, qui, dans sa version "abregée", nous assure que la relation

$$E[S_T] = S_0$$

reste vraie encore pour des temps d'arrêt T aléatoires arbitraires, mais «raisonnables» (ayant par exemple espérance finie, ou qui assurent des pertes cumulées bornées). C'est une des applications les plus importantes des martingales.

Exercice 5.6. *Soit* $X(t)$ *les gains d'un joueur qui mise* $Y_i = \pm 1$, *avec* $p_i = q_i = \frac{1}{2}$, *dans les limites* $[L, K]$. *Calculer, en supposant que le théorème d'arret des martingales est applicable : a)* **l'espérance des gains** $v(x) = \mathrm{E_x X_T}$ *b) la* **probabilité de gagner** $p(x) = P_x[X_T = B]$.

Sol : a) L'application du théorème d'arret a la martingale $X(t)$ donne

$$v(x) = \mathrm{E_x X_T = X_0 = x}$$

b)

$$\mathrm{E_x X_T = E_x X_0 = x = K\ \mathbb{P}_x\{X_T = K\} + L\ (1 - \mathbb{P}_x\{X_T = K\}) = x},$$

et donc

$$p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\} = \frac{(x-L)}{(K-L)}.$$

Remarque 5.1. *Comme il n'existe pas des conditions nécessaires et suffisantes simples qui assurent la validité du théorème d'arrêt des martingales, nous donnons ci-dessous une réunion des plusieurs conditions suffisantes alternatives intéressantes, prises des livres de Williams, Grimmett et Ross.*

Théorème 5.1. *(***Théorème d'arrêt des martingales***) Si* $S_t, t \geq 0$ *est une martingale par rapport à une filtration* $\mathcal{F}_n$, $Z_t = S_t - S_{t-1}, t \geq 1$ *sont les différences de martingale, et* T *est un temps d'arrêt* ($\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$)*, alors*

$$\mathrm{E[S_T|\mathcal{F}_0] = ES_0}$$

dans chacun des cas suivants :

1. $T \leq N$, *où* $N \in \mathbb{N}$ *est une constante.*
2. $$\mathrm{ET} < \infty, \quad \begin{cases} \max_{\{1<t<T\}} |Z_t| \leq C, & ou \\ \max_{\{1<t<T\}} \mathrm{E[|Z_t|\mathcal{F}_{t-1}] \leq C} \end{cases}$$

   où C *est une constante.*

3.

$$P[T<\infty]=1 \Leftrightarrow P[T=\infty]=0, \quad \begin{cases} \max_{\{1<t<T\}}|S_t| \le C, & ou \\ \mathrm{E}|\mathrm{S_T}|<\infty,\ \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\mathrm{E}[\mathrm{S_n}\mathbb{1}_{\mathrm{T>n}}]=0 \end{cases}$$

où C est une constante.

Remarque 5.2. *Les trois cas sont rangés dans ordre croissante des demandes sur S_t, et diminuante sur T.*

Brévement, le premier cas demande de limiter la durée du jeu, et les autres cas illustrent le fait que c'est en fait le couple (T, S_T) qui doit etre "raisonnable ensemble". Aussi, le dernièr cas a) demande de limiter les pertes, et le deuxième cas a) demande de limiter les mises.

Exercice 5.7. *Comment peut on justifier l'application du théorème d'arret des martingales dans l'exercice 5.6 ?*

Sol : L'application pourrait etre justifié par les cas 2) ou 3) du théorème d'arret. En effet, les valeurs sont évidemment bornées, et les les gains aussi, car $|X(t)| \le |L| + K$.

Par contre, les conditions $\mathrm{E_x T} < \infty$ ou $\mathbb{P}[T < \infty] = 1$ demandent plus de travail. Mais, quand on a une chaîne de Markov avec espace d'états fini, nous pouvons profiter d'un théorème (de Perron-Frobenius) qui garanti que ces conditions sont satisfaites.

Plus precisement, la théorie des chaînes de Markov finies absorbés nous fournit la formule $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, ...) = (-Q)\mathbf{1}$, où Q est la matrice des taux de passage entre les états transitoires, qui est sous-stochastiques et inversible, ce qui implique $t_x < \infty, \forall x$.

Un **calcul direct** est aussi possible. Pour la marche aléatoire symmétrique, l'équation des différences obtenue par conditionnement sur le premier pas est :

$$t_x = 1 + \frac{1}{2}t_{x+1} + \frac{1}{2}t_{x-1}, t_L = 0, t_K = 0.$$

En resolvant, on obtient facilement

$$t_x = \mathrm{E_x[T] = (K - x)(x - L)} < \infty.$$

Pour resumer, nous allons appeller tout ça la théorie de **Perron Frobenius**.

Finalement, si on n'est pas satisfait de citer Perron-Frobenius, on offre parfois des **astuces** : des solutions probabilistes directes. Notons par contre que ces solutions, bien que intéressantes conceptuellement, demandent beaucoup plus d'effort que l'apprentissage des chaînes de Markov !

Exercice 5.8. *Démontrer* **l'identité de Wald**. *Soit $Z_n, n \ge 1$ une suite iid tel que Z_1 soit intégrable et soit T un temps d'arrêt pour la filtration associée à $Z_n, n \ge 1$, satisfaisant* $\mathrm{ET} < \infty$*, et soit $S_n = Z_1 + ... + Z_n$. Alors*

$$E[S_T] = E[T]E[Z_1].$$

Exercice 5.9. Le modèle Wright-Fisher *Il s'agît de modéliser l'évolution de la fréquence d'une gène A dans une population de taille finie N. On suppose que le nombre X_{n+1} des gènes A au moment $n+1$ a la loi $Bin_{N,p_{X_n}}$ où $p_x = \frac{x}{N}$, si $X_n = x$. Ainsi :*

$$p_{ij} := P[X_{n+1} = j | X_n = i] = \binom{N}{j} p_i^j (1 - p_i)^{N-j}$$

Montrer que :

1. *X_n est une martingale.*
2. *On observe "une population Wright-Fischer" jusqu'au moment $T = \min(T_0, T_N)$. Quelle est la probabilité f_i que la fréquence espéré de la gene speciale sera finalement 1 ?*

Sol : a) $\mathrm{E[X_{n+1}/X_n] = Np_{X_n} = X_n}$. b) $f_i = \frac{i}{N}$. Comme dans l'exemple précedént, l'application du théorème d'arret peut etre justifié par les cas 2) ou 3). La seule différence est que $E_x T$ n'est pas facile a obtenir, car le conditionnement sur le premier pas ramène à une équation de différences avec N termes ! On est donc obligé de citer Perron-Frobenius.

Remarque 5.3. *Brevement, l'avantage des martingales pour la resolution des problèmes de premier passage pour des processus Markoviens X_t est qu'une fois une martingale $M_t = f(X_t)$ a été trouvé, on n'a pas plus besoin de suivre l'evolution du processus pas après pas ;il suffit de regarder au debut et à la fin.*

5.4 Exercices

1. a) Montrer que $X_n = \prod_{i=1}^n Z_i$, où Z_i sont i.i.d. et prennent les valeurs 2 et 0 avec probabilités égales, est une martingale, par rapport à $\sigma(Z_1, ..., Z_n)$. b) Est-ce que le théorème d'arrêt des martingales est applicable à X_n, arrêtée au temps d'atteinte T_0 ?

   R : We check first that X_n is a multiplicative martingale (since $\mathrm{EZ_1} = 1$). Le théorème d'arret des martingales $\mathrm{E_x S_{T_0} = x = 1}$ applied to the stopping time T_0 (without checking the conditions) would yield here a wrong conclusion, that $1 = 0$. Of course, none of the alternative conditions provided for the theorem holds here. For example, condition (2) (which is the most widely applicable) does not hold since a martingale which may double its value an arbitrary number of time does not have bounded increments. **Note :** This exercise is similar to the martingale doubling strategy.
2. Soit Z_i une suite des va tq $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ est une martingale. Démontrer que a) $\mathrm{EZ_i} = 0$. b) Ces variables sont noncorrélés. c) $Var(S_n) = \sum Var(Z_i)$
3. **Le temps d'atteinte esperé $t(x) = \mathrm{E_x T}$, pour la marche aléatoire simple, symmétrique** $S_n = Z_1 + ... + Z_n$. Comme la martingale du cas asymmétrique ne marche pas ici, on utilisera la martingale :

   $$M_n = S_n^2 - n.$$

   a) Montrez que M_n est une martingale par rapport à $\sigma(Z_1, ..., Z_n)$.

   b) Montrez que si le théorème d'arrêt des martingales est applicable sur l'interval $[L, K]$, alors :

   $$t_x = E_x[min(T_L, T_K)] = (K - x)(x - L), \tag{5.2}$$

   i.e. l'espace d'états du temps d'atteinte de $\{L, K\}$ est le produit des distances du capital initial x aux bords de l'interval.

   c) Comment justifier l'application du théorème d'arrêt des martingales ?
4. Montrer que pour un joueur qui joue «la martingale»

   $$\mathrm{ES_{T-1}} = -\infty$$

   Ind : Calculer la loi de S_{T-1}.

Solutions :

1. We check first that X_n is a multiplicative martingale (since $\mathrm{EZ_1 = 1}$). Le théorème d'arrêt des martingales $\mathrm{E_x S_{T_0} = x = 1}$ applied to the stopping time T_0 (without checking the conditions) would yield here a wrong conclusion, that $1 = 0$.

   Of course, none of the alternative conditions provided for the theorem holds here. For example, condition (2) (which is the most widely applicable) does not hold since a martingale which may double its value an arbitrary number of time does not have bounded increments.

   Note : This exercise is similar to the martingale doubling strategy.
2. The case of additive martingales (when the increments are independent) is easy. For the general case, use $EZ_n\ S_{n-1}) = E[Z_n\ S_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1}E[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$.
3. L'identité de Wald est une conséquence immédiate du théorème d'arrêt des martingales, cas 4).
4. a) To show that M_n is indeed a martingale we obtain first a formula for its increments : $M_{n+1} - M_n = (S_n + Z_{n+1})^2 - n - 1 - (X_n^2 - n) = 2Z_{n+1}X_n + Z_{n+1}^2 - 1 = 2Z_{n+1}X_n$. We check now the conditional expectation of the increments.

   $$E[M_{n+1} - M_n|F_n] = E[2Z_{n+1}X_n|F_n] = 2X_nE[Z_{n+1}|F_n] = 0.$$

   b) We apply now the Optional Stopping Theorem to the martingale $M_n = X_n^2 - n$. The Optional Stopping Theorem yields :

   $$\mathrm{E_x M_T = E_x(X_T^2 - T) = X_0^2 = x^2} \tag{5.3}$$

   Conditioning on the last state we get

   $$\mathrm{E_x(X_T^2 - T) = K^2\mathbb{P}\{X_T = K\} + L^2\mathbb{P}\{X_T = L\} - E_x T}. \tag{5.4}$$

   The probabilities of winning/losing for the martingale X_T were found before to be

   $$P[X_T = K] = \frac{x - L}{K - L}, \quad P[X_T = L] = \frac{K - x}{K - L}$$

   Plugging these in (7.4) gives

   $$K^2\frac{x - L}{K - L} + L^2\frac{K - x}{K - L} - E_xT = x^2$$

   which after simplifying yields

   $$t_x = E_x[min(T_L, T_K)] = (K - x)(x - L)$$

   c) This martingale is not bounded below (since T can take arbitrarily large values), so we can't apply the third set of conditions. Pour la deuxième pair des conditions, nous savons que les increments de M_n sont bornés :
   $|2Z_{n+1}X_n + Z_{n+1}^2 - 1| = |2Z_{n+1}X_n| \leq 2\max(|L|, K)$
   Aussi, comme remarqué déj'a dans la solution de l'exercice 5.6, le fait que $\mathrm{ET} < \infty$ est assuré par la théorie spectrale des matrices sous-stochastiques. L'option du calcul direct (très simple ici) par conditionnement sur le premier pas serait illogique ici, car ça reviendra a justifier cette méthode en la remplaçant par une autre !

Remarque 5.4. *Pour la marche symmétrique qui reste sur place avec proba* $1-2p > 0$ *on trouve*

$$t_x = E_x[min(T_L, T_K)] = \frac{(K-x)(x-L)}{2p}. \tag{5.5}$$

Remarque 5.5. *Letting* $L \to -\infty$ *and* $K = x+1$ *we find that the expected duration of a game for winning just one buck (with no lower bound on the losses) is infinite, which is quite surprising.*

Chapitre 6

Problèmes de premier passage pour les motifs

Considérons un processus de Bernoulli $X_1, X_2, ...,$ où X_i sont i.i.d. prenant des valeurs dans un alphabet fini, par exemple $\{P, F\}$. La probabilité de P est p et celle de F est $q = 1 - p$. L'hypothèse importante n'est pas le nombre des résultats possible, mais l'indépendance des lancements.

On s'intéresse au premier moment $N = N(M)$ d'apparition d'un motif donné M, comme par exemple $M = FPFPF$:

$$N = N(FPFPF) = \inf\{n : (X_{n-4}, ..., X_n) = FPFPF\},$$

et aussi dans la probabilité qu'un motif M_1 apparait avant un autre M_2.

6.1 Le singe savant : Recursions, fonctions génératrices et chaînes de Markov

≪Donnons du temps au temps.≫

Soit $m_M = E[N(M)]$ l'espérance du nombre de pas jusqu'au moment quand un chimpanzé qui tape au hasard sur le clavier d'une machine à écrire produira une copie de la pièce de théâtre Hamlet de Shakespeare. $P[N(M) < \infty] = 1, \forall M$, i.e. avec suffisamment de temps, le chimpanzé reussira, sùrement. Mais combien de temps faut-il attendre avant que ça arrive ? Quelle est l'attente moyenne pour qu'un motif, comme ABRACADABRA, se produise dans une suite tapé par le chimpanzé ? Y a t'il **une formule générale pour le temps esperé des motifs** ? Voila une version allégée de ces question.

Exercice 6.1. *On considère une pièce non équilibrée que l'on lance un nombre indéterminé de fois. La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$, et la probabilité de sortir face est égale à $q = 1 - p$. Les lancers sont indépendants.*

1. *On note N le temps d'attente du premier pile, c'est-à-dire le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir le premier pile, en incluant le pile ($N \in \{1, 2, ...\}$). Par exemple, si $X_1 = F, ...X_{j-1} = F$ et $X_j = P, j \geq 1$, la valeur de N est j. Dessinez l'arbre de toutes les possibilités pour cet expériment.*
2. *Calculez $p_k = P[N] = k, k \geq 1$.. Quelle est la loi de N ? Calculez le premier moment $m = \mathrm{EN}$.*

3. *Formuler une équation pour le premier moment $m = EN$ par la méthode du conditionnement sur le premier pas, et la résoudre* § *.*
4. *«Mieux que les moments :» Trouvez la fonction génératrice des probabilités $p_N(z) = \mathrm{Ez^N} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \mathrm{p_k z^k}$.*
   En suite, déduisez l'espérance EN *(en calculant $p'(1)$), et aussi* $\mathrm{E(N)^2}$*.*
5. *Trouvez l'espérance $m(M) = EN(M), M = PP$ du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient* **deux piles consécutives***, en incluant les deux derniers résultats.*
   Ind : Sauf $m = m_\emptyset = m_\emptyset(PP)$, il faudra trouver en même temps $m_P = \mathrm{E_P[N(PP)]}$ du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient deux piles consécutives, à partir du moment qu'on a obtenu la première (pour des mots précédés par une pile, qui est compté pour la decision de l'arrêt, mais pas pour la longueur du mot).
6. *Trouvez la fonction génératrice des probabilités $p_N(z) = \mathrm{Ez^N} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \mathrm{p_k z^k}$, pour $N = N(PP)$.*
   En suite, déduisez l'espérance EN, et aussi $E[(N)^2]$.
7. *Reabordez pour $k = 3$ et k arbitraire le premier moment* E[N(PP...P)] *jusqu'à ce qu'on obtient k piles consécutives, en incluant la suite finale.*

Solutions :

1. L'espace des expérimentés se décompose en : $E = \{P, FP, FFP, FFFP, ...\} = \{P\} \cup \{F\ E\}$. En représentant l'espace comme un arbre, on observe une branche avec une seule feuille $\{P\}$, et une branche qui est identique a l' arbre initial, après avoir enlevé la feuille initiale $\{F\}$.
   Remarquons cette structure récursive, qui est la clef du pb !
2. Les probas sont $p_k = pq^k, k = 0, 1, ...$ On a à faire avec la loi géométrique, bien connue ! !
3. Il est quand même intéressant de remarquer que l'espérance peut aussi se calculer par un conditionnement sur le premier pas. Considerons d'abord le nombre de pas $\widetilde{N} \in \{0, 1, 2, ...\}$ en excluant le dernier, et $\widetilde{m} = E\widetilde{N}$:
   $$\widetilde{m} = p \times 0 + q(1 + \widetilde{m}) \Leftrightarrow \widetilde{m} = \frac{q}{p} \text{ §}$$
   Note : Pour l'autre définition d'une variable géométrique $N := \widetilde{N} + 1 \in \{1, 2, ...\}$ (en incluant la dernière face), on obtient par le résultat précédent
   $$m := EN = E(\widetilde{N} + 1) = \frac{1}{p},$$

§. on utilise la relation $\mathcal{L}(N|X_1 = F) = \mathcal{L}(1 + N)$, qui est une conséquence de la décomposition «premier pas + le reste» $N = 1 + N'$ et du fait que les distributions conditionnées par le premier pas du «reste» N' sont connues : a) $(N'|X_1 = P) \equiv 0$ et b) $\mathcal{L}(N'|X_1 = F) = \mathcal{L}(N)$ par le fait que la seule différence entre les réalisations possibles de N' et ceux de N est le moment «de départ de la montre», qui n'affecte pas la distribution d'une chaîne homogène

§. Cela est une conséquence de la décomposition "premier pas + le reste"

$$\widetilde{N} = 1 + \widetilde{N}'$$

et du fait que les distributions conditionnées par départ du "reste" sont connues : a) $(\widetilde{N}'|X_1 = P) \equiv 0$ et b) $\mathcal{L}(\widetilde{N}'|X_1 = F) = \mathcal{L}(N)$ par la proprieté de Markov (oubli du passé).

ou encore par conditionnement sur le premier pas :

$$m = \mathbb{E}[N] = \mathbb{P}[X_1 = P]\mathbb{E}[N|\{X_1 = P\}] + \mathbb{P}[X_1 = F]\mathbb{E}[N|\{X_1 = F\}]$$
$$= \mathbb{P}[X_1 = P]1 + \mathbb{P}[X_1 = F](1 + \mathbb{E}[N]) = p * 1 + q * (1 + m) = 1 + q * m$$

4. La méthode des fonctions génératrices des probabilités comporte : a) enumerer tous les points de l'espace des expériments $E = \{P, FP, FFP, FFFP, ...\}$, b) remplacer P, F par pz, qz et c) chercher a evaluer la somme. Soit $f(w), p(w) = 1$ les nombres des faces et piles dans un mot $w \in E$. Alors :

$$p_N(z) = Ez^N = \sum_{w \in E} P(w) z^{|w|} = \sum_{w \in E}^{\infty} q^{f(w)} p z^{f(w)+1} = pz + qpz^2 + q^2pz^3 + q^3pz^4 ...$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} q^k p z^{k+1} = \frac{pz}{1 - qz}$$

Alternativement, on peut evaluer la somme en exploitant la structure récursive

$$E = P \cup FE,$$

et en remplaçantr E, P, F par $p(z), pz, qz$, ce qui implique la décomposition $p(z) = pz + qzp(z)$.
Finalement, on retrouve $\mathrm{EN} = \mathrm{p}'(1) = \frac{1}{\mathrm{p}}$.

5. **Méthode A de décomposition/conditionnement sur quelques premiers pas**, en suivant l'arbre des possibilités, jusqu'a trouver une décomposition de l'espace d'états qui permet soit de constater que notre événement d'arrêt est arrivé, soit de relancer le processus du début. Ici, les trois événements PP (reussite) et F, PF +relance fournissent une telle décomposition. Par conséquent, la formule ET donne :

$$m(PP) = q(m(PP)+1)+pq(m(PP)+2)+2p^2 \Leftrightarrow m(PP) = \frac{q + 2p}{1 - q - pq} = \frac{1 + p}{p^2} = p^{-2}+p^{-1}$$

Méthode B des conditionnement après le premier pas et l'introduction des inconnues auxiliaires, pour les situations qui tombent pas dans les deux categories ci-dessus. Ici, après le premier pas, on a une décomposition

$$A = F\ A \cup P\ A_P$$

où on a dénoté A_P l'arbre de toutes les expérimente pour arriver a deux piles, en partant d'une pile. Cette décomposition donne

$$m_\emptyset = q(1 + m_\emptyset) + p(1 + m_P) \Longrightarrow m_\emptyset = p^{-1} + m_P$$

La décomposition

$$A_P = F\ A \cup PP$$

donne $m_P = q(1 + m_\emptyset) + p(1 + 0) \Longrightarrow m_P = 1 + qm_\emptyset$
Finalement,

$$m_\emptyset = p^{-1} + m_P = p^{-1} + 1 + qm_\emptyset \Longrightarrow m_\emptyset = p^{-1} + p^{-2}$$

Cette méthode est essentiellement équivalente à létude d'une chaîne de Markov sur $\{\emptyset, P, PP\}$, absorbée en PP.

6. Par la méthode B il va falloir trouver $\phi_\emptyset = \phi_\emptyset(z)$ et $\phi_P = \phi_P(z)$. On a $\mathcal{L}(N_\emptyset|F) = \mathcal{L}(1+N_\emptyset), \mathcal{L}(N_\emptyset|P) = \mathcal{L}(1+N_P), \mathcal{L}(N_P|F) = \mathcal{L}(1+N_\emptyset), \mathcal{L}(N_P|P) = \mathcal{L}(1) \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \phi_\emptyset = pz\phi_P + qz\phi_\emptyset \\ \phi_P = pz + qz\phi_\emptyset \end{cases}$$

et

$$\phi_\emptyset = p^2z^2 + pqz^2\phi_\emptyset + qz\phi_\emptyset \Longrightarrow = \frac{p^2z^2}{1-qz-pqz^2}. \tag{6.1}$$

La dernière équation aparaît aussi par la méthode A, qui décompose de l'espace des expériments :

$$E = \{(FPP, FFPP, ...), (PFPP, PFFPP, ...), PP, \} = \{FE\} \cup \{PFE\} \cup \{PP\}$$

(il peut etre utile de regarder en parallele l'arbre associé). Cela retrouve (6.1).

7. **Méthode A :** Remarquons que les quatre événements F, PF, PPF, PPP fournissent une décomposition de l'espace d'états qui permet soit de constater que notre événement d'arrêt est arrivé, soit de relancer le processus du début. Le conditionnement ces événements donne : $n = q(n+1) + pq(n+2) + p^2q(n+3) + 3p^2 \Leftrightarrow n = \frac{q(1+2p+3p^2)+3p^3}{p^3} = \frac{1+p+p^2}{p^3} = p^{-3} + p^{-2} + p^{-1}$ On devine que pour k piles consécutives, le résultat sera $p^{-1} + p^{-2} + ... + p^{-k}$.

   Méthode C des chaînes de Markov : La méthode des inconnues auxiliaires peut être ameliorée en introduisant un chaîne de Markov **minimale** qui retient l'information nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu, sur un espace d'états qui doit inclure l'état final désiré, ainsi que tous ses préfixes.

   Pour $k = 3$, on utilise une chaîne de Markov sur l'espace $\{0P, 1P, 2P, 3P\}$, avec état absorbant $3P$ ($X(t) = nP$ signifie ici que la suite observée au temps t contient exactement n piles à la fin. Pour illustrer, voilà un exemple d'un expériment possible et de l'évolution associée pour la chaîne de Markov

$$\begin{pmatrix} & P & F & F & P & F & P & P & P \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   La matrice des transitions entre les états transients $0, 1, 2$ est $Q = \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.2. *On lance une pièce de monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à q et celle de sortir pile égale à $p = 1 - q$. Soit $N(PF)/N(FF)$ le nombre de jets jusqu'à ce qu'on obtient une suite pile-face/face-face arrivées consécutivement, en incluant les deux derniers résultats.*

a) Calculer la loi, l'espérance $t = E[N]$ et la fonction génératrice des probabilités $\phi(z) = E[z^N]$ de la variable $N = N(PF)$. b) Trouvez aussi l'espérance $t(FF) = E[N(FF)]$. Sous quelles conditions $t(PF) \leq t(FF)$?

c) **Ensemble des motifs**. *Soit $N = \min[N(PF), N(FF)]$. Trouver l'espérance et la fonction génératrice des probabilités de N.*

d) **Le jeu de Penney**. *Deux joueurs jouent sur les apparitions de PF et FF, respectivement. Calculer la probabilité $y = P[N(FF) < N(PF)]$, sans utiliser la formule de Conway. Sous quelles conditions $y \geq \frac{1}{2}$ (i.e. FF est plus probable d'aparaître le premier) ? Est il possible que $t(PF) \leq t(FF)$ (i.e. temps moyen d'attente de PF plus court), mais $y \geq \frac{1}{2}$?*

e) Supposons que $p = 1/2$. Quelle des deux suites est plus probable d'arriver en premier ? Quelles sont les temps esperés des deux motifs ?

R : *a) La fonction génératrice des probabilités est la plus facile a calculer, et la plus utile aussi. Sur l'espace d'états $\{\emptyset = F, P, \partial = PF\}$, il faut résoudre le système homogène*

$$\begin{cases} \phi = pz\phi_P + qz\phi \\ \phi_P = pz\phi_P + qz \end{cases} \Longrightarrow \phi_P = \frac{qz}{1-pz}, \phi = \frac{pz}{1-qz}\phi_P = pqz^2(\frac{1}{1-pz}\frac{1}{1-qz}).$$

On s'aperçoit que ϕ_P est la fonction génératrice des probabilités d'une variable géométrique, que ϕ_F est la fonction génératrice des probabilités de la somme des deux variables géometriques, et que $\frac{\phi}{pqz^2}$ est la fonction génératrice des probabilités du nombre $\widetilde{N}(PF)$ des essais jusqu'à ce qu'on obtient pile-face consécutivement, en **excluant les deux derniers résultats**.

Si on inclut F dans l'espace d'états , i.e. sur $\{\emptyset, F, P, \partial = PF\}$, on a le système homogène

$$\begin{cases} \phi = pz\phi_P + qz\phi_F \\ \phi_P = pz\phi_P + qz \\ \phi_F = pz\phi_P + qz\phi_F \end{cases} \Longrightarrow \phi_P = \frac{qz}{1-pz}, \phi_F = \frac{pz}{1-qz}\phi_P = \phi,$$

et on s'aperçoit que $\phi_F = \phi$.

Pour la loi on obtient le development limité en decomposant

$$\phi = pqz^2(\frac{1}{1-pz}\frac{1}{1-qz}) = pqz^2(\frac{p}{1-pz} + \frac{q}{1-qz}) = pqz^2 \sum_n z^n (\sum_{i+j=n} p^i q^j)$$
$$\Longrightarrow p_2 = pq = p_3, p_4 = pq(p^2 + pq + q^2), ...$$

$t = \phi'(1)$ est seulement un peu plus compliquée a obtenir directement (le système est nonhomogène).

On peut aussi utiliser la **méthode D** *de decomposition* **selon le dernier pas**. *Soit S l'ensemble des réalisations (chemins) qui n'ont pas encore vu une face arriver après un pile, et S_∂ ceux qui contiennent exactement un PF. Considérons la décomposition $S = S_0 \cup S_P$, dans les ensemble contenant les réalisations qui finissent dans les deux états transitoires de la chaîne introduite dans la solution précédante. Rémarquez en suivant les arrêtes qui rentrent dans les noeuds, ou en decomposant sur la dernière lettre, que*

$$S_\partial = S_P\ F, S_P = S_0\ P \cup S_P\ P, S_0 = S_0\ F \cup \emptyset$$

(car il faut tenir compte en S_2 du mot vide). Sauf $\phi(z)$, nous allons trouver aussi $\phi_0(z) = \sum_{w\in S_0} P[w]z^{l(w)}, \phi_P(z) = \sum_{w\in S_P} P[w]z^{l(w)}$ (pas le même ϕ_P d'avant), et conclure que $\phi_\partial(z) = qz\phi_P(z)$. On a le système

$$\begin{cases}\phi_0(z) = qz\phi_0(z) + 1 = \frac{1}{1-qz} \\ \phi_P(z) = pz\phi_P(z) + pz\phi_0(z) \Longrightarrow \phi_P(z) = \frac{pz\phi_0(z)}{1-pz} = \frac{pz}{(1-qz)(1-pz)}\end{cases}$$

avec solution $\phi_\partial(z) = \frac{pqz^2}{(1-qz)(1-pz)} = \phi(z)$

b)$t(PF) = \frac{1}{pq}, t(FF) = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q}$

$$\frac{1}{pq} < \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} \Longleftrightarrow \frac{1}{p} - 1 < \frac{1}{q} \Longleftrightarrow \frac{q}{p} < \frac{1}{q} \Longleftrightarrow p > \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow q \le (\sqrt{5}-1)/2.$$

c) On a le système homogène

$$\begin{cases}\phi = pz\phi_P + qz\phi_F \\ \phi_P = pz\phi_P + qz \\ \phi_F = pz\phi_P + qz\end{cases} \Longrightarrow \phi_P = \frac{qz}{1-pz} = \phi_F, \phi = z\phi_P \Longrightarrow t = 1 + \frac{1}{q}.$$

d) $y = P[N(PF) > N(FF)] = q^2 \Longrightarrow y \ge \frac{1}{2} \Longleftrightarrow q \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$. Les deux inegalités sont incompatibles, et PF est le "plus probable", par les deux critères.

Exercice 6.3. *On lance une monnaie biaisée avec probabilité de sortir pile p, et on s'arrête au premier moment N quand une pile arrive après un nombre impaire de faces. Trouvez l'espérance du temps de ce jeu. Indication : Checher une décomposition de l'evenement, ou la loi de N, ou utiliser un processus de Markov qui retient toujours l'information minimale necessaire pour decider si l'evenement desiré a eu lieu.*

Sol : Soit $n = E[N]$ l'espérance du nombre de pas jusqu'à la premiére fois quand une pile arrive après un nombre impaire de faces. Le conditionnement sur le premier pas ne semble pas evident, mais une décomposition "hands on" en plusieurs cas est toujours possible. Le plus simple c'est de commencer par chercher la loi de N (qui est en elle même une décomposition de l'evenement A qu'une pile arrive après un nombre impaire de faces.

a) Examinons l'espace d'états :

$$E = \{P, FP, FFP, FFFP, FFFFP, ..\}$$

Dans le dexième, quatrième, ...cas, on conclut $N = 2, 4, ...$

Par contre dans le premier, troisième, ...cas, on a utilisé $2k+1, k \ge 0$ pas, et il faut recommencer du début. Cela suggère un conditionnement sur le temps T d'arrivée de la premiére pile. En conditionnant sur T, on trouve :

$$\begin{aligned} n &= E[N] = \sum_{k=1}^{\infty}(2k)q^{2k-1}p + \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k}p(2k+1+n) = \sum_{i=0}^{\infty} iq^{i-1}p + n\sum_{k=0}^{\infty} q^{2k}p \\ &= \frac{1}{1-q} + np\frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{1-q} + n\frac{1}{1+q} \Longrightarrow n\frac{q}{1+q} = \frac{1}{1-q} \Longrightarrow n = \frac{1+q}{q(1-q)}, \end{aligned}$$

où on a utilisé $p\sum_{i=0}^{\infty} iq^{i-1} = p(\frac{1}{1-q})' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q}$.

b) Donnons aussi une décomposition (ou un temps d'arrêt T) dans un nombre fini des cas, qui nous permettra d'eviter les sommes (mais pas le besoin de l'approche recursive).

Remarquons que les trois evenements FP, P, FF constitue une décomposition de l'espace d'états qui permet soit de constater que notre evenement d'arrêt est arrivé, soit de relancer le processus du debut. Par conséquant :

$$n = pq(2) + p(1+n) + q^2(2+n) \Longleftrightarrow n = \frac{p+2q}{q(1-q)} = \frac{1+q}{qp}$$

c) On peut aussi "habiller" cette solution en langage Markovien, en définissant une chaîne absorbante qui enregistre :

1. l'ètat final ∂ =nb impaire des F suivi par P
2. l'ètat precedent 1 = "nb impaire des F"
3. son ètat precedent 2 ="nb paire des F"
4. P ="nb quelqonque des P".

Les états transients sont $1, 2, P$ et l'état initial $\emptyset$ peut-être pris comme 2. Le système pour l'espérance du temps d'arrêt est :

$$\begin{cases} n = n_2 = 1 + pn_P + qn_1 \\ n_1 = qn + 1 \\ n_P = 1 + qn_1 + pn_P \end{cases} \Longrightarrow$$

$n_P = q^{-1} + n_1 = q^{-1} + qn + 1, n = 1 + p(q^{-1} + qn + 1) + q(qn + 1) \Longrightarrow n(1-q) = 2 + \frac{p}{q} = \frac{1+q}{q}$.

Remarque 6.1. *Pour une solution plus simple, mais moins evidente, on peut remarquer (et vérifier) qu'on peut mettre ensemble les états* 2 *et* P.

Exercice 6.4. *Calculer la fonction génératrice des probabilités de la variable* N *de l'exercice antérieur, par une méthode de décomposition/conditionnement.*

Recalculer $E[N]$*, en utilisant la fonction génératrice des probabilités.*

Sol : Soit S_T l'ensemble des réalisations qui finissent par une pile arrivant après un nombre impaire de faces. On cherche $\phi(z) = E[z^N] = \sum_{w \in S_T} P[w] z^{l(w)}$. On pourrait attaquer par n'importe quelle des méthodes A,B,C dans la solution de l'exercice (6.1),

Pour changer, utilisons la **méthode D** de decomposition **par le dernier pas**. Soit S l'ensemble des réalisations (chemins) qui n'ont pas encore vu une pile arriver après un nombre impaire de faces. Considérons la décomposition $S = S_2 \cup S_1 \cup S_P$, où les trois dernières ensemble contiennent les réalisations qui finissent dans les trois états de la chaîne introduite dans l'exercice antérieur. Rémarquez que $S_P = S_2\ P \cup S_P\ P, S_1 = S_2\ F \cup S_P\ F, S_2 = S_1\ F$. Sauf $\phi(z)$, nous allons trouver aussi $\phi_2(z) = \sum_{w \in S_2} P[w] z^{l(w)}, \phi_1(z) = \sum_{w \in S_1} P[w] z^{l(w)}, \phi_P(z) = \sum_{w \in S_P} P[w] z^{l(w)}$, et conclure que $\phi(z) = pz\phi_1(z)$. On a le système

$$\begin{cases} \phi_1(z) = qz\phi_P(z) + qz\phi_2(z) = qz(\phi_P(z) + \phi_2(z)) \\ \phi_P(z) = pz\phi_P(z) + pz\phi_2(z) = pz(\phi_P(z) + \phi_2(z)) = \frac{p}{q}\phi_1(z) \\ \phi_2(z) = qz\phi_1(z) + 1 \end{cases}$$

(car il faut tenir compte en S_2 du mot vide), avec solution

$$\phi_P = \frac{pz}{1-pz}\phi_2(z), \phi_1 = \frac{qz}{1-pz}\phi_2(z) = \frac{qz}{1-pz}(qz\phi_1(z)+1) \Longrightarrow$$

$$\phi_1 = \frac{\frac{qz}{1-pz}}{1-qz\frac{qz}{1-pz}} = \frac{qz}{1-pz-q^2z^2} \Longrightarrow \phi(z) = pz\phi_1(z) =$$
$$pqz^2 + p^2qz^3 + \left(qp^3+q^3p\right)z^4 + \left(qp^4+2q^3p^2\right)z^5 + \left(qp^5+3q^3p^3+q^5p\right)z^6 + O\left(z^7\right)$$

Exercice 6.5. *Calculer le premier moment* EN*, et la fonction génératrice des probabilités* $p_N(z)$*, en incluant la suite finale, pour le nombre* $N = N(FFP)$ *des essais jusqu'à ce qu'on obtient* **face-face-pile***.*

R : Utilisons la chaîne de Markov sur l'espace $\{0, F, FF, FFP\} = \{0, 1, 2, \partial\}$, avec état absorbant FFP.

$$\begin{cases}(1-pz)\phi(z) = qz\phi_F(z)\\ \phi_F(z) = qz\phi(FF)(z) + pz\phi(z)\\ \phi(FF)(z) = pz + qz\phi(FF)(z)\end{cases}$$
$$\Longrightarrow (1-qz)\phi_2(z) = pz, \phi_0(z)(1-pz-pqz^2) = q^2z^2\phi_2(z)$$
$$\phi_0(z) = \frac{pq^2z^3}{(1-qz)\left(1-pz-pqz^2\right)}$$

Alternativement, en forme matricielle, soit $Q = \begin{pmatrix} p & q & 0\\ p & 0 & q\\ 0 & 0 & q\end{pmatrix}$ la matrice des transitions entre les états transients $0, F_1, F_2$.

Les pgf satisfont :

$$\begin{pmatrix}\phi_0(z)\\ \phi_1(z)\\ \phi_2(z)\end{pmatrix} = \begin{cases}pz\phi_0(z)+qz\phi_1(z)\\ pz\phi_0(z)+qz\phi_2(z)\\ qz\phi_2(z)+pz\end{cases} = zQ\begin{pmatrix}\phi_0(z)\\ \phi_1(z)\\ \phi_2(z)\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\ 0\\ p\end{pmatrix}.$$

Exercice 6.6. *Le paradoxe d'intransitivité : Il se peut que dans des compétitions deux à deux, on obtienne des cycles du type [S1 bat S2, S2 bat S3, ..., Sn – 1 bat Sn, mais Sn bat S1]. Montrer qu'un tel cycle est obtenu avec les quatre séquences PPF, PFF, FFP et FPP.*

R : Les quatres jeux sont gagné par le premier motif avec probas $p/(1-p+p^2), p(2-p), (1-p)/(1-p+p^2), 1-p^2$; pour $p = 1/2$ ça donne $2/3, 3/4, 2/3, 3/4$. Par exemple, pour $y = P[N(PFF) < N(FFP)]$, le système est $\begin{cases}y = py_P + qy_F\\ (1-p)y_P = qy_{PF}\\ y_{PF} = q + py_P\\ y_{FF} = 0\\ y_F = qy_{FF} + py_P = py_P\end{cases} \Longrightarrow$

$$\begin{cases}y_P = y_{PF}\\ y_F = p\\ y = p(1+q) = p(2-p) = \frac{3}{4}.\end{cases}$$

Exercice 6.7. *a) Calculer* $z = P[N(FPP) < N(PPF)]$.
b) Calculer $t = E[\min(N(FPP), N(PPF))]$.

Exercice 6.8. *1. Calculer la fonction génératrice des probabilités* $p_{\widetilde{N}(PP)}(z)$*, où* $\widetilde{N}(PP)$ *est le nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient deux piles consécutives, en* **excluant les deux derniers résultats**.

2. (*) Calculer directement les probabilités $P[\widetilde{N}(PP) = k], k = 0, 1, 2, ...,$ *à partir d'une récurrence qu'on détérminera.*

R : 1. Utilisant la chaîne de Markov sur l'espace $E = \{0P, 1P, 2P\}$, avec état absorbant $2P$, on trouve que la fgp $p(z) = Ez^{\widetilde{N}(2)}$ satisfait $p(z) = p^2 + qzp(z) + pqz^2p(z)$. Finalement,

$$p(z) = \frac{p^2}{1 - qz - pqz^2} = \frac{C_+}{1 - z/\lambda_+} + \frac{C_-}{1 - z/\lambda_-}.$$

On peut trouver les probabilités p_k à partir de la fgp. 2. (*) Les probabilités p_k sont moins évidentes à obtenir directement.

On a $p_0 = p^2, p_1 = qp^2, p_2 = q^2p^2, p_3 = qp_2 + pqp_1, ...p_n = qp_{n-1} + pqp_{n-2}, \forall n \geq 3$. On trouve ainsi une récurrence à coefficients constants, qui donne $p_n = C_+\lambda_+^n + C_-\lambda_-^n$, $\lambda_\pm = \frac{q\pm\sqrt{q(4-3q)}}{2}$. Le système $C_+ + C_- = p^2, C_+/\lambda_+ + C_-/\lambda_- = 0$ donne $C_+ = \frac{p^2(q-\lambda_-)}{\lambda_+-\lambda_-}, C_+ = \frac{p^2(\lambda_+-q)}{\lambda_+-\lambda_-}$. Il semble que les premières solutions données par DeMoivre et Laplace au problème de "runs" utilisaient déja les fgp.

Remarque 6.2. *En general, on peut montrer que le vecteur* $\boldsymbol{g}(z)$ *des fonctions génératrices des moments pour les temps d'absorption d'une chaîne avec un état absorbant et matrice* $P = \begin{pmatrix} Q & \boldsymbol{q} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}$ *satisfait l'équation* $\boldsymbol{g}(z) = z(Q\boldsymbol{g}(z) + \boldsymbol{q})$ *et*

$$\boldsymbol{g}(z) = z(I - zQ)^{-1}\boldsymbol{q} = \sum_{k=1}^{\infty} z^n Q^{k-1}\boldsymbol{q}, \tag{6.2}$$

où $\boldsymbol{q} = (I - Q)\mathbf{1}$ *est le vecteur des probas d'absorbtion immédiate.*

Un development limité

$$\boldsymbol{p}_k = Q^{k-1}\boldsymbol{q} = Q^{k-1}(\mathbf{1} - Q\mathbf{1}). \tag{6.3}$$

Un vecteur des lois ayant cette forme s'apelle de type **matrix-geometric**.

Cela permet retrouver la formule pour $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{g}'(1)$*, en différentiant le système :*

$$\boldsymbol{g}'(z) - zQ\boldsymbol{g}'(z) = Q\boldsymbol{g}(z) + \boldsymbol{q} \Rightarrow (I - Q)\boldsymbol{g}'(1) = Q\mathbf{1} + \boldsymbol{q} = \mathbf{1} \Longrightarrow \boldsymbol{t} = (I - Q)^{-1}\mathbf{1} \tag{6.4}$$

(cette formule généralise la formule de Conway pour le temps d'attente $t(M)$ *d'un mot).*

Par exemple, les temps esperés dans l'exercice 6.5 sont

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = (I - Q)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{-2}p \\ q^{-1}p^{-1} + \frac{p}{q^2} \\ p^{-1} \end{pmatrix}$$

Et pour le motif PPP *on retrouvera la réponse* $x_2 = \frac{1}{p^3}, x_1 = \frac{1+p}{p^3}, x_0 = \frac{1+p+p^2}{p^3}$.

Pour les chaînes X avec deux états absorbants ∂_1, ∂_2 et matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} & 0 \\ \boldsymbol{q}_1 & Q & \boldsymbol{q}_2 \\ 0 & \vec{0} & 1 \end{pmatrix}$ *et temps d'absorption $N = \min[N_{\partial_1}, N_{\partial_2}]$, les vecteurs des "probas de ruine/survie" $\Psi_i = P[X(N) = \partial_1, \bar{\Psi}_i = P[X(N) = \partial_2$ satisfont les équations $\boldsymbol{\Psi} = Q\boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{q}_1, \bar{\boldsymbol{\Psi}} = Q\boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{q}_2 \Longrightarrow$*

$$\boldsymbol{\Psi} = (I - Q)^{-1}\boldsymbol{q}_1. \tag{6.5}$$

Exercice 6.9. *a) Montrer, pour une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ avec matrice des transitions P sur un espace d'états $\mathcal{S}$ composé d'un ensemble d'états absorbants $\partial = (\partial_1, \partial_2, ...)$ et d'un ensemble d'états transitoires $\mathcal{T}$, que $\phi_i = E_i[z^N g(X_N)], z \in (0, 1]$ satisfait :*

$$\begin{aligned} &\phi_i = g(i) \text{ pour } x \in \partial \\ &\phi_i = z \sum_{i \in \mathcal{S}} P_{i,j}\phi_j. \end{aligned} \tag{6.6}$$

b) Déduire une formule pour le vecteur $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i \in \mathcal{T}}$ avec $t_i = E_i[Ng(X_N)]$, au cas où $g(i) = \mathbb{I}_{i=\partial_1}, i \in \partial$.

6.2 Jeu de Penney au casino de Shuo-Yen Robert Li

Soit Σ un alphabet fini, par exemple $\Sigma = \{P, F\}$, soit $M = F...FP...P$ un mot avec des lettres dans cet alphabet. La question est détudier le temps $N(M)$ de la première apparition de ce mot dans une suite $w = w_1 w_2..., w_i \in \Sigma$ des experiments indépendants. Soit $P(M) = q^{n_F(M)} p^{n_P(M)}$ la probabilité du mot M d'être observé immédiatement. Dans les exemples plus simples abordés déjà par l'approche Markovienne comme $w = P, w = PF, w = PPF, w = FPP$, on a trouvé

$$t_w = E[T_w] = P(w)^{-1},$$

mais dans l'exemple $w = PPP$, on a trouvé

$$t_{PPP} = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Il se trouve que une formule générale pour l'espérance du temps d'attente d'un motif arbitraire existe :

$$t_w = \sum_i{}' P(w_i)^{-1} \tag{6.7}$$

où $\sum'$ denote somme sur tous les mots w_i qui sont en même temps suffixes (i.e. les dernières i lettres de w) et prefixes de w.

Cette formule a été obtenue d'abord en resolvant des récurrences (impliqués par la méthode de renouvellement de Feller, assez naturelle), mais finalement, c'est une demonstration très courte due a Li qui explique mieux le résultat. Cette demonstration introduit une **martingale surprenante**, et utilise le théorème d'arrêt de Doob – voir le théorème 6.1. Nous allons prefacer cette martingale par quelques exemples.

Exercice 6.10. Qu'est ce qu'un jeu juste ? *Considérons un grand casino où un croupier tire à pile ou face (probabilités p et $q = 1-p$) toutes les secondes, et où arrivent un joueur J qui dispose d'une fortune $X(0) = a$, et qui joue l'apparition d'un pile ou d'une face. Le gain du joueur qui joue $l \in \{P, F\}$ est $X = g_l a$ s'il gagne, et 0 sinon, i.e. $X = Z^{(l)}a$, où*

$$Z^{(P)}(w) = \begin{cases} g_P & si\ w = P \\ 0 & si\ w = F \end{cases}, \quad Z^{(F)}(w) = \begin{cases} 0 & si\ w = P \\ g_F & si\ w = F \end{cases}.$$

a) Quelles valeurs doivent avoir g_P et g_F pour que le jeu soit juste/équitable ?

R : *Le profit est $X - a$. On a $E[X] = a \Longleftrightarrow E[Z^{(l)}] = 1$ ssi $g_P = \frac{1}{p}, g_Q = \frac{1}{q}$.*

b) Considérer un joueur dans un casino juste, qui dispose d'une fortune de $1\$$ et qui peut miser plusieures fois, sur l'arrivée d'un mot M ; par exemple, il peut miser sur l'arrivée aux temps consecutifs du mot PF. Le joueur reste au casino jusqu'au moment $T = \min(T_e, T(PF))$, i.e. il s'arrête au premier échec T_e, mais tant qu'il reussit, il reste pour miser chaque fois tout son argent, jusqu'au moment où son motif aparaît. Au temps 1 donc, le joueur qui vient de gagner $g = \frac{1}{p}$ place de nouveau toute la fortune sur Face. Sur une cible face, le casino devra lui payer $g = \frac{1}{q}$ per \$. S'il gagne, sa fortune sera $g_2 = \frac{1}{pq}$, et le jeu s'arrête ; si non, il pert tout.

Soit $X(n)$ la fortune du joueur au temps n, avec $X(0) = 1$. a) Dessiner l'arbre de toutes les possibilités et vérifier que $1 = E[X(1)] = E[X(k)], k \leq |M|$. b) Montrer que $X(k), k \leq |M|$ est une martingale d'espérance 1.

R : $X(k) = \prod_{i=1}^{k} Z^{(M_i)}$, où $Z^{(M_i)}$ sont des variables aléatoires i.i.d. d'espérance 1.

La martingale d'un seul joueur de l'exercice precedent ne fourni aucun résultat intéréssant. Par contre, les temps esperés des motifs peuvent être calculés en utilisant une **équipe des joueurs** jouant le même motif, jusqu'au temps de sa première apparition, cf. Li (voir aussi [Williams, 1991, Exe 10.6, p. 233], [Grimmett and Stirzaker, 2001, Exe 12.9.16, p. 124], et poly Morel).

Començons par retrouver la reponse bien connue $t(P) = \frac{1}{p}$ pour $w = P$, en utilisant l'arrêt d'une martingale.

Exercice 6.11. L'esperance du temps $N(P)$, par l'utilisation d'une martingale associé à une équipe de joueurs. *Considérons un grand casino où un croupier tire à pile ou face (probabilités p et $q = 1-p$) toutes les secondes, et où arrive une équipe contenant une infinité de joueurs J_1, $J_2, \ldots$, qui disposent chacun d'une fortune de $1\$$, et qui commencent a jouer consecutivement aux temps $t = 1, 2, ...$, jusqu'à l'apparition du motif $M = P$.*

Chaque joueur J_n mise donc sur l'arrivée aux temps $t = n$ de la suite P, en placant $1\$$ sur Pile. Il touche en cas de succès $g = 1/p$, et 0 outrement. Un joueur qui a perdu quitte le casino, et le jeu s'arrête au moment $N(P)$ où le premier joueur gagne. Dés lors, les profits du casino au temps $t \leq T$ sont

$$S(t) = \sum_{i=1}^{t}(1 - Z_i),$$

où $Z_i \in \{g, 0\}$. a) Montrer que $S(k \wedge N), k \in \mathbb{N}$ est une martingale d'espérance 0. b) Trouver $t = EN$.

R : b) $0 = E[S(N)] = E[N - g] \Longrightarrow E[N] = E[$ gains du casino $] =$ perte du casino $= \frac{1}{p}$.

TABLE 6.1 – Exemple de chevauchements de PFP et des mots $w^{(k)}, k \leq N(PFP)$

Mot w	P	F	F	P	P	F	P
Joueurs / temps	1	2	3	4	5	6	7
1	$\boxed{P}$	$\boxed{F}$	P				
2		P	F	P			
3			P	F	P		
4				$\boxed{P}$	F	P	
5					$\boxed{P}$	$\boxed{F}$	$\boxed{P}$
6						P	F
7							$\boxed{P}$
G(k)	p^{-1}	$(pq)^{-1}$	0	p^{-1}	p^{-1}	$(pq)^{-1}$	$p^{-2}q^{-1} + p^{-1}$

Exercice 6.12. *Repeter l'exercice précédant pour une équipe des joueurs jouant tous $M = PFP$. a) Donner les valeurs de la fortune de l'équipe $G(k), k \leq N = N(PFP)$ après avoir observé la suite $w = PFFPPFP$.* **Ind :** *Rémarquez que cette fois si le joueur n gagne, il restera au casino, pour jouer en parallèle avec le joueur $n+1$ qui vient d'arriver.*

b) (*) Soit $w^{(k)}$ les k premières lettres de w. Montrer que pour une équipe qui joue pour B, la fortune courante de l'equipe des joueurs au moment k où $w^{(k)}$ ne contient pas encore B est

$$G(k) = w^{(k)} * B := \sum_{i:\overline{w}_i^{(k)} = \underline{B}_i} P(\underline{B}_i)^{-1},$$

où $\underline{B}_i$ et $\overline{w}_i^{(k)}$ sont respectivement les premières lettres de B et les dernières i lettres de $w^{(k)}$. Nous appelerons ceci le "chevauchement/produit/corrélation Conway-Li" (asymetrique) de $w^{(k)}$ et B.

c) Trouver une formule pour les gains et la perte du casino au moment N.

d) Trouver $t = EN$ en supposant que $S(n) = n - G(n)$ est un jeu juste.

R : a) Les gains $G(k)$, i.e. $G(1) = p^{-1}, G(2) = (pq)^{-1}, G(3) = 0, G(4) = p^{-1}, G(5) = p^{-1}, G(6) = (pq)^{-1}, G(7) = p^{-2}q^{-1} + p^{-1}$, sont obtenues en faisant la somme sur la colonne k sur les trois lignes $k-2, k-1, k$, et les cases non-perdantes (encadrées) réfléchissent un chevauchement, par exemple $M(5,6)$ réfléchit l'identité de $\overline{w}_2^{(6)} = PF$ avec $\underline{M}_2$.

b) Seulement les joueurs satisfaisant cette condition sont encore en jeu, et ils auront gagné $P(\underline{B}_i)^{-1}$.

c) gains du casino $= N$, perte du casino à la fin $w * B = B * B = p^{-1} + p^{-2}q^{-1}$.

d) jeu juste $\Longrightarrow 0 = E[S(N)] = E[N - perte] = E[N - G(N)] = E[N] - B * B \Longrightarrow E[N] = p^{-1} + p^{-2}q^{-1}$.

Exercice 6.13. Le motif PPP. *Cette fois, chaque joueur n peut miser jusqu'à trois fois, sur l'arrivée aux temps $t = n, n+1, n+2$ de la suite PPP, et il quitte le jeu dés qu'il y a échec. Au temps n donc, le joueur J_n place 1 sur Pile. S'il gagne, il place toute la fortune $\frac{1}{p}$ à nouveau sur Pile. S'il gagne, sa fortune sera $\frac{1}{p^2}$. Il continue ainsi à parier toute sa fortune sur Pile jusqu'à ce qu'il perde tout ou qu'il ait gagné trois fois de suite [PPP]. Dans les deux cas, il quitte alors le casino.*

1. *Quelles sont les gains du casino, et la perte du casino au moment $T = T(PPP)$?*
   Réponse : gains du casino $= T$, perte du casino $= M * M = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$.

2. *(*) Soit w_n les variables aléatoires indépendants associées au n-ième tirage ($w_n = F$ ou P), et soit $S(n) = n - \overline{w}_n * B$ le profit cumulé(e) du casino après le n-ième tirage. Montrer que $S(n)$ est une martingale.*

   Réponse : Soit $X_n = S(n) - S_{n-1}$ les gains - pertes du casino au n-ième coup. La formule de $X_n = S(n) - S_{n-1}$ est assez compliqué, car elle depend des nombres du nombre des joueurs présents au temps n, qui peut-être $1, 2,$ ou 3, en fonction de w_{n-2}, w_{n-1}, w_n. Mais on a toujours $X_i \in \mathcal{F}_i$, où $\mathcal{F}_n = \sigma(w_1, \ldots, w_n)$ (car X_i est une fonction déterministe des résultats w_j des j coups précédents).

   (*) Aussi, comme le jeu est équitable pour chaque joueur, on a toujours $E[X_i/\mathcal{F}_{i-1}] = 0$ (pour être plus précis, il faudra decomposer $X_i = \sum_{j \leq i} M_{j,i}$, où $M_{j,i}$ est profit au moment i due au joeur j [Li, 1980, (2.7)], Williams [1991]). En conclusion, $S(n) = \sum_{i=1}^n X_i$ est une martingale.

3. *En arrêtant la martingale S_t, montrer que* $\mathrm{E(T)} = \mathrm{p}^{-1} + \mathrm{p}^{-2} + \mathrm{p}^{-3}$.

   Réponse : Au moment où le jeu s'arrête, les joueurs $J_1, \ldots, J_n$ ont misé chacun -1 et seuls J_{n-2}, J_{n-1} et J_n ont gagné respectivement p^{-3}, p^{-2} et p^{-1}. Le profit du casino est

$$S(T) = T - p^{-1} + p^{-2} + p^{-3}.$$

   Le théorème d'arrêt des martingales donne $E[S(T)] = 0$ et le résultat. §

Le théorème suivant résume l'approche martingale Li [1980], Gerber and Li [1981] pour le pb. de competition de plusieurs équipes de Penney Conway (resolu intialement par la méthode de renouvellement de Feller) :

Théorème 6.1. *Dans le "casino de Li" décrit dans les exemples précédents*

1. *Le gain final de l'equipe des joueurs au premier moment T_B d'arrivée d'un mot B est*

$$B * B := \sum_{i:\underline{B}_i = \overline{B}_i} P(\underline{B}_i)^{-1},$$

   où $\underline{B}_i$ et $\overline{B}_i$ sont respectivement les premières et les dernières i lettres de B, car seulement les joueurs satisfaisant cette condition sont encore en jeu, et ils auront gagné $P(\underline{B}_i)^{-1}$.

2. *Le gain courant d'une équipe des joueurs qui joue B, après l'apparition d'un mot (total) w qui ne contient pas B est $w * B$.*

   Si le casino decide de changer de mot et terminer le jeu à l'apparition d'un mot (secret) C, contre une équipe qui jouait auparavant pour B, la fortune de l'equipe des joueurs au moment $T(C)$ sera

$$C * B := \sum_{i:\overline{C}_i = \underline{B}_i} P(\underline{B}_i)^{-1}.$$

3. *Considerons une équipe qui joue pour B, à partir du moment où un "mot cadeau" A vient d'être observé. Remetrons la montre au temps 1, et soit $w = w_1 w_2 ...$ le mot d'observations suivant l'apparition de A. Le jeu continue jusqu'au moment $T_{B/A}$ de la première apparition de B dans la juxtaposition Aw :*

$$T_{B/A} = \inf\{k \geq 1 : B \subset A w^{(k)},\ w^{(k)} = w_1 w_2 ... w_k\}.$$

---

§. Remarquons aussi que la décision $T = n$ est une fonction déterministe des résultats de $w_1, \ldots, w_n$ et est donc $\mathcal{F}_n$-mesurable. C'est donc un temps d'arrêt.

Alors, la suite

$$S_k := (Aw^{(k)}) * B - k, k \in \mathbb{N}$$

(représentant la fortune d'une équipe des joueurs dans le casino de Li au temps k après l'apparition de A (initialisée par $S_0 = A * B = \sum_{i:\overline{A}_i=\underline{B}_i} P(\underline{B}_i)^{-1}$*), est une martingale. Sa valeur finale est*

$$S_{T_{B/A}} := B * B - T_{B/A}.$$

4. *L'espérance* $ET_{B/A}$ *(conditionné par l'evenement d'observer A au debut) est*

$$\mathrm{ET_{B/A} = B * B - A * B.}$$

En particulier on retrouve $\mathrm{ET_{\emptyset B} = B * B}$.

5. *Soit* $B_1, B_2, ..., B_I$ *des mots tel que aucun n'est pas inclu dans un autre. Soit* T_i *le temps d'arrivée du mot* B_i*, soit* $T = \min(T_i), t = E[T]$*, et soit* p_i *la probabilité que le mot* B_i *précède les autres. Alors, t et* $p_i, i = 1, ..., I$ *satisfont* $\sum_j p_j = 1$ *et*

$$\sum_j p_j B_j * B_i = t \forall i \in \{1, ..., I\}. \tag{6.8}$$

Ce système est non-singulier [Li, 1980, p.1175].

6. *Avec* $A = \emptyset, I = 2$ *on obtient la formule de Conway*

$$p_2 = -\frac{B_1 * B_1 - B_1 * B_2}{B_2 * B_1 - B_2 * B_2}.$$

7. *Si* $B_1 = (b_1, ..., b_{n-1}, b_n)$*, la meilleure strategie pour la deuxième équipe est de choisir un mot de la form* $bb_1, ..., b_{n-1}$*, pour un certain b Guibas and Odlyzko [1981], Felix [2006] .*

Démonstration 1. La formule (6.8) est evidente à l'interieur d'un casino "juste", où une équipe des joueurs joue l'apparition d'un motif w. Le gain total du casino est T_w, et sa perte totale du casino est la somme des tous les payments faites aux joueurs qui sont arrivés après le joueur gagnant. Mais les joueurs restant encore en jeu sont precisement ceux qui ont misé sur un prefixe qui aparait aussi comme sufixe dans le mot du joueur gagnant, et leur fortune courante est $P(w_i)^{-1}$ (comme le casino est "juste"). Le théorème de Doob nous garanti l'égalité $E[T_w] = \sum_i' P(w_i)^{-1}$.

4.

$$E[T_i] = B_i * B_i = E[T] + E[T_i - T] = t + \sum_j p_j E[T_i - T | T = T_j]$$
$$= t + \sum_j p_j (B_i * B_i - B_j * B_i), \forall i \in \{1, ..., I\} \Longrightarrow (6.8).$$

Remarque 6.3. *La solution du systême* (6.8) *peut se faire en deux etapes : a) resoudre* $\sum_j y_j B_j * B_i = 1, \forall i$*. b)* $t = (\sum_j y_j)^{-1}, p_j = t y_j$*.*

Remarque 6.4. *L'importance des "produits" A*B etait connue déjà via l'approche de renouvellement de Feller, mais peut être leur interpetation via la martingale de Li est plus revelatrice.*

Exercice 6.14. *Dans le même esprit : le casino possède un singe qui tape au hasard sur les 26 touches majuscules à la vitesse de 60 caractères par minute. Montrer, par* (6.7)*, que le temps moyen d'attente de la séquence* $ABRACADABRA$ *est* $26^{11} + 26^4 + 26$.

Remarque 6.5. *Un paradoxe ? Les calculs précédents prouvent que le temps moyen d'attente de* PP *(deux fois Pile) dans le cas* $p = \frac{1}{2}$ *est égal à* $2 + 4 = 6$ *alors que le temps d'attente de* PF *est de 4. Ceci peut paraître contre-intuitif, puisque les séquences* PP *et* PF *sont équiprobables ! L'explication intuitive est que l'apparition du motif* PP *necessite une coincicidence entre le début et la fin du motif.*

Exercice 6.15. *(*) Un paradoxe des jeux pile-face : les trois notions « fréquence d'apparition », « temps moyen d'attente » et « gagnant d'une compétition entre deux séquences », que nous lions intuitivement quand nous comparons deux séquences, sont en réalité indépendantes. Considerer par exemple S1 = PFPF et S2 = FPFF. Montrer que la séquence S1 a un temps d'attente de 20, alors que S2 a un temps d'attente de 18. Pourtant, S1 arrive devant S2 avec une probabilité y égale à 9/14, soit 0,6428.*

R : $y = (p(1 + p - 2p^2 + p^3))/(1 - p^2 + p^3)$

Chapitre 7

Martingales II

7.1 La martingale interdite

Exemple 7.1. *Prenons un exemple de jeu dù à D'Alembert : on parie x euros sur pile. Si la pièce tombe sur pile, on ramasse 2x euros (soit un gain de x euros), et si elle tombe sur face, on perd tout. A chaque coup, on est libre de se retirer ou de continuer à jouer. Une stratégie gagnante à coup sùr est la suivante : au 1er coup, on mise 1 euro : si on gagne, on se retire (et on empoche 1 euro) ; sinon, on continue (et on a perdu 1 euro). au 2ème coup, on double la mise, 2 euros : si on gagne, on se retire, et on a gagné 2-1=1 euro. Sinon on continue, on a perdu 2+1=3 euros. au 3ème coup, on double encore la mise, en jouant 4 euros. Si on gagne, on se retire, avec en poche un gain de 4-3=1 euro. Sinon, on continue la partie, et on double au coup suivant la mise, etc. La théorie des martingales modélise en théorie des probabilités le concept de jeu équitable (ou juste), en stipulant que l'espérance du gain doit être* 0 *à chaque mise. Remarquons que notre exemple est un jeu juste. Mais, comme pile va bien finir par tomber, on est sùr de finir par gagner 1 euro (à condition d'avoir une fortune infinie). Cela contredit l'intuition qu'il n'existe pas de stratégie pour gagner à coup sùr, dans un jeu juste et «raisonnable». On verra plus tard comment définir «raisonnable» ; pour l'instant, remarquons que si pile met du temps a sortir, il va falloir miser beaucoup (si la pile sort qu'au 8è tirage, alors on aura déjà misé 1+2+4+8+16+32+64+128=255 euros, et tout cela pour gagner 1 euro). La théorie des martingales jettera de la lumière sur ce paradoxe de «gagner dans un jeu juste», sans avoir aucun capital.*

The doubling martingale strategy. We examine now the strategy which gave martingales their names (nowadays outlawed in casinos). A gambler with no initial capital has as goal to win 1 pound. His first bet is $s_1 = 1$ pound. If he loses, he bets whatever it takes to bring him up to 1 pound ($s_2 = 2$ pounds at the second bet, $s_3 = 4$ at the third, and in general $s_n = 2^{n-1}$ on the n'th bet. The stopping time is T_1. We note immediately that this strategy creates a dollar out of nothing and does not satisfy le théorème d'arret des martingales, c.-à-d.

$$E_0 X_{T_1} = 1 > 0!!$$

We examine now les conditions du théorème d'arret des martingales. It is easy to check that $p_k = \mathbb{P}[T = k] = 2^{-k}, k = 1, 2, ...$ and thus both condition 1 a) (that $\sum_k p_k = 1$) and condition 2 a) (that $\mathrm{ET} = \sum_\mathrm{k} \mathrm{k}\ \mathrm{p_k} = 2 < \infty$) are satisfied. However, neither the cumulative fortune, nor the stakes are bounded, since the loss may double its value an arbitrary number of times and of course the gambling time does not have to be bounded. Thus, neither condition 1 b) nor 2 b) are satisfied. Notice that this strategy seems quite efficient for the gambler (a sure win in a number of steps with expectation 2!). Also, practically, it seems at first safe for the bank too, since in practice the gamblers will have to limit the time they gamble by some finite number n, and then le théorème d'arret des martingales will apply (by any of the three conditions!). Note that the possible loss after the n'th bet is -2^n+1. The 0 expectation of le théorème d'arret des martingales means in practice roughly that the winnings of 2^n successful martingale gamblers will be outset by the huge loss of one misfortunate; the fear that this loss will not be honoured is what lead to the outlawing of this strategy.

Remarque 7.1. *If all martingale gamblers bound the time spent by n or the losses by $L=-2^n+1$, then we are allowed to apply le théorème d'arret des martingales, and find as usual that the fraction of winning martingale gamblers $p_0=\frac{L}{1+L}=\frac{2^n-1}{2^n}$ is very close to* 1. *The fraction of losers $1-p_0=2^{-n}$ is very small, but the potential loss is huge 2^n-1, averaging thus to* 0. *When $L\to\infty$ the bad second case somehow disappears by indefinite postponement)!* **Note :** *The expected duration may also be found to be $t_0=E_0T=2-2^{-n}$ by setting up a corresponding difference equation, for example. Donc, ici c'est S_t plutôt qui invalide la conclusion du théorème d'arret des martingales.*

Remarque 7.2. *While the assumptions of le théorème d'arret des martingales may look at first technical, they have however a clear meaning : by using "reckless" strategies (with unbounded stakes or borrowing) for very long times, a gambler may "beat" the odds, as illustrated by the doubling strategy, originally called "martingale", which gave this field its name.*[§] .

7.2 La ruine du joueur : fonctions harmoniques et théorème d'arrêt des martingales

Les fonctions harmoniques $f(X_t)$ fournissent un des exemples les plus basiques de martingales, et un des traits les plus basiques des fonctions harmoniques est qu'elles sont détérminées par leurs valeurs frontière. L'analogue pour les martingales de cette détérmination par les valeurs frontière est le théorème d'arrêt de Doob, et nous allons examiner maintenant son application a un des processus de Markov les plus basiques, la marche aléatoire simple.

Définition 7.1. *Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que $P(Z_n=1)=p\in]0,1[$. On appelle marche aléatoire simple la ligne brisée reliant les points $(n,S_n)_{n\geq 0}$ où $S_n=S_0+Z_1+\cdots+Z_n$ pour $n\geq 0$.*

§. For the history of martingales, one remembers that Paul Levy, Jean Ville, and Joseph Leo Doob were among the contributors of the June 28 – July 3 1948 Lyon meeting. Martingales, of which Levy and Ville were the pioneers in prewar France, thus returned from America after the war in the form of a theory elaborated by Doob and moved into the framework for probability and stochastic processes. Under the title " Application of the Theory of Martingales", Doob would show how this "Theory of Martingales" could be applied on one hand to the (strong) law of large numbers and on the other hand to statistical estimation. Yet the history of martingales must also take into account that Levy didnot recognize his own prewar techniques in Doob's martingales at Lyon, and that Ville never met Doob there. Although Fréchet's preface leaves the impression that all the contributors to the proceedings had been present at Lyon, Ville made it clear in a letter to Pierre Crépel that he was not present at Lyon and never met Doob. So Lyon symbolizes a missed opportunity. Of the three pioneers of martingales supposedly there, two were left at the side of the road, while the third made of martingales one of the masterpieces of his work. Voir Doob at Lyon : http ://www.jehps.net/juin2009/Locker.pdf et aussi http ://www.jehps.net/juin2009/MazliakShafer.pdf The Splendors and Miseries of Martingales, Laurent MAZLIAK and Glenn SHAFER, http ://www.jehps.net/juin2009/Mansuy.pdf The Origins of the Word "Martingale" Roger MANSUY

Exercice 7.1. *Soit* $S_0 = 0$. *Tracer le graphe de la marche aléatoire lorsque les 10 premières observées de* $(Z_n)_{n\geq 1}$ *sont* $-1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1$.

Exercice 7.2. La ruine du joueur : quelles chances de gagner et au bout de combien de temps ?
Soient $Z_1,\ Z_2, \dots$ *des v.a.i.i.d. et soit* $X_t = x + \sum_{i=1}^t Z_i$ *la marche aléatoire induite.*
Supposons que x *et* b *soient deux entiers avec* $0 < x < b$. *On définit*

$$T := \inf\{n,\ X_n = 0 \ ou\ X_n = b\} = \min[\tau_0, \tau_b].$$

La fortune initiale du joueur de pile ou face est représentée par x *et il compte s'arréter s'il a atteint* b *ou* 0. *On peut aussi interpréter ce modèle comme un jeu à deux : alors la fortune initiale du premier joueur est* x *et celle du second est* $b - x$. $X_n - x$ *représente alors le gain cumulé du premier joueur et* $x - X_n$ *les pertes cumulées du second. Chacun des joueurs stoppe quand il est ruiné, c.-à-d. quand* $X_n = 0$ *ou* $X_n = b$. *Soit* $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots,\ Z_n)$ *et* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\ \Omega\}$.

1) Les **martingales exponentielles de Wald**. *Trouver les valeurs de* ρ *pour les quelles* $M_t = \rho^{X_t}$ *est une martingale. Preciser ces valeurs pour la marche simple, quand* $Z_i = \pm 1$, *avec probas* $p, q = 1 - p$, *et* $0 < p < 1$.

R : M_t *est un produit de v. a. indépendantes, positives et de moyenne 1 ssi :* $\mathrm{E}[\rho^{\mathrm{Z_i}}] = 1$. *Pour la marche simple, on a* $p\rho + q\rho^{-1} = 1$. *Les racines sont* $\rho = 1$ *(pas intéréssant) et* $\rho = \frac{q}{p}$.

2) Calculer $\psi_x = \mathbb{P}_x(X_T = 0)$ *et* $t_x = E(T)$ *pour la marche simple sur* $[0, b]$, *par le théoreme d'arret des martingales appliqué aux martingales* $M_n = \rho^{S_n}$ *et* $N_n = S_n - nm$, *avec des valeurs de* ρ, m *choisies tel que ce sont des martingales, et en supposant que le théoreme d'arret est applicable.*

R : N_n *est une somme de variables aléatoires indépendantes sommables de moyenne nulle ssi* $m = p - q$. *On a une seule martingale de Wald, avec* $\rho = \frac{q}{p}$. *Le théoreme d'arret donne :* $\overline{\psi}_x = \mathbb{P}_x(X_T = b) = \frac{1-\rho^x}{1-\rho^b}, t_x = \frac{x - K\overline{\psi}_x}{q-p}$.

3) Comment justifier l'application du théoreme d'arret ?

R : *La martingale de Wald* M_n *est bornée, et la deuxième martingale a des mises bornées. En suite,* $\mathrm{E_x T} < \infty$ *est une conséquence du théorème Perron-Frobenius, car l'espace d'états et fini – voir l'exercice* (5.6) *pour plus des details. On peut aussi appliquer la méthode de 7.11 : "Tout ce qui a une chance positive d'arriver en temps fini se produira tôt ou tard, si on persévère", i.e.* $P_x[T < \infty] = 1$.

4) Obtenir les probabilités de ruine sur $[0, \infty)$ *quand* $p > q$, *par le théorème d'arrêt. Calculer aussi la fonction génératrice des probabilités de ruine.*

5) **Passage en haut de la marche aléatoire simple, avec tendance positive.** *Supposons* $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p, \mathbb{P}(Z_n = -1) = q = 1 - p < p$. *Soit* $T = \tau_1 = \inf\{n \geq 0;\ S_n = 1\}$ *qui est un temps d'arrêt. Calculer* $\mathrm{E_x T}$ *en utilisant le théorème d'arrêt des martingales, en supposant qu'on a déjà démontré* $\mathrm{E_x T} < \infty$.

6) Comment choisir $q = q(\gamma)$ *tel que* $e^{\gamma X(t) - q\, t}$ *soit une martingale ? Trouver les valeurs de* γ *pour les quelles* $e^{\gamma X(t)}$ *est une martingale.*

Exercice 7.3. Probabilités de ruine pour une marche continue en bas, avec $\mathrm{EZ_1} > 0$. *Calculer, en utilisant le théorème d'arrêt des martingales, les probabilités de ruine* $p_x = P_x[\tau_0 < \infty), x \in [1, \infty)$, *pour une marche avec* $\left\{p_2 = \frac{3}{8}, p_1 = \frac{1}{8}, p_{-1} = \frac{1}{2}\right\}$

Sol : $\mathrm{EZ}_1 > 0$ et la loi des grandes nombres implique $\mathbb{P}[T = \infty] > 0]$ et donc aucun des cas du théorème d'arrêt ne s'applique pas quand $b = \infty$, car le théorème d'arrêt ne permet pas des temps d'arrêt tq. $\mathbb{P}[T = \infty] > 0$!

Dommage, car on trouve facilement une martingale de Wald $M_t = r^{X(t)}$ satisfaisant $\lim[M_t | X(t) \to \infty] = 0$, en resolvant l'équation d'équilibre

$$\widetilde{p}(r) := E[r^{Z_\cdot}] = \sum_i p_i r^i = 1, r \in (0,1).$$

Par une "application optimiste" du théorème d'arrêt a cette martingale, on trouve une réponse raisonnable $r = \frac{2}{3}, \Psi(x) = r^x$, avec une interprétation claire,

$$r = \mathbb{P}_x[\tau_{x-1} < \infty].$$

Heureusement, pour une "application correcte", il suffit de remplacer T par le temps d'arrêt tronqué $T_N = \min(T, N)$, avec $N \to \infty$. On trouve

$$r^x = \mathrm{Er}^{\mathrm{X}_{\mathrm{T_N}}} = \mathrm{r}^{\mathrm{X_N}} \mathbb{P}_{\mathrm{x}}[\mathrm{T} > \mathrm{N}] + \mathrm{r}^0 \mathbb{P}_{\mathrm{x}}[\mathrm{T} \leq \mathrm{N}] \to_{\mathrm{N} \to \infty} \mathbb{P}_{\mathrm{x}}[\mathrm{T} < \infty] = \Psi(\mathrm{x}) \tag{7.1}$$

(le premier terme converge vers 0, car $EZ_1 > 0 \Longrightarrow P[X_N \to \infty] = 1$, et $|r| < 1$).

Exercice 7.4. *Calculer la probabilité de ruine $\Psi_x, x \in \mathbb{N}$, pour une marche sur les nombres naturelles, avec la distribution de chaque pas donné par :* $\left\{p_{-1} = \frac{8}{10}, p_1 = \frac{1}{10}, p_2 = \frac{1}{10}\right\}$.

Exercice 7.5. Probabilités de ruine pour une marche continue avec dépassement possible en bas. *Soit*

$$X_n = x + \sum_{i=1}^n Z_i, \quad Z_i = \begin{cases} 1, \text{ avec probabilité} & p_1 = \frac{8}{10} \\ -1, & p_{-1} = \frac{1}{10} \\ -2, & p_{-2} = \frac{1}{10} \end{cases},$$

avec Z_i i.i.d. Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \leq 0\}$

1. *$E[Z_1] > 0$?*
2. *Calculer par conditionnement les probabilités de ruine $\Psi(x) = P_x[T_0 < \infty], x \in \mathbb{N}$, pour cette marche. Montrer qu'elles sont positives.*
3. *Refaire 2., en utilisant le théorème d'arrêt des martingales.*
4. *Montrer que 1 est toujours une racine de l'équationd'équilibre , et simplifier cette équationpar $r-1$, dans le cas $Z_i \in \{1, -1, 2\}$.*
5. *Calculer la fonction génératrice des probabilités de ruine.*

Solution

1. $E(Z_1) = 1.\frac{8}{10} + (-1).\frac{1}{10} + (-2).\frac{1}{10} = \frac{1}{2} > 0$

2. Voila une solution directe, par conditionnement sur le premier pas :

$$\begin{aligned} \Psi(x) = P_x[T_0 < \infty] &= \sum_{-2}^{1} P[Z_1 = i].P_x[T_0 < \infty | x + Z_1 = x + i] \\ &= \sum_{-2}^{1} P[Z_1 = i].P_{x+i}[T_0 < \infty] = \sum_{-2}^{1} p_i.\Psi(x+i) \\ &= \frac{8}{10}.\Psi(x+1) + \frac{1}{10}.\Psi(x-1) + \frac{1}{10}.\Psi(x-2),\ x \geq 1. \end{aligned}$$

Les CF sont :

$$\begin{cases} \Psi(\infty) & = 0 \\ \Psi(0) & = 1 \\ \Psi(-1) & = 1. \end{cases}$$

(il est aussi vrai que $\Psi(-2) = 1, \ldots$ mais -2 ne peut pas être visité à partir de l'espace d'états $\{1, 2, \ldots\}$). On cherche $\Psi(x) = r^x$.

$$\begin{aligned} \text{On a } r^x = & \frac{8}{10}.r^{x+1} + \frac{1}{10}.r^{x-1} + \frac{1}{10}.r^{x-2} \\ \Rightarrow & r^2 = \frac{8}{10}.r^3 + \frac{1}{10}.r + \frac{1}{10} \\ \Rightarrow & (r-1)(2.r-1)(4r+1) = 0 \\ \Rightarrow & \Psi(x) = A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(-\frac{1}{4})^x \end{aligned}$$

$\Psi(0) = \Psi(-1) = 1$ sont satisfaites ssi $A_1 = \frac{5}{6}, A_2 = \frac{1}{6}$. Les probabilités de ruine sont :

$$\Psi(x) = \frac{5}{6}.(\frac{1}{2})^x + \frac{1}{6}.(-\frac{1}{4})^x$$

3. On decompose $\Psi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x), \phi_i(x) = \mathbb{P}_x[T < \infty, X_T = -i], i = 0, 1$. On applique le théorème d'arrêt appliqué aux deux martingales arrêtées de Wald $M_t = r_i^{X(t)}, i \in \{1, 2\}$ (comme en (7.1)). Les équations d'equilibre $\widetilde{p}(r_i) = 0, i \in \{1, 2\}$ où $\widetilde{p}(\rho) = \widetilde{p}_Z(\rho)$ est la fonction génératrice des probabilités impliquent les équations d'arêt $r_i^x = \sum_{j=0}^{1} \phi_j(x) r_i^{-j}, r_i, i \in \{1, 2\}, x \geq 1$.

On résout le système de type Vandermonde

$$\begin{pmatrix} r_1^x \\ r_2^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_1^{-1} \\ 1 & r_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \end{pmatrix} = (r_2^{-1} - r_1^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} r_2^{-1} & -r_1^{-1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^x \\ r_2^x \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_1^{x+1} - r_2^{x+1}}{r_1 - r_2} \\ \frac{r_1 r_2^{x+1} - r_2 r_1^{x+1}}{r_1 - r_2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \Psi(x) = r_1^{x+1} \frac{1 - r_2}{r_1 - r_2} + r_2^{x+1} \frac{r_1 - 1}{r_1 - r_2}$$

et avec $r_1 = 1/2, r_2 = -1/4$, on retrouve les probabilités de ruine.

4. l'équationd'équilibre simplifié est $p_1 r^2 - (p_{-1} + p_{-2})r - p_{-2} = 0$

5. $\widetilde{\Psi}(z) = \frac{z^2+7z-8}{10z(1-\phi_Z(z))}$.

Remarque 7.3. *Les équations d'arrêt pour $x = 1$ (analogues aux équations d'équilibre) donnent*

$$\begin{cases} r_1 = \phi_0(1) + \phi_1(1) r_1^{-1} \\ r_2 = \phi_0(1) + \phi_1(1) r_2^{-1} \end{cases}$$

Les quantités

$$\begin{pmatrix} \phi_0(1) \\ \phi_1(1) \end{pmatrix} = (r_2^{-1} - r_1^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} r_2^{-1} & -r_1^{-1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 \\ -r_1 r_2 \end{pmatrix}$$

et leur somme $\Psi(1) = \phi_0(1) + \phi_1(1) = r_1 + r_2 - r_1 r_2 = \frac{E[Z_1; Z_1 < 0]}{P[Z_1 = 1]}$ peuvent être obtenues directement, car elles sont proportionelles aux probabilités des queues : $\{P[Z_1 \leq -1], P[Z_1 \leq -2]\}$!!!

Exercice 7.6. *Donner les probabilités de ruine et l'espérance du temps de ruine pour la marche avec la distribution de chaque pas* Z_i *donnée par :* $\left\{p_1 = \frac{1}{6}, p_{-1} = \frac{1}{12}, p_{-2} = \frac{3}{4}\right\}$.

R : $\Psi(n) = \frac{8}{9}(\frac{2}{3})^n + \frac{1}{9}(\frac{-1}{3})^n$

7.3 Théorème d'arrêt à un temps tronqué

Tenant compte du fait que le théorème d'arrêt de Doob est assez compliqué pour des temps d'arrêt T non bornés, il est naturel de considerer d'abord des "temps tronqués" $T \wedge n_0$ pour n_0 fixe. Pour ces temps le théorème d'arrêt est assez facile, est même un resultat plus fort, qui nous assure que le processus obtenu en regardant une martingale aux temps d'arrêt tronqués progressivement est aussi une martingale.

Théorème 7.1. Théorème des processus arrêtés *a) Si X est une martingale (respectivement sur-martingale, sous-martingale) et T un temps d'arrêt, alors la processus arrêté $X^T = (X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est aussi une martingale (resp. sur-martingale, sous-martingale).*

b) En particulier, on a pour tout entier n,

$$\mathbb{E}(X_n^T) = \mathbb{E}(X_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(X_0), \quad \textit{(resp. } \leq, \geq\textit{)}$$

Remarque 7.4. *Ce théorème dit en outre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{T\wedge n}$ est dans $\mathbb{L}^1$. Il ne suppose aucune condition sur le temps d'arrêt.*

Démonstration. *Démonstration du théorème de sur-martingales arrêtées*, a). On a juste à montrer le théorème pour X surmartingale puisque X sous-martingale équivaut à $-X$ sur-martingale et X est une martingale ssi c'est à la fois une sur-martingale et une sous-martingale.

1) $X_{T\wedge n}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable car

$$X_{T\wedge n}(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k(\omega) 1_{T(\omega)=k} + X_n(\omega) 1_{\{T(\omega)\geq n\}}$$

C'est une somme de variables aléatoires $\mathcal{F}_n$-mesurables.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{T\wedge n}$ est intégrable car $|X_{T\wedge n}| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |X_k|\right) + |X_n|$.

3)On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{T\wedge n}|\mathcal{F}_{n-1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_k 1_{T=k}|\mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(X_n 1_{T\geq n}|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 1_{T=k}\mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{n-1}) + 1_{T\geq n}\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} 1_{T=k} X_k + 1_{T\geq n} X_{n-1} = X_{T\wedge n-1},
\end{aligned}$$

et la derniére inégalité est une égalité si X_n est une martingale. □

Définition 7.2. *Une suite des va $C_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ (comme $C_n = 1_{T\geq n}$ de la démonstration anterieure s'apelle previsible.*

Remarque 7.5. *Le théorème 7.1 b) généralise* $\mathrm{EX_n} = \mathrm{X_0}, \forall \mathrm{n}$ *(qui est une conséquence immédiate de la définition des martingales).*

A-t-on aussi $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$? Un contre-exemple, approfondi en section 7.4, est le suivant. Soit $(X_n)_n$ une marche aléatoire telle que $X_0 = 0$ et $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = 0$. $(X_n)_n$ est une martingale. Soit $T = \inf\{n \in \mathbb{N};\ X_n = 1\}$ le temps d'entrée en 1. On voit que c'ést un temps d'arrêt (par rapport à la filtration naturelle de X). Pourtant, on a

$$\mathbb{E}(X_T) = 1 \neq \mathbb{E}(X_0) = 0$$

Remarque 7.6. *Le théorème 7.1 est la version la plus simple du théorème d'arrêt des martingales, et peut être aussi utilisé comme pas intermédiaire pour le démontrer.*

Exercice 7.7. *Demontrer le théorème de Doob* (5.1) *le cas 1.*

Exercice 7.8. *Demontrer le théorème de Doob* (5.1) *le cas 3 b), en utilisant la décomposition :*

$$S_T = S_T \mathbb{1}_{T<n} + S_n \mathbb{1}_{T \geq n}$$

avec $n \to \infty$*.*

7.4 (*)La marche aléatoire simple symmétrique, sur un intervalle infini

Exercice 7.9. Le temps d'atteinte espéré $t(x) = \mathrm{E_x T}$**, pour la marche aléatoire simple, symétrique** $S_n = Z_1 + ... + Z_n$. *Comme la martingale du cas asymétrique ne marche pas ici, on utilisera la martingale :*

$$M_n = S_n^2 - n.$$

a) Montrez que M_n *est une martingale par rapport à* $\sigma(Z_1, ..., Z_n)$*. b) Montrez que si le théorème d'arrêt des martingales est applicable sur l'intervalle* $[L, K]$*, alors :*

$$t_x = E_x[min(T_L, T_K)] = (K - x)(x - L), \tag{7.2}$$

c.-à-d. l'espace d'états du temps d'atteinte de $\{L, K\}$ *est le produit des distances du capital initial* x *aux bords de l'intervalle. c) Comment justifier l'application du théorème d'arrêt des martingales ?*

R : a) To show that M_n is indeed a martingale we obtain first a formula for its increments : $M_{n+1} - M_n = (S_n + Z_{n+1})^2 - n - 1 - (X_n^2 - n) = 2Z_{n+1}X_n + Z_{n+1}^2 - 1 = 2Z_{n+1}X_n$. We check now the conditional expectation of the increments.

$$E[M_{n+1} - M_n|F_n] = E[2Z_{n+1}X_n|F_n] = 2X_n E[Z_{n+1}|F_n] = 0.$$

b) We apply now the Optional Stopping Theorem to the martingale $M_n = X_n^2 - n$. The Optional Stopping Theorem yields :

$$\mathrm{E_x M_T} = \mathrm{E_x}(\mathrm{X_T^2} - \mathrm{T}) = \mathrm{X_0^2} = \mathrm{x}^2 \tag{7.3}$$

Conditioning on the last state we get

$$\mathrm{E_x}(\mathrm{X_T^2} - \mathrm{T}) = \mathrm{K}^2 \mathbb{P}\{\mathrm{X_T} = \mathrm{K}\} + \mathrm{L}^2 \mathbb{P}\{\mathrm{X_T} = \mathrm{L}\} - \mathrm{E_x T}. \tag{7.4}$$

The probabilities of winning/losing for the martingale X_T were found before to be

$$P[X_T = K] = \frac{x-L}{K-L}, \quad P[X_T = L] = \frac{K-x}{K-L}$$

Plugging these in (7.4) gives

$$K^2 \frac{x-L}{K-L} + L^2 \frac{K-x}{K-L} - E_x T = x^2$$

which after simplifying yields

$$t_x = E_x[min(T_L, T_K)] = (K-x)(x-L)$$

c) This martingale is not bounded below (since T can take arbitrarily large values), so we can't apply the third set of conditions. Pour la deuxième pair des conditions, nous savons que les increments de M_n sont bornés : $|2Z_{n+1}X_n + Z_{n+1}^2 - 1| = |2Z_{n+1}X_n| \leq 2\max(|L|, K)$ Aussi, comme remarqué déjà dans la solution de l'exercice 5.6, le fait que ET $< \infty$ est assuré par la théorie spectrale des matrices sous-stochastiques. L'option du calcul direct (très simple ici) par conditionnement sur le premier pas serait illogique ici, car ça reviendra a justifier cette méthode en la remplaçant par une autre !

Remarque 7.7. *Pour la marche symmétrique qui reste sur place avec proba* $1 - 2p > 0$ *on trouve*

$$t_x = E_x[min(T_L, T_K)] = \frac{(K-x)(x-L)}{2p}. \tag{7.5}$$

Remarque 7.8. *Letting* $L \to -\infty$ *and* $K = x + 1$ *we find that the expected duration of a game for winning just one buck (with no lower bound on the losses) is infinite, which is quite surprising.*

Définition 7.3. *Un état* i *d'une chaîne de Markov est appelé transient ssi sa probabilité de retour* P_i *satisfait* $P_i < 1$*, ou si l'espérance du nb. des retours dans ce point satisfait* $n_i = E[N_i^r] < \infty$*. Dans le cas contraire, état est appelé récurrent.*

Remarque 7.9. *Comme* N_i^r *a une distribution géométrique, il suit que* $n_i = 1/(1 - P_i)$*. Typiquement, il est plus facile de montrer* $n_i < \infty$ *que de travailler avec* P_i*, car*

$$n_i = \sum_{k=0}^{\infty} P_i[S_k = i].$$

Remarque 7.10. *Il s'avère que la marche aléatoire simple est récurrente ssi elle est symmétrique.*

Exercice 7.10. *a. On note* $A_k = \{S_k = 0\}$*. Calculer* $p_k = P_0(A_k)$ *(la probabilité de retour en* 0 *après* k *pas), pour une marche aléatoire simple.*

R $p_{2k} = \binom{2k}{k}(pq)^k$.

b. Calculer l'esperance du nombre de retours en 0

$$n_r = E[N_r] = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$$

par le developpement binomial (fractionnaire) de Newton §

$$1/(1-4z)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} z^k. \tag{7.6}$$

R : $n_r = \sum_{k=0}^{\infty} P[S_{2k}=0] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} (pq)^k = 1/(1-4pq)^{1/2} = |2p-1|^{-1} = |p-q|^{-1}$.

Remarque 7.11. *La dernière expression est valable aussi pour la marche paresseuse avec $p+q<1$.*

c. *Conclure que n_r est finie ssi $p \neq 1/2$, et que la probabilité de retour en 0 est $P_r = 1 - \frac{1}{n_r} = 2\min(p,q)$.*

d. *Montrer que si $p \neq 1/2$, alors avec probabilité 1, la marche aléatoire traverse l'axe des abscisses un nombre fini de fois.*

R : $\sum_k P(A_k) < \infty \Longrightarrow P[A_n i.s.] = P[\textit{traverser l'axe des abscisses un nombre infini de fois}] = 0$

Remarque 7.12. La marche aléatoire simple symétrique. (*) *En conclusion, il y a récurrence ssi $p=q$. Dans ce cas, on est sur de rentrer en 0, mais on peut montrer que le temps espéré de retour est ∞* ¶ *. En effet, $T = \inf\{n \geq 0;\ S_n = 1\}$. Ici, la conclusion du théorème d'arrêt pour la martingale S_n est fausse, car $\mathrm{E}_0[\mathrm{S_T}] = 1$. Comme les mises sont finies et le cas 2) ne s'applique pas, il suit que $\mathrm{E}_0[\mathrm{T}] = \infty$!*

On verra maintenant que $\mathbb{P}_0[T=\infty] = 0$ (mais comme les pertes possibles sont infinies, le cas 3. a) ne s'applique non plus). Nous allons calculer la distribution de T, en utilisant la **martingale exponentielle** *de moyenne 1*

$$M_n^\theta = \left(\frac{1}{\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta \mathrm{Z}_\cdot}]}\right)^n \exp(\theta S_n) = \left(\frac{1}{\cosh\theta}\right)^n \exp(\theta S_n)$$

(les martingales de Wald sont les cas particuliers obtenus en choisissant θ tq $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta \mathrm{Z}_\cdot}] = 1$].

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la martingale arrêtée en T $M_{T\wedge n}^\theta$. On a :

$$\mathbb{E}(M_{T\wedge n}^\theta) = 1 = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{\cosh\theta}\right)^{T\wedge n} \exp(\theta S_{T\wedge n})\right)$$

Soit $\theta > 0$. On remarque que la martingale arrêtée est bornée uniformément par $(\cosh\theta)^{-1}$, et que $\mathbb{P}$ presque sùrement,

$$\lim_{n\to\infty} M_{T\wedge n}^\theta = 1_{\{T<\infty\}} \frac{e^\theta}{(\cosh\theta)^T}$$

§. Le résultat (7.6) peut être obtenue en vérifiant le quotient des termes consécutifs dans la série ci-dessus ; on aperçoit alors qu'on a à faire avec la série hypergéométrique ${}_1F_0[{}^{1/2}_{-}; -4z] = \frac{1}{(1-4z)^{1/2}}$ (ce genre des formules explicites, peuvent être obtenues facilement avec un logiciel symbolique). On peut aussi utiliser la représentation $P_k = Coef(0, \mathrm{Ez}^{\mathrm{S_k}})$. On trouve $n_r = \sum_{k=0}^{\infty} Coef(0, \mathrm{Ez}^{\mathrm{S_k}}) = \mathrm{Coef}(0, \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} (\mathrm{pz+qz^{-1}})^{\mathrm{k}}) = \mathrm{Coef}(0, \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z-pz^2-q}}) = \mathrm{Coef}(0, \frac{1}{\mathrm{p-q}}(\frac{1}{1-\mathrm{z}} - \frac{1}{1-\mathrm{pz/q}})) = ...$, (cette méthode aboutit aussi en deux dimensions, en ramenant à des intégrales elliptiques).

¶. Ce cas, appellé nul récurrent, peut apparaître seulement sur les espace d'états infinis. Dans l'autre cas, appelé récurrent positif, des chaînes récurrentes avec temps espérés de retour $n_r(i) < \infty$, on peut vérifier que la distribution stationnaire est $\pi_i = n_r(i)^{-1}$.

[car sur $\{T=\infty\}$, le processus S_t avec "taboo" d'entrer les nombres positives, converge vers $-\infty$, et la martingale arrêtée converge vers 0 pour $\theta>0$]. Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}\left[1_{\{T<+\infty\}}\frac{1}{(\cosh\theta)^T}\right]=e^{-\theta}$$

En faisant tendre θ vers 0 et en utilisant le théorème de convergence monotone, on déduit que $I\!P(T<+\infty)=1$. On peut donc oublier l'indicatrice dans l'égalité précédente. Effectuant alors le changement de variables $\alpha=1/\cosh(\theta)$, on obtient

$$\mathbb{E}(\alpha^T)=\frac{1}{\alpha}\left[1-\sqrt{1-\alpha^2}\right]=\frac{2a}{\alpha}\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}=\frac{2a}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}C_k a^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{2^{2k+1}}\alpha^{2k+1},\ 4a=\alpha^2,$$

oú $C_k=\frac{\binom{2k}{k}}{k+1}$ sont les nombres de Catalan. En particulier, on a

$$I\!P(T=2k)=0 \text{ et } I\!P(T=2k+1)=\frac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}=\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}(k+1)!}=(-1)^{k+1}\binom{1/2}{k+1}.$$

7.5 (*) Comment démontrer qu'un temps d'arret T est fini p.s.

Quand l'espace d'états n'est pas fini, il est quand-même possible de démontrer que T est fini p.s par l'astuce suivante :

Exercice 7.11. "Tout ce qui a une chance positive d'arriver après un nombre fini des pas se produira tôt ou tard, si on persevere" *(Williams, exercice E10.5 p. 233)*

Soit $\mathcal{F}$ une filtration (avec $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\ \Omega\}$ et T un temps d'arret tels que pour un certain $N\in\mathbb{N}$ et un certain $\varepsilon>0$,

$$\forall n,\ \ \mathbb{P}(T\le n+N|\mathcal{F}_n)>\varepsilon,\ \ p.s.$$

1) Montrer par récurrence en utilisant $\mathbb{P}(T>kN)=\mathbb{P}(T>kN;T>(k-1)N)$ que pour $k=1,2,\ldots,$,

$$\mathbb{P}(T>kN)\le(1-\varepsilon)^k.$$

1) Réponse : On procède par récurrence. Quand $n=0$, on a bien la propriété par hypothèse car $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$ et donc $\mathbb{P}(T>N)1\!\!1_\Omega=\mathbb{P}(T>N|\mathcal{F}_0)=1-\mathbb{P}(T\le N|\mathcal{F}_0)\le 1-\varepsilon$. De plus,

$$\mathbb{P}(T>kN)=\mathbb{P}(T>kN;T>(k-1)N)=\int_{T>(k-1)N}1\!\!1_{T>kN}=\int_{T>(k-1)N}\mathrm{E}(1\!\!1_{\mathrm{T>kN}}|\mathcal{F}_{\mathrm{(k-1)N}})$$

(car l'ensemble $[T>(k-1)N]$ est $\mathcal{F}_{(k-1)N}$-mesurable)

$$\le(1-\varepsilon)\mathbb{P}(T>(k-1)N)\ \ \text{par hypothèse.}$$

2) En déduire que $\mathrm{E(T)}<\infty$.

2) Réponse : On a

$$\mathrm{E(T)}=\sum_{\mathrm{n}}\mathrm{n}\mathbb{P}(\mathrm{T=n})\le\sum_{\mathrm{n}}\mathrm{n}\mathbb{P}(\mathrm{T>n-1})\le\sum_{\mathrm{k}}\sum_{\mathrm{(k-1)N\le n\le kN}}\mathrm{n}\mathbb{P}(\mathrm{T>n-1})$$

$$\le N\sum_k kN\mathbb{P}(T>(k-1)N-1)\le N\sum_k kN\mathbb{P}(T>(k-2)N)\le N^2\sum_k k(1-\varepsilon)^{k-2}<\infty$$

Chapitre 8

Examens d'entraînement

8.1 Examen 1

Tous les documents d'aide sont interdits

1. On considère une pièce non équilibrée que l'on lance un nombre indéterminé de fois. La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$, et la probabilité de sortir face est égale à $q = 1 - p$. Les lancers sont indépendants. On note N le temps d'attente du premier pile, c'est-à-dire le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir le premier pile, en incluant le pile ($N \in \{1, 2, ...\}$).
   (a) Formuler une équation pour le premier moment $m = EN$ par la méthode du conditionnement sur le premier pas, et la résoudre. Quelle est la loi de N ? (on ne demande pas de justifier)
   (b) Trouvez l'espérance $m_2 = EN_2$ du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient **deux piles consécutives**, en incluant les deux derniers résultats.
   (c) Calculer la fonction génératrice des probabilités $p^*_{N^{(2)'}}(z)$, où $N^{(2)'}$ est le nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient deux piles consécutives, en **excluant les deux derniers résultats**.
   (d) Trouvez l'espérance $\widetilde{m}$ du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient **pile-face-pile** (consécutives), en incluant les trois derniers résultats.
   Indication : On pourrait utiliser un processus de Markov qui retient l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu, et qui contient l'état final désiré, ainsi que tous ses préfixes.
2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que pour $n \geq 1$ X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_n = n$.
   (a) Calculer la fonction de répartition (f.d.r.) de $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ pour $n \geq 1$.
   (b) Montrer que $Y_n \xrightarrow{P} 0$.
   (c) Montrer que $Y_n \xrightarrow{p.s.} 0$.
   (d) Determiner une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ telle que $E\alpha_n Y_n = 1$. Montrer que pour cette suite on a $\alpha_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ où l'on précisera la loi de Y. Est-ce qu'il existe d'autres suites

$(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telles que $\alpha_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$?

3. Soit

$$X_n = x + \sum_{i=1}^{n} Z_i, \quad Z_i = \begin{cases} -1, \text{ avec probabilité} & p_{-1} = \frac{1}{2} \\ 1, & p_1 = \frac{1}{8} \\ 2, & p_2 = \frac{3}{8} \end{cases},$$

avec Z_i i.i.d. Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \leq 0\}$

(a) Est-ce que $E[Z_1] > 0$?

(b) Calculer, en utilisant le conditionnement sur le premier pas, les probabilités de ruine $\psi(x) = P_x[T_0 < \infty], x \in \mathbb{N}$.

(c) Recalculer les probabilités de ruine, en utilisant le théorème d'arret des martingales. *Ind : Cherchez dez martingales de la forme* $M(n) = \rho^{X_n}$*, avec* ρ *judicieusement choisi.*

(d) Donner les probabilités de ruine et l'espérance du temps de ruine pour la marche «renversée», avec la distribution de chaque pas $Z_i' = -Z_i$ donnée par : $\left\{p_1 = \frac{1}{2}, p_{-1} = \frac{1}{8}, p_{-2} = \frac{3}{8}\right\}$.

Solutions :

1. (a) Le conditionnement après un pas donne $m = p + q(1+m)$, l'espérance est $m = \frac{1}{p}$.

(b) Le conditionnement après un pas donne $\begin{cases} m_2 = p(1+m_1) + q(1+m_2) \\ m_1 = p + q(1+m_2) \end{cases} \Longrightarrow$ $m_2 = \frac{p+1}{p^2}, m_1 = \frac{1}{p^2}$.

Remarque 8.1. *La méthode «arbre developpé jusqu'au feuilles succés/recommence» («divide et conquera») produit directement l'équation* $m_2 = q(1+m_2) + pq(2+m_2) + 2p^2$

(c) Le conditionnement après un pas donne

$$\begin{cases} m_3 = p(1+m_2) + q\,(1+m_3) \\ m_2 = q(1+m_1) + p\,(1+m_2) \\ m_1 = p + q\,(1+m_3) \end{cases}$$

avec solutions $\widetilde{m} = m_3 = \frac{1+pq}{p^2 q}, m_1 = \frac{p+1}{p^2}, m_2 = \frac{1}{p^2 q}$

Remarque 8.2. *La méthode «arbre» identifie une nouvelle inconnue «persistente/incontournable» dans le sens que l'arbre «developpé jusqu'au feuilles» est infini. Ici, on ne peut pas remplacer le conditionnement après un pas par des astuces ! On peut aussi utiliser* $\boldsymbol{m} = (I-Q)^{-1}\mathbf{1}, Q = \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. (a) La fonction de répartition (f.d.r.) de $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ est $F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = 1 - P(Y_n > y) = 1 - \exp(-yn(n+1)/2)$ si $y > 0$ et 0 sinon (car $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$).

(b) $Y_n \xrightarrow{P} 0$ car $\forall \varepsilon > 0$, $P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n > \varepsilon) = \exp(-\varepsilon n(n+1)/2) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

(c) $Y_n \xrightarrow{p.s.} 0$, car $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n\geq 1} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} P(Y_n > \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} \exp(-\varepsilon n(n+1)/2) \leq \sum_{n\geq 1} \exp(-\varepsilon n/2) = \sum_{n\geq 1}(\exp(-\varepsilon/2))^n < +\infty$.

(d) $\alpha_n = (EY_n)^{-1} = \frac{n(n+1)}{2}$ $P(\alpha_n Y_n \leq y) = P(n(n+1)Y_n/2 \leq y) = F_{Y_n}(2y/(n(n+1))) = (1-\exp(-y))1_{\{y>0\}}$. Donc pour $\alpha_n = n(n+1)/2$ et $Y \sim \mathcal{E}(1)$ on a $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$. Le résultat de convergence reste identique si l'on prend $\alpha_n = n^2/2$, donc le choix n'est pas unique.

3. (a) $E[Z_1] = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}.2 + \frac{1}{2}(-1) = \frac{3}{8} > 0$

(b) Les probabilités de ruine satisfont $\Psi_x = \frac{1}{8}\Psi_{x+1} + \frac{3}{8}\Psi_{x+2} + \frac{1}{2}\Psi_{x-1}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine plus petite que 1 de

$$3\rho^3/8+\rho^2/8-\rho+1/2 = (\rho-1)(3\rho^2+4\rho-4) = \frac{1}{8}(\rho-1)(\rho+2)(3\rho-2) \Longrightarrow \Psi_x = (\frac{2}{3})^x$$

(c)

(d) $E[Z_1'] = -E[Z_1] = \frac{1}{8} - \frac{6}{8} + \frac{4}{8} = -\frac{3}{8} < 0$ $t_x = 1 + \frac{3}{8}t_{x+1} + \frac{1}{8}t_{x-1} + \frac{1}{2}t_{x-2}, t_0 = 0$ Sol homogène engendrée par $1^x, r_1^x, r_2^x, \quad r_1 = -\frac{1}{2}, r_2 = \frac{3}{2} \geq 1$. Sol particulière $t_x = \frac{x}{-E[Z_1]} = \frac{8x}{3}$. Sol finale ... Les probabilités de ruine sont $\psi_x = 1, \forall x$ (car $E[Z_1] < 0$).

8.2 Examen 2

1. **La marche paresseuse :** Soit X_n une chaîne de Markov sur $\{0, 1, 2, ..., B\}, B \in \mathbb{N}$, avec 0 et B états absorbants, et

$$\begin{aligned} P(i, i+1) &= p\, f_i, \\ P(i, i-1) &= q\, f_i, \\ P(i, i) &= 1-(p+q)f_i, \\ P(i, i+k) = 0 \text{ pour} |k| &> 2, \forall i \in \{1, 2, ..., B-1\} \end{aligned}$$

(on suppose $0 < p, q, f_i$ et $f_i(p+q) < 1, \forall i \in \{1, 2, ..., B-1\}$). Nous arretons le processus au temps d'arrêt $T = \inf\{n : X_n \notin [1, B-1]\}$ auquel le processus sort de l'intervalle $[1, B-1]$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par P_x, E_x la mesure et espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$).

(a) Classifiez les pbs suivantes $\Psi_x = \mathbb{P}_x\{X_T = B\}$, $g_x = E_x[X_T]$, $t_x = \mathrm{E_x T}$, $c_x = E_x[\sum_0^{T-1} X_t]$, et $d_x = E_x[\sum_0^{T-1} X_t^2]$ comme des pbs de prix final ou de coùt accumulé. Quelles sont les équations de récurrence et les conditions frontière correspondant a chaque pb ?

(b) Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour Ψ_x et g_x quand $p = q < 1/2, f_i = 1$, et quand $p = q < 1/2, f_i = 1/i$.

(c) Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour t_x et c_x quand $p < q \leq 1/2, f_i = 1$, et $B = \infty$.

2. **Probabilités de ruine .** Soit

$$X_n = x + \sum_{i=1}^{n} Z_i, \quad Z_i = \begin{cases} 1, \text{ avec probabilité} & p_1 = \frac{3}{4} \\ -1, & p_{-1} = \frac{1}{12} \\ -2, & p_{-2} = \frac{1}{6} \end{cases},$$

avec Z_i i.i.d. Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \leq 0\}$
a) Est-ce que $E[Z_1] > 0$?
b) Calculer les probabilités de ruine $\phi_i(x) = P_x[T_0 < \infty, X_{T_0} = -i], i = 0, 1, x \in \mathbb{N}$.
c) Recalculer les probabilités de ruine, et les probabilités de ruine $\phi_i(x)$ en utilisant le théorème d'arret des martingales.

3. **La ruine du joueur en utilisant les martingales.**
Soient $X_1,\ X_2, \ldots$ des v.a.i.i.d. avec $P(X = 1) = p$, $P(X = -1) = q = 1 - p$ et $0 < p < 1$. Supposons que x et b soient deux entiers avec $0 < x < b$. On définit

$$S_n := x + X_1 + \cdots + X_n, \quad T := \inf\{n,\ S_n = 0 \text{ ou } S_n = b\}.$$

La fortune initiale du joueur de pile ou face est représentée par x et il compte s'arréter s'il a atteint b ou 0. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots,\ X_n)$ et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\ \Omega\}$.

(a) Comment choisir les valeurs de ρ, m tel que les processus

$$M_n = \rho^{S_n}, \quad N_n = S_n - nm$$

soient des martingales ?

(b) Calculer $\Psi_x = \mathbb{P}(S_T = 0)$ par le théorême d'arrêt des martingales appliqué à $M_n = \rho^{S_n}$, en supposant que le théorême d'arrêt est applicable.

(c) Calculer $t_x = E(T)$ par le théorême d'arrêt des martingales appliqué à $N_n = S_n - nm$, en supposant que le théorême d'arrêt est applicable.

(d) Donnez les valeurs specifiques obtenues pour ρ, m, Ψ_x et t_x si $p = 2/3, q = 1/3$.

(e) (*) Justifier l'application du théorême d'arrêt, en montrant que $E_x T < \infty$ par le principe de la "persévérance" (tout ce qui a une chance positive constante d'arriver aprés un nombre fini des pas se produira tôt ou tard), i.e. montrer qu'il existe un certain $N \in \mathbb{N}$ et un certain $\varepsilon > 0$, t.q.

$$\forall n,\ \ \mathbb{P}(T \leq n + N | \mathcal{F}_n) > \varepsilon, \text{ p.s.} \tag{8.1}$$

Solutions :

1. (a) Soit $(Gf)_x = p\ (f_{x+1} - f_x) + q\ (f_{x-1} - f_x)$ l'opérateur du cas "non paresseux",(sauf que maintenant $p + q < 1$. Les équations sont respectivement :

$$(Gp)_x = 0, \Psi_K = 1, \Psi_0 = 0$$
$$(Gg)_x = 0, g_K = K, g_0 = 0$$
$$f_x(Gt)_x + 1 = 0, t_K = 0, t_0 = 0$$

La partie homogène des équations est exactement la même comme pour une marche «non paresseuse», mais la partie non homogène des équations est différente.

(b) Pour Ψ_x et g_x on obtient les mêmes équations (dans les deux cas de f_i) comme pour une marche symétrique avec $p = 1/2$, c.-à-d. :

$$\begin{aligned} 0 &= p(\Psi_{x+1} - 2\Psi_x + \Psi_{x-1}) \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ \Psi_K &= 1, \quad \Psi_0 = 0 \end{aligned}$$

et donc les mêmes réponses $\Psi_x = \frac{x}{K}, \quad g_x = x$.

(c) Pour $t_x = E_x[T], p < q, B = \infty$ (temps de sortie espéré) on trouve :

$$\begin{aligned} pt_{x+1} - (p+q)t_x + qt_{x-1} + 1 = 0 \quad \text{for any } 1 \leq x \\ t_0 = 0 \end{aligned}$$

avec solution $t_x = A_1 + A_2(\frac{q}{p})^x + \Psi_0(x), \quad \Psi_0(x) = \frac{x}{q-p}, A_2 + A_1 = 0, A_2 = 0, A_1 = 0$. **Note :** La condition $t(B) = 0$ cesse d' être vraie pour $B = \infty$; par contre, $t(\infty)$ ne peut pas «être trop grand» (augmenter exponentiellement) non plus, comme il serait le cas si $A_2 \neq 0$.

2. a) b) Les probabilités de ruine satisfont $\Psi_x = \frac{3}{4}\Psi_{x+1} + \frac{1}{12}\Psi_{x-1} + \frac{1}{6}\Psi_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine de

$$\frac{3}{4}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{12}r + \frac{1}{6} = (\rho - 1)(\frac{3}{4}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho - \frac{1}{12}) = \frac{3}{4}(\rho - 1)(\rho - 2/3)(\rho + 1/3)$$

$\Psi_x = A_1(\frac{2}{3})^x + A_2(\frac{-1}{3})^x$ satisfait $\Psi_0 = \Psi_{-1} = 1$ ssi $A_1 = 8/9, A_2 = 1/9$.

3. (a) M_n est un produit de v. a. indépendantes, positives et de moyenne 1 ssi : $E[\rho^{Z_i}] = p\rho + q\rho^{-1} = 1$. Les racines sont $\rho = 1$ (pas intéréssant) et $\rho = \frac{q}{p}$.
   N_n est une somme de v.a. aléatoires indépendantes sommables de moyenne nulle ssi $m = p - q$.

   b), c) Le théorême d'arrêt pour M_n donne : $\Psi_x = \frac{\rho^x - \rho^b}{1 - \rho^b}$, et pour N_n, $t_x = \frac{(1-\Psi_x)b - x}{q-p}$.

   e) $N = b, \epsilon = p^b$.

8.3 Examen 3

Tous les documents d'aide sont interdits

1. Soit X une variable aléatoire continue de densité $f(x) = (x/2)\mathbb{1}_{[0,2]}$. Déterminer les lois de a) $Z_1 = min(X, 2 - X)$ et b) $Z_2 = min(X, \frac{X+1}{3}, 2 - X)$.

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de densité $f(x) = (x/2)\mathbb{1}_{[0,2]}$. Soit $X_{(1)} \leq ... \leq X_{(n)}$ les statistiques d'ordre.

   a. Montrer que $X_{(n)} \xrightarrow{P} X \sim \delta_a$, où a est un nombre a déterminer.

   b. Montrer que $X_{(n)} \xrightarrow{p.s.} X \sim \delta_a$.

   c. Montrer directement que $X_{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \delta_a$.

3. Soit

$$X_n = x + \sum_{i=1}^n Z_i, \quad Z_i = \begin{cases} -1, \text{ avec probabilité} & p_{-1} = \frac{1}{2} \\ 1, & p_1 = \frac{5}{18} \\ 2, & p_2 = \frac{4}{18} \end{cases},$$

avec Z_i i.i.d. Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \leq 0\}$

(a) Est-ce que $E[Z_1] > 0$?

(b) Calculer, en utilisant le conditionnement sur le premier pas, les probabilités de ruine $\psi(x) = P_x[T_0 < \infty], x \in \mathbb{N}$.

(c) Donner les probabilités de ruine et l'espérance du temps de ruine pour la marche «renversée», avec la distribution de chaque pas $Z_i' = -Z_i$ donnée par : $\left\{p_1 = \frac{1}{2}, p_{-1} = \frac{5}{18}, p_{-2} = \frac{4}{18}\right\}$.

4. On considère une pièce non équilibrée que l'on lance un nombre indéterminé de fois. La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$, et la probabilité de sortir face est égale à $q = 1-p$. Les lancers sont indépendants. On note N_M le temps d'attente du motif M, c'est-à-dire le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir le motif, en incluant les derniers résultats du motif ($N \in \{1, 2, ...\}$).

(a) Pour le motif $M = PFP$, formuler des équations pour le premier moment $m = EN_{PFP}$ par la méthode du conditionnement sur le premier pas, et les résoudre.

Indication : On pourrait utiliser un processus de Markov qui retient l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu, et qui contient l'état final désiré, ainsi que tous ses préfixes.

(b) Calculer la probabilité $x_> = P[N_{FP} > N_{PFP}]$.
Calculer la probabilité $x = P[N_{FP} = N_{PFP}]$ que les motifs PFP et FP arrivent pour la première fois en même temps.
Est que ils existent des valeurs p tel que $x > 1/2$?

Solutions :

1. a) $Z = Z_1 \in [0,1]; \overline{F}_Z(z) = P[\min[X, 2-X] > z] = P[z < X < 2-z] = \int_z^{2-z} f_X(x)dx \Longrightarrow f_Z(z) = f_X(z) + f_X(2-z) = \mathbb{1}_{[0,1]}(z)$.

b) $Z = Z_2 \in [0,3/4]$, $f_Z(z) = \begin{cases} f_X(z) + f_X(2-z) & z \in [0,1/2] \\ 3f_X(3z-1) + f_X(2-z) & z \in [1/2, 3/4] \end{cases}$.

2. Soit $A_n = A_{n,\epsilon} = \{|2 - M_n| > \epsilon\}$.
$\sum_n P[A_n] = \sum_n P[M_n < 2-\epsilon] = \sum_n (1 - \epsilon + \epsilon^2/4)^n < \infty \longrightarrow_{n\to\infty} P[A_{n,\epsilon} i.s.] = 0$.

3. (a) $E[Z_1] = \frac{8}{18} + \frac{5}{18} - \frac{9}{18} = \frac{2}{9} > 0$

(b) Les probabilités de ruine satisfont $\Psi_x = \frac{5}{18}\Psi_{x+1} + \frac{4}{18}\Psi_{x+2} + \frac{1}{2}\Psi_{x-1}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine plus petite que 1 de

$$(4\rho^3 + 5\rho^2 - 18\rho + 9)/18 = (\rho - 1)(4\rho - 3)(\rho + 3)/18 \Longrightarrow \Psi_x = (\frac{3}{4})^x$$

(c) $E[Z_1'] = -E[Z_1] = -\frac{2}{9} \Longleftrightarrow \Psi_x = 1\ t_x = 1 + \frac{5}{18}t_{x-1} + \frac{4}{18}t_{x-2} + \frac{1}{2}t_{x+1}, t_0 = 0, t_{-1} = 1, t_1 = 1 + \frac{1}{2}t_2$.
Sol homogène engendrée par $1^x, r_1^x, \quad r_1 = -\frac{1}{3}$ ($(r_2 = \frac{4}{3} \geq 1)$. Sol particulière $t_x = \frac{x}{-E[Z_1]} = \frac{9x}{2}$. Sol. finale : $t_x = \frac{9}{2}\Big(x + \frac{1}{4}(1 - (\frac{-1}{3})^x)\Big)$.

4. (a) Le conditionnement après un pas donne

$$\begin{cases} m_\emptyset = p(1 + m_P) + q\,(1 + m_\emptyset) \\ m_P = q(1 + m(PF)) + p\,(1 + m_P) \\ m(PF) = p + q\,(1 + m_\emptyset) \end{cases}$$

avec solutions $m = m_\emptyset = \frac{1+pq}{p^2q}, m(PF) = \frac{p+1}{p^2}, m_P = \frac{1}{p^2q}$

(b) $x_> = P[N_{FP} > N_{PFP}] = 0$.
Le problème de calculer $x = x_= \ = P[N_{FP} = N_{PFP}]$ est plus difficile. Il ramène a etudier la chaîne de Markov sur les états $\{\emptyset, P^*, P^*F, P^*FP, , F^*P, A = \{P^*F_2\} \cup \{F^*\}\}$, oú P^*, F^* denotent des repetions du résultat un nombre positif des fois, et F_2 denote la repetion du résultat un nombre plus grand que deux des fois. On trouve $x_A = 0, x_{P^*} = x_{P^*F} = p, x = p\ x_{F^*} = p^2$, avec argmax $p = 1$. Dès lors, $x\frac{1}{2} \Longleftrightarrow p > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

8.4 Examen 4

1. Soit X une v.a. continue de loi uniforme sur [0, 1]. Déterminer les lois de $Z_i = h_i(x), i = 1, 2$, où $h_1(x) = 1 - x$ et $h_2(x) = min(x, 1 - x)$.

2. Soit X_n une v.a. de loi binomiale $B(n, p_n)$. Montrer que si $n\Psi_n \to \lambda > 0$, alors X_n converge en loi vers une v.a. X, dont on determinera la loi.

3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$ (i.e. $f_{X_n}(x) = \lambda e^{-\lambda x} I(x > 0)$). On pose $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ pour $n \geq 1$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.
   (b) Montrer que
   $$F_{M_n - \lambda^{-1}\log n}(x)$$
   convergent vers une fonction $F(x)$, qu'on determinera.
   (c) Généraliser pour le cas de X_n de loi arbitraire avec support $[0, \infty)$, qui satisfont $\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = k > 0$.

4. **Probabilités de ruine.** Soit

$$X_n = x + \sum_{i=1}^n Z_i, \quad Z_i = \begin{cases} 1, \text{ avec probabilité} & p_1 = \frac{10}{13} \\ -1, & p_{-1} = \frac{2}{13} \\ -2, & p_{-2} = \frac{1}{13} \end{cases},$$

avec Z_i i.i.d. Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \leq 0\}$
a) Est-ce que $E[Z_1] > 0$?
b) Calculer , en utilisant le théorème d'arrêt des martingales, les probabilités de ruine $\phi_i(x) = P_x[T_0 < \infty, X_{T_0} = -i], x \in \mathbb{N}, i = 0, 1$, et aussi les probabilités de ruine $\Psi(x) = P_x[T_0 < \infty], x \in \mathbb{N}$.

Solutions :

1. $\mathcal{L}(Z_1) = U[0, 1]$
2.
3.
4. a) $E(Z_1) > 0$

   b) On cherche deux inconnues $\phi_i(x) = \mathbb{P}_x[T < \infty, X_T = -i], i = 0, 1$. En suite, $\psi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x)$. On trouve deux martingales de Wald $M_t = \rho_i^{X_t}$, en resolvant en resolvant $p(\rho) := E[\rho^{Z_*}] = \sum_i \Psi_i \rho^i = 1, \rho \in (0, 1)$, ce qui donne $\rho_1 = 1/2, \rho_2 = -1/5$. On aimerait appliquer a ces martingales le théorème d'arrêt. Mais, $EZ_1 > 0$ et la loi des grandes nombres implique $\mathbb{P}[T = \infty] > 0]$ et donc aucun des cas du théorème d'arrêt ne s'applique pas, car le théorème d'arrêt ne permet pas des temps d'arrêt tq. $\mathbb{P}[T = \infty] > 0$!
   Dommage, car par une "application erronée" du théorème d'arrêt aux martingales de Wald on obtient un système de type Vandermonde

   $$\rho_i^x = \sum_{j=0}^{1} \phi_j(x) \rho_i^{-j}, i = 1, 2$$

   avec des solutions raisonnables
   Heureusement, pour une "application correcte," il suffit de remplacer T par le temps d'arrêt borné $T_N = \min(T, N)$, avec $N \to \infty$. On trouve pour chaque $\rho = \rho_i$

   $$\rho^x = E\rho^{X_{T_N}} = \rho^{X_N} \mathbb{P}_x[T > N] + \sum_{j=0}^{-1} \rho^j \mathbb{P}_x[T \leq N, X_T = j] \to_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{-1} \phi_j(x) \rho^{-j}$$

   (le premier terme converge vers 0, car $\mathbb{P}[X_N \to \infty] = 1$, et $|\rho| < 1$).
   Les probabilités de ruine sont :

   $$\psi_x = \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{7}\left(\frac{-1}{5}\right)^x$$

8.5 Examen 2015

Tous les documents d'aide sont interdits

1. **Probabilités de ruine.** Soit $X_n = x + \sum_{i=1}^n Z_i$, $\quad Z_i = \begin{cases} 1, \text{ avec probabilité} & p_1 = \frac{12}{17} \\ -1, & p_{-1} = \frac{3}{17} \\ -2, & p_{-2} = \frac{2}{17} \end{cases}$,

   avec Z_i i.i.d. Est-ce que $E[Z_1] > 0$? Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \leq 0\}$

(a) Calculer, en utilisant le théorème d'arrêt des martingales, les probabilités de ruine $\phi_i(x) = P_x[T_0 < \infty, X_{T_0} = -i], x \in \mathbb{N}, i = 0, 1$, et aussi les probabilités de ruine $\Psi(x) = P_x[T_0 < \infty], x \in \mathbb{N}$. *Ind : Cherchez dez martingales de la forme $M(n) = \rho^{X_n}$, avec $\rho \in (-1, 1)$ judicieusement choisi.*

(b) Donner les probabilités de ruine pour la marche «renversée», avec la distribution de chaque pas $Z'_i = -Z_i$ donnée par : $\left\{p_{-1} = \frac{12}{17}, p_1 = \frac{3}{17}, p_2 = \frac{2}{17}\right\}$.

(c) Calculer, en utilisant le théorème d'arrêt des martingales, l'espérance du temps de ruine pour la marche renversée. *Ind : Cherchez dez martingales de la forme $M(n) = X_n - na$, avec a judicieusement choisi.*

2. On considère une pièce non équilibrée que l'on lance un nombre indéterminé de fois. La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$, et la probabilité de sortir face est égale à $q = 1-p$. Les lancers sont indépendants. On note N_M le temps d'attente du motif M, c'est-à-dire le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir le motif, en incluant les derniers résultats du motif ($N \in \{1, 2, ...\}$).

   (a) Pour les motifs PPP et FF, donner des formules pour les premiers moments $m_1 = EN_{PPP}, m_2 = EN(FF)$ (pas besoin de justifier les formules).

   (b) Formuler des équations et calculer la probabilité $z = P[N_{PPP} > N(FF)]$. *Indication :* On pourrait utiliser un processus de Markov qui retient l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu, et qui contient les états finaux d'interêt, ainsi que tous leurs préfixes.

   Est que ils existent des valeurs p tel que $z > 1/2$ et $m_2 < m_1$?

3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de densité $f(x) = (x/2)\mathbb{1}_{[0,2]}$. Soit $X_{(1)} \leq ... \leq X_{(n)}$ les statistiques d'ordre.

   a. Montrer que $X_{(n)} \xrightarrow{P} X \sim \delta_a$, où a est un nombre a déterminer.

   b. Montrer que $X_{(n)} \xrightarrow{p.s.} X \sim \delta_a$.

   c. Montrer directement que $X_{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \delta_a$.

4. Soit $X \in \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire continue, et soient X_t les variables discrètes $X_t = t^{-1} Poisson(tX) \in \{0, \frac{1}{t}, \frac{2}{t}, ...\}$.

   a) Calculer $\widehat{f}_{X_t}(s) = Ee^{-sX_t}$.

   b) Etudier la convergence en loi, en probabilité et $p.s.$ des variables discrètes X_t vers X quand $t \to \infty$.

Solutions :

1. (a) $E[Z_1] = \frac{5}{17} > 0$

   (b) Les probabilités de ruine satisfont $\psi_x, \phi_x^0, \phi_x^1$ satisfont toutes $\Psi_x = \frac{12}{17}\Psi_{x+1} + \frac{3}{17}\Psi_{x-1} + \frac{2}{17}\Psi_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ_x des racines plus petites que 1 de

   $$(4\rho^3 + 5\rho^2 - 18\rho + 9)/18 = (\rho - 1)(4\rho - 3)(\rho + 3)/18 \Longrightarrow$$

   $$\begin{aligned} \phi_x^0 &= \frac{3}{11}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{11}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ \phi_x^1 &= \frac{2}{11}\left(-\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \\ \psi_x &= \frac{1}{11}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{10}{11}\left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

   (c) $E[Z_1'] = -E[Z_1] = -\frac{2}{9} <\Longrightarrow \Psi_x = 1,\ t_x = \frac{17}{5}$.

2. (a) Le conditionnement après un pas donne

   $$\begin{cases} m_F = pm_P) + q \\ m_P = qm_F) + pm_{PP} \\ m_{PP} = qm_F \end{cases}$$

   avec solutions $z = -\frac{(p^2+p+1)q^2}{qp^2+qp-1} = \frac{(p-1)^2(p^2+p+1)}{p^3-p+1} = -\frac{q^2(q^2-3q+3)}{q^3-3q^2+2q-1}$

   (b) $x_> = P[N_{FP} > N_{PFP}] = 0$.
   Le problème de calculer $x = x_= \ = P[N_{FP} = N_{PFP}]$ est plus difficile. Il ramène a etudier la chaîne de Markov sur les états $\{\emptyset, P^*, P^*F, P^*FP, , F^*P, A = \{P^*F_2\} \cup \{F^*\}\}$, oú P^*, F^* denotent des repetions du résultat un nombre positif des fois, et F_2 denote la repetion du résultat un nombre plus grand que deux des fois. On trouve $x_A = 0, x_{P^*} = x_{P^*F} = p, x = p\ x_{F^*} = p^2$, avec argmax $p = 1$. Dès lors, $x \frac{1}{2} \Longleftrightarrow p > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Soit $A_n = A_{n,\epsilon} = \{|2 - M_n| > \epsilon\}$.
   $\sum_n P[A_n] = \sum_n P[M_n < 2 - \epsilon] = \sum_n (1 - \epsilon + \epsilon^2/4)^n < \infty \longrightarrow_{n\to\infty} P[A_{n,\epsilon} i.s.] = 0$.

4. $\widehat{f}_{X_t}(s) = Ee^{-sX_t} = \int F_X(dx) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s\frac{k}{t}} \frac{(tx)^k}{k!} e^{-tx} = \widehat{f}_X\left(t(1 - e^{-\frac{s}{t}}\right) \to \widehat{f}_X\left(-t\frac{s}{t}\right) = \widehat{f}_X(s)$.

Bibliographie

Richard Durrett. *Essentials of stochastic processes*, volume 1. Springer, 1999.

Daniel Felix. Optimal penney ante strategy via correlation polynomial identities. *Electronic journal of combinatorics*, 13(1) :R35, 2006.

Hans U Gerber and Shuo-Yen Robert Li. The occurrence of sequence patterns in repeated experiments and hitting times in a markov chain. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(1) :101–108, 1981.

Geoffrey Grimmett and David Stirzaker. *One thousand exercises in probability.* Oxford University Press, 2001.

Leonidas J Guibas and Andrew M Odlyzko. String overlaps, pattern matching, and nontransitive games. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 30(2) :183–208, 1981.

Shuo-Yen Robert Li. A martingale approach to the study of occurrence of sequence patterns in repeated experiments. *Annals of Probability*, pages 1171–1176, 1980.

David Williams. *Probability with martingales.* Cambridge university press, 1991.

Maryam Mirzakhani : Faire des maths est "like being lost in a jungle and trying to use all the knowledge that you can gather to come up with some new tricks, and with some luck you might find a way out"