Probabilités, Processus Stochastiques et Applications
Florin Avram

Table des matières

Chapitre 1

Introduction aux processus de Markov

1.1 La proprietè de Markov, en temps continu ou discret

Soit $X_t \in \mathcal{S}$ un processus stochastique avec valeurs dans un espace dénombrable $\mathcal{S}$.

Exercice 1.1. *a) Démontrer la "loi d'evolution"*

$$P[X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_2} = e_{i_2} ..., X_{t_k} = e_{i_k}] = P[X_{t_1} = e_{i_1}] \times P[X_{t_2} = e_{i_2} | X_{t_1} = e_{i_1}] \times ...$$
$$\times P\left[X_{t_k} = e_{i_k} | X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_2} = e_{i_2} ..., X_{t_{k-1}} = e_{i_{k-1}}\right], \forall e_{i_k} \in \mathcal{S}$$

b) Démontrer la "loi d'evolution conditionée"

$$P[X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_2} = e_{i_2} ..., X_{t_k} = e_{i_k} | \mathcal{F}] = P[X_{t_1} = e_{i_1} | \mathcal{F}] \, P[X_{t_2} = e_{i_2} | X_{t_1} = e_{i_1}, \mathcal{F}]$$
$$P\left[X_{t_k} = e_{i_k} | X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_2} = e_{i_2} ..., X_{t_{k-1}} = e_{i_{k-1}}, \mathcal{F}\right]$$

Cet exercice nous montre que les lois jointes ont une structure assez compliquée, en général. La situation devient plus simple pour les processus de Markov.

Définition 1.1. ***-Proprieté de Markov sur les espaces dénombrables***
Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$, avec t unidimensionel a la proprieté de Markov si, et seulement si ses lois conditionelles ne depend pas du passé que par le passé imediat, c.-à-d.

$$\mathcal{L}(X_t | X_{t_0}, X_{t_1}, ..., X_{t_k}) = \mathcal{L}(X_t | X_{t_k}), \forall t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t, t_i \in \mathbb{R}.$$

Sur un espace d'états discrèt, ça revient a :

$$P[X_t \in A \mid X_{t_0} = e_{i_0}, ..., X_{t_k} = e_{i_k}] = P[X_t \in A \mid X_{t_k} = e_{i_k}]$$

$\forall\ 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t$, $t_i \in \mathbb{R}$, *et* $\forall\ e_{i_0}, e_{i_1}, ..., e_{i_k}, e_i \in \mathcal{E}$.
Un processus ayant la proprieté de Markov s'apelle processus de Markov.

Interprétation de la propriété de Markov : si on considère que le processus est indicé par le temps, cette propriété traduit le fait que le présent ne dépend du passé qu'à travers le passé immédiat.

Chapitre 2

Temps et espace d'états discrets. Matrices de transition

Définition 2.1. ***Matrices de transition*** *Soit $X(t)$ un processus à espace d'états fini ou dénombrable. Pour tous $0 \leq s \leq t$, pour tous i, j dans I, et pour chaque processus stochastique, on définit les* **probabilités de transition** *par :*

$$p_{ij}(s,t) = P([X_t = e_j] \mid [X_s = e_i]) .$$

Les matrices $P(s,t)$ tel que $P(s,t)_{ij} = p_{ij}(s,t)$ sont appellées matrices de transition.

Définition 2.2. ***Homogeneité des transitions*** *Un processus est dit homogène si, et seulement si :*

$$\forall\, i, j \in I \ , \forall\, 0 \leq s \leq t \ , \ p_{ij}(s,t) = p_{ij}(0, t-s) .$$

On note alors $p_{ij}(s,t) = \underline{p_{ij}(t-s)}$, et la matrice $p_{ij}(t)$ est appelée matrice de transition après temps t.

Remarque 2.1. *Pour un processus homogène, on peut toujours "remettre la montre a 0" a n'importe quel moment s.*

Hypothèse de travail : On considérera ici surtout des processus homogènes, avec des lois de transition conditionelles qui ne depend pas du moment de conditionnement t.

On arrive ainsi à l'exemple le plus simple des processus de Markov : les chaînes de Markov homogènes en temps discret $n = 0, 1, 2, ...$ et à espace d'états fini ou dénombrable, disons avec J états possibles. Pour les transitions après un pas on a alors J lois de transition, qu'on arrange dans une matrice P stochastique de dimension $J \times J$, ayant la somme de chaque ligne 1.

Dans ce cas, le processus est complètement charactérisé par les matrices de transition $P^{(n)}$ après temps $n \in \mathbb{N}$. A leurs tours, ces matrices sont complètement déterminées par la **matrice de transition après un pas**

$$P = (p_{ij})_{i,j \in I}$$

. Cette matrice, appellée stochastique, a les propriétés suivantes :

1. $\forall\, i, j \in I \ , \ p_{ij} \geq 0$
2. $\forall\, i \in I \ , \ \sum_{j \in I} p_{ij} = 1$; la somme des termes de chaque ligne égale à 1.

Exercice 2.1. Matrices de transition pour quelques marches aléatoires. *Donner la matrice de transition pour :*

1. *La marches aléatoire arrêtée au* $\min[T_0, T_4]$.

2. La marches aléatoire réfléchie sur $[0, 4]$.

3. La marches aléatoire sur $[0, 4]$*, avec "reinjection" en* 2.

4. La marches aléatoire sur $[0, 4]$ *qui saute d'une frontière à l'autre.*

Remarque 2.2. *En notation vectorielle, la condition* $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1$ *devient*

$$P\mathbf{1} = \mathbf{1},$$

ou $\mathbf{1}$ *denote un vecteur avec toutes les composantes* 1*. Cette propriété des matrices stochastiques équivaut au fait que* 1 *est une valeur propre, avec vecteur propre à droite* $\mathbf{1}$*.*

Remarque 2.3. *Le vecteur propre à gauche* $\vec{\pi}$ *de la valeur propre* $\lambda_P = 1$ *avec la somme des coordonnées égale à* 1 *(avec nonnégativité garantie par le théorème de Perron-Frobenius) jouera un rôle important ci-dessous (comme mesure invariante, i.e. satisfaisant* $\vec{\pi} = \vec{\pi} P$ *– voir sections 4.1, 4.2).*

Il sera aussi utile d'étudier les matrices sous-stochastiques, satisfaisant $\forall\, i \in I$, $\sum_{j \in I} p_{ij} \leq 1$.

Définition 2.3. *Une matrice* Q *s'appelle sous-stochastique (strictement sous-stochastique) si la somme des éléments de chaque ligne est* ≤ 1 *(avec inégalité stricte dans au moins une ligne).*

Remarque 2.4. *On utilise aussi le terme "matrice" si l'espace d'états* E *est infini dénombrable, mais la théorie dans ce cas demande des hypothèses de convergence absents dans le cas des espace d'états finis.*

2.1 Graphe de communication, classification des états, les classes de communication, et le graphe induit

Nous verrons ici qu'une chaîne de Markov a deux types d'états :

1. transitoires/transients, qui sont visités un nombre fini des fois
2. récurrents ("éternels") qui sont visités un nombre infini des fois.

Définition 2.4. *Soient* e_i *et* e_j *deux éléments de* E*. On dit que* e_i *conduit à* e_j *(on note* $e_i \to e_j$ *) ssi il existe* $n > 0$ *tel que* $p_{ij}^{(n)} > 0$ *et on dit que* e_i *et* e_j *communiquent (et on note* $e_i \leftrightarrow e_j$ *) si* e_i *conduit à* e_j *et* e_j *conduit à* e_i *.*

Rémarque : la relation de "communication réciproque" " $\leftrightarrow$ " est clairement symétrique, reflexive et transitive, une relation d'équivalence. Par conséquent, elle partage l'espace d'états dans des classe d'équivalence.

Définition 2.5. *On appelle classes de communication la chaîne : les classes d'équivalence induites par la relation "* $\leftrightarrow$ *" sur* E*.*

Définition 2.6. *Une classe d'equivalence dans une chaîne de Markov* **finie** *qui n'a pas de transitions vers l'exterieur est dite récurente ; les autres classes s'appellent transientes.*

Remarque 2.5. *Les classes récurentes sont les classes maximales de la relation d'ordre induite par* $\to$ *sur les classes.*

Définition 2.7. *Le graphe de communication d'une chaîne est un graphe sur les états (indiqués par des points du plan), avec des côtés représentant les transitions possibles, ayant des probabilité de transition $p_{ij} > 0$. Les transitions possibles sont indiqués par des flèches, avec la valeur de la probabilité de transition notée parfois au dessus.*

Définition 2.8. *Le graphe induit dirigé d'une chaîne est un graphe sur les classes de communication, avec des arrêtes indiquant l'existance d'une transition possible entre deux classes (ayant une probabilité de transition $p_{ij} > 0$).*

L'identification des classes récurrentes et transientes est souvent possible juste en inspectant *le graphe de communication*, ce qui permet de determiner visuellement les classes de communication.

Exercice 2.2. Exemple d'une chaîne avec des elements transients et récurrents. *L'espace des etats d'une chaîne est $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et la matrice de transition est*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dessinez le graphe de communication.
b) Identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrentes et transientes.

Réponse: Les classes récurrents sont {2} et {3,5}.

Remarque 2.6. *Afin d'apercevoir la structure d'une chaîne (et de calculer plus facilement P^n,) il peut être intéressant de renuméroter les états en sorte que des états qui conduisent l'un à l'autre soient groupés ensemble.*

La matrice obtenue ici en rangeant les elements $\{2, 1, 4, 6, 3, 5\}$ a une structure des blocs. Les sous-blocs correspondant a une classe recurrente sont des matrices stochastiques (qu'on peut analyser séparément plus facilement), et le bloc correspondant a tous les elements transients est une matrice sous-stochastique.

Remarque 2.7. *Les sous-matrices obtenues de la matrice de transition en retenant seulement une classe transiente/récurrente sont sous-stochastiques/stochastiques.*

Remarque 2.8. *La distinction entre elements transients et recurrents a une grande portée sur la valeur des limites $\lim_{n\to\infty} P^n(i, j)$. On verra que :*

1. *Pour j transient, cette limite est toujours 0*
2. *La multiplicité de la valeur propre 1 est egale aux nombres des classes recurrentes.*

Définition 2.9. *Une chaîne de Markov sera appellée décomposable si le symmétrique du graphe induit (avec les directions des flèches ignorées) a plusieurs composantes connexes.*

Une chaîne de Markov indecomposable sera appellée réductible si elle a plusieurs classes de communication.

Dans le premier cas, il existe une permutation des états qui met la matrice P dans une forme bloc-diagonale. Dans le deuxième, il existe une permutation des états qui met la matrice P dans une forme bloc-triangulaire.

Exemple 2.1. *La chaîne dans l'exemple ci dessus est réductible (deux classes récurrentes) et indecomposable.*

Chapitre 3

Matrices de transition pour les chaînes de Markov avec un nombre fini des états

Après les processus à v.a. indépendants et les sommes des v.a. indépendants, le prochaîn degré de complexité en modélisation est obtenu en utilisant les chaînes de Markov homogènes, observés en temps discret : $n = 0, 1, 2, ...$, et à espace d'états fini.

Dans ce cas, on peut arranger les lois de transition conditionelles $\mathbb{P}[X(t+1)|X(t) = e_i], i = 1, ...,$ après un pas dans une **matrice de transition après un pas** $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ "stochastique" ayant la somme de chaque ligne 1. On peut voir un tel processus comme étant contrôlé par des ≪monnaies biaisées≫ qu'on jete pour décider la prochaine position. On a une monnaie pour chaque ligne, et leurs lois dépendent du dernier résultat (c.-à-d. la loi de X_{t+1} =la ≪monnaie jetée≫ dépend de la position précédente X_t).

L'exercice suivant illustre le fait que la matrice P determine complètement les matrices de transition $P^{(n)}$ après temps $n \in \mathbb{N}$, et les lois jointes.

Exercice 3.1. Le temps au pays d'Oz. *Soit X_n une chaîne supposée (à tort) Markovienne sur les états { pluie, nuageux, soleil}, avec matrice des transitions*

$$P = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/2 & 1/8 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Calculer :

1. *La probabilité de pluie demain, en sachant qu'il est nuageux aujourd'hui*
2. *La probabilité de pluie demain et soleil le lendemain, en sachant qu'il est nuageux aujourd'hui*
3. *(*) La probabilité de soleil le lendemain, en sachant qu'il est nuageux aujourd'hui.*

Remarque 3.1. *La loi de X_1 conditionné par (en partant de) $X_0 = i$, est donné par la ligne i de la matrice P. Par conséquent, la réponse à la première question est* $1/6$.

La réponse à la deuxième question est $1/6 \times 1/8$ (par la loi d'evolution conditionée). La troisième question concerne une transition après deux pas (sans s'interesser a la situation après un pas). Cette question nous suggère l'importance d'étudier les probabilités de transition entre deux moments arbitraires.

Exercice 3.2. *Démontrer la "loi d'evolution" pour les chaînes de Markov homogènes*

$$P\left[X_1 = e_{i_1}, X_2 = e_{i_2} ..., X_k = e_{i_k} | X_0 = e_{i_0}\right] = P(i_0, i_1) P(i_1, i_2) ..., P(i_{k-1}, i_k),$$

3.1 Le semi-groupe des matrices de transition après n étapes

Définition 3.1. *Pour tout n de $\mathbb{N}$, la* <u>*matrice des probabilités de transition*</u> *en* <u>*n étapes*</u>*, est definie par $P^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right)_{i,j\in I}$ où $p_{ij}^{(n)} = P\left([X_n = e_j] \mid [X_0 = e_i]\right)$.*

Voila le resultat le plus important de la théorie des chaînes de Markov :

Théorème 3.1. ***L'équation de Chapman-Kolmogorov****. Les matrices de transition en n étapes ont une structure de semi-group, c.-à-d.*

$$\boxed{P^{(m+n)} = P^{(m)}P^{(n)}} \tag{3.1}$$

Démonstration: Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P et de loi initiale $\mu(0)$, à valeurs dans $(E = \{e_i; i \in I\}, \mathcal{P}(E))$. En conditionnant sur la position k après m pas, on a :

$$\forall\, i,j \in I\ ,\ \forall\, m,n \in \mathbb{N}\ ,\ p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in I} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

QED

Corollaire 3.1. *La matrice des probabilités de transition en n étapes (sans s'interesser dans l'évolution intermediaire) est simplement la puissance n de la matrice de transition P : $\boxed{P^{(n)} = P^n}$, c.-à-d. le semi-groupe des matrices de transition est "generé" par la matrice P de transition après temps 1.*

Par conséquent, la matrice P spécifie entièrement toutes les probabilités de transition d'une chaîne de Markov.

Démonstration : on montre ça par récurrence sur n, en partant de $P^{(1)} = P$, et en tenant compte que $P^{(n+1)} = P^{(n)}P$ (par l'equation de semigroupe (13.1)) QED

Revenons à la question 3. de l'Exercice 3.1 concernant le lendemain, et conditionnons sur toutes les cas possibles demain. On trouve :

$$P^{(2)}(N,S) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & \frac{1}{8} \\ * & * & \frac{1}{3} \\ & * & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{3}{4} = \frac{7}{16} = P^2(N,S)$$

En conclusion, la réponse a la question sur la transition après deux pas se trouve dans la matrice

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{43}{192} & \frac{15}{32} & \frac{59}{192} \\ \frac{7}{48} & \frac{5}{12} & \frac{7}{16} \\ \frac{1}{24} & \frac{5}{16} & \frac{31}{48} \end{pmatrix}$$

Plus généralement, la loi de X_n en partant de $X_0 = i$ est donné par la ligne i de la matrice P^n. Par exemple

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 0.0982749 & 0.3665 & 0.535225 \\ 0.09786 & 0.366124 & 0.536016 \\ 0.0972273 & 0.365551 & 0.537221 \end{pmatrix}, \quad P^{11} = \begin{pmatrix} 0.0979365 & 0.366194 & 0.53587 \\ 0.0977182 & 0.365996 & 0.536286 \\ 0.0973855 & 0.365695 & 0.53692 \end{pmatrix}$$

Clairement, il y a convergence vers une matrice avec lignes égales. Ce resultat important montre que la loi quand $n \to \infty$ ne dépend pas de l'état initial, qui est donc "oublié". Il s'agît d'une conséquence de la décomposition spectrale de P.

Le prochain exercice nous montre qu'en général, sans la propriété de Markov, les lois jointes ont une structure assez compliquée.

Exercice 3.3. *Démontrer la "loi d'évolution"*

$$P\left[X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_2} = e_{i_2}, ..., X_{t_k} = e_{i_k}\right] = P\left[X_{t_1} = e_{i_1}\right] P\left[X_{t_2} = e_{i_2} | X_{t_1} = e_{i_1}\right], ...,$$
$$P\left[X_{t_k} = e_{i_k} | X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_2} = e_{i_2} ..., X_{t_{k-1}} = e_{i_{k-1}}\right]$$

et la "loi d'evolution conditionée"

$$P\left[X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_2} = e_{i_2} ..., X_{t_k} = e_{i_k} | \mathcal{F}\right] = P\left[X_{t_1} = e_{i_1} | \mathcal{F}\right] P\left[X_{t_2} = e_{i_2} | X_{t_1} = e_{i_1}, \mathcal{F}\right], ...,$$
$$P\left[X_{t_k} = e_{i_k} | X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_2} = e_{i_2} ..., X_{t_{k-1}} = e_{i_{k-1}}, \mathcal{F}\right]$$

3.2 Processus qui ne sont pas chaînes de Markov a priori, mais qu'on peut "rendre" Markov par un bon choix de l'espace d'états

Pour modéliser une situation par une chaîne de Markov, on a besoin d'abord de choisir un espace d'états convenable, et de spécifier la matrice de transition.

Exemple 3.1. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus à deux états, notés e_1 et e_2. On suppose que les transitions entre les étapes n et $n+1$ s'effectuent selon le procédé suivant :*

$$\begin{cases} \text{Si } X_{n-1} = X_n \text{ alors } P\left([X_{n+1} = e_1] \mid [X_n = e_i]\right) = \frac{3}{4} \\ \text{Si } X_{n-1} \neq X_n \text{ alors } P\left([X_{n+1} = e_1] \mid [X_n = e_i]\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une chaîne de Markov. b) Construire un espace d'états permettant de modéliser ce processus par une chaîne de Markov et donner alors son graphe.

Solution : b) On construit l'espace d'états suivant : $\{e_1 * e_1, e_1 * e_2, e_2 * e_1, e_2 * e_2\}$. Sur cet'espace, le processus devient Markovien, et la matrice de transition s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exemple 3.2. *Supposons que une pluie eventuelle demain depend de la situation du temps dans les trois jours précédents, ainsi : a) S'il y a eu de la pluie dans les deux jours précédents, alors il va pleuvoir avec probabilité .8. b) S'il y a pas eu de la pluie dans aucun des trois jours précédents, alors il va pleuvoir avec probabilité .2. c) Autrement, la situation va être la même comme dans le jour precedent avec probabilité .6. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov, en donnant l'espace des états et la matrice de transition.*

Exemple 3.3. Une companie d'assurance voiture a un système de bonus avec cinq niveaux pour les assurés sans sinistres déclarés *:*

niveau 1 :	*0% réduction*
niveau 2 :	*25%réduction*
niveau 3 :	*40% réduction*
niveau 4 :	*50% réduction*
niveau 5 :	*60% réduction*

Pour un assuré, la probabilité de ne pas avoir de sinistre dans un an est de 0.8. Les regles selon on passe d'un niveau (état)à l'autre sont :

Aprš une année sans sinistre on passe au niveau supérieur suivant ou on reste au niveau 5

Aprš une année avec un ou plusieurs sinistres

*on diminue d'*un *niveau si l'année précedente, il n'y a pas eu de déclaration de sinistre.*

on diminue de deux *niveaux si l'année précedente il y a eu au moins une déclaration de sinistre.*

1. *Notons par $X(t)$ le niveau,soit 1, 2, 3, 4 ou 5, de l'assuré pour l'année t. Expliquez pourquoi $\{X(t)\}_{t=1}^{\infty}$ n'est pas une chaîne de Markov.*
2. *En augmentant le nombre de niveaux, définissez un nouveau processus stochastique $\{Y(t)\}_{t=1}^{\infty}$ qui* soit *Markov et de telle manière que $Y(t)$ représente le niveau de réduction pour l'assuré dans l'année t.*
3. *Déduire la matrice de transition pour la chaîne de Markov $\{Y(t)\}_{t=1}^{\infty}$.*

Solution :

1. *$\{X(t)\}$ n'est pas Markov parce que, par exemple, $\mathbb{P}[X_{t+1} = 3 \mid X_t = 4, X_{t-1} = 3, \ldots]$ ne peut pas se réduire à $\mathbb{P}[X_{t+1} = 3 \mid X_t = 4]$.*
2. *Définition des nouveaux niveaux :*
   3=40% réduction cette année, aprš 25% l'année dernière
   4=50% réduction cette année, aprš 40% l'année dernière
   3a=40% réduction cette année, aprš 50% l'année dernière
   4a=50% réduction cette année, aprš 60% l'ann'ee dernière
3. *La matrice de transition est alors*

	1	2	3	4	5	3a	4a
1	0.2	0.8	0	0	0	0	0
2	0.2	0	0.8	0	0	0	0
3	0	0.2	0	0.8	0	0	0
4	0	0	0	0	0.8	0.2	0
5	0	0	0	0	0.8	0	0.2
3a	0.2	0	0	0.8	0	0	0
4a	0	0.2	0	0	0.8	0	0

Chapitre 4

Lois marginales limites et stationnaires

4.1 L'évolution en temps de la loi marginale d'une chaîne

Définition 4.1. *Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout i de I, on note $\mu_i(n) = P[X_n = e_i]$ et $\mu(n) = (\mu_i(n))_{i\in I}$. Le vecteur $\mu(n)$ définit une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$ appelée <u>loi à l'instant n</u>. On appelle <u>loi initiale</u> de la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le vecteur $\mu(0)$.*

Exercice 4.1. *Montrer que*

$$\mu(1) = \mu(0) P, \ \mu(n+1) = \mu(n) P, \tag{4.1}$$

et

$$\mu(n) = \mu(0) P^n, \forall n \geq 0. \tag{4.2}$$

Ind : On peut conditionner sur la position **un pas en avant**.

Exercice 4.2. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $\{1, 2\}$, de loi initiale $\boldsymbol{\mu}(0) = (\mu_1, \mu_2)$ et de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$*

Calculez $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2\}$, $\mu_2(1) = \mathbb{P}\{X_1 = 2\}$, $\mathbb{P}\{X_0 = 2|X_1 = 2\}$, $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2, X_2 = 1\}$, $\mu_2(2) = \mathbb{P}\{X_2 = 2\}$ et $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_2 = 1\}$.

Comme illustré dans les exemple ci-dessus, en utilisant la loi initale $\mu(0)$ et la matrice de transition P on peut calculer la loi $\mu(n)$ a n'importe quel temps, par exemple $\mu(1), \mu(2)$ .... et aussi les lois jointes pour n'importe quel ensemble fini des temps (en utilisant la loi de multiplication des probabilités conditionnelles). En effet, on peut donner une formule explicite pour les lois jointes d'ordre fini d'une chaîne, en fonction de la matrice de transition P et la loi initiale $\mu(0)$.

Théorème 4.1. *Pour une chaîne de Markov, les loi jointes sont données pour : $\forall t_0 < t_1 < \cdots < t_k$, $t_i \in \mathbb{R}$, et $\forall$ $e_{i_0}, e_{i_1}, ..., e_{i_k} \in \mathcal{E}$ explicitement par*

$$\boxed{P[X_{t_0} = e_{i_0}, ..., X_{t_k} = e_{i_k}] = \mu_{i_0}(t_0) P_{i_0,i_1}^{t_1-t_0} ... P_{i_k,i_{k-1}}^{t_k-t_{k-1}}} \tag{4.3}$$

Définition 4.2. *La chaîne de Markov associé à une matrice stochastique P est la* **famille** *des mesures $\mathbb{P}_{\mu(0)}$ définies par (4.3), avec operateurs d'espérance associés $\mathrm{E}_{\mu(0)}$ (donc pour obtenir une seule mesure, il faut encore specifiér la mesure initiale $\mu(0)$).*

Remarque 4.1. *Algébriquement, une chaîne de Markov est characterisée par un "duo" $(P, \mu(0))$, l'element principal du duo étant la matrice de transition P.*

4.2 Lois limites/asymptotiques

Une question très importante pour les chaînes de Markov est de déterminer l'ensemble des lois “limites/asymptotiques” d'une chaîne specifié par $\mu(0)$ et P, définies par

$$\vec{\mu}(\infty)_{\mu(0)} = \lim_{n\to\infty} \mu(n) = \lim_{n\to\infty} \mu(0)P^n \tag{4.4}$$

Définition 4.3. *Nous allons denoter par*

$$\boldsymbol{\mu}(\infty)$$

l'ensemble des lois limite/asymptotiques **nonnules** *d'une chaîne P, obtenues en variant la loi initiale $\mu(0)$.*

Remarque 4.2. *A priori, il pourrait y exister une limite (4.4) différente pour chaque loi de départ $\mu(0)$, et en particulier pour chaque point de départ deterministe specifié par $\mu(0) = \vec{e}_i = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0)$.*

Denotons par

$$\boldsymbol{P}_i = \lim_{n\to\infty} \vec{e}_i P^n$$

ces limites. Comme $\vec{e}_i P^n$ est précisement la ligne i de la matrice P^n, la determination de l'ensemble des lois limite demande a calculer la limite

$$\boldsymbol{P} := \lim_{n\to\infty} P^n, \tag{4.5}$$

et de le convexifier, c.-à-d. $\boldsymbol{\mu}(\infty) = conv(\boldsymbol{P}_i, i = 1, ..., I)$.

Définition 4.4. *On appelera* $\boldsymbol{P}$ *la* **matrice asymptotique** *(si la limite existe).*

L'element generique de la matrice asymptotique

$$\boldsymbol{P}_{i,j} = lim_{n\to\infty} P_i[X_n = j]$$

represente la limite des probabilites de trouver le processus en j après n pas, à partir de i.

Exercice 4.3. *Montrer que l'ensemble des lois limite $\vec{\mu}(\infty)_{\mu(0)}$, obtenues en variant la loi initiale $\mu(0)$, est un ensemble convex, engendré par les vecteurs*

$$\vec{\mu}(\infty)_i := \vec{\mu}(\infty)_{\vec{e}_i} = \lim_{n\to\infty} \vec{e}_i P^n, i \in \{1, ..., I\}.$$

Indication: Comme chaque loi initiale $\mu(0)$ est une combinaison convexe de $\vec{e}_i$, cela est aussi vrai pour les limites, qui seront combinaisons convexes de $\vec{\mu}(\infty)_i$.

On s'interesse en trois questions concernant la limite (4.5) :

1. existence (E) ; la réponse probabiliste est qu'il suffit ici est de ne pas avoir ”pérodicité”, et la réponse algébrique est qu'il suffit est de ne pas avoir des valeurs propres avec $|\lambda| = 1, \lambda \neq 1$.
2. unicité (U) ; la réponse probabiliste est qu'il suffit d' avoir une seule classe de récurrence, et la réponse algébrique est qu'il suffit que la multiplicité algébrique de la valeur propre $\lambda = 1$ soit 1.
3. existence + unicité=ergodicité (ERG) ; la réponse ici est qu'il suffit **que la matrice limite $\boldsymbol{P}$ existe et qu'elle a des lignes identiques**, c.-à-d. qu'on a

   $$\boldsymbol{P} = \mathbf{1}\vec{\pi}$$

   où $\mathbf{1}$ denote un vecteur colonne (propre à droite pour $\lambda = 1$), et $\vec{\pi}$ denote un vecteur ligne (propre à gauche pour $\lambda = 1$).

Le dernier cas, concernant la situation la plus simple, est appellé **ergodique**.

Définition 4.5. *On appellera une chaîne* **ergodique** *lorce'qu'il existe une loi limite* $\boldsymbol{\mu}(\infty) = \lim_{n\to\infty} \mu(n)$, *indépendamment de la loi de départ (dans ce cas, l'ensemble* $\boldsymbol{\mu}(\infty)$ *contient un seul point).*

Considerons maintenant l'existence de la matrice asymptotique $\boldsymbol{P}$.

Exemple 4.1. L'inexistence de la limite $\boldsymbol{P} = lim_{n\to\infty} P^n$ pour les chaînes cycliques. *La limite* $\boldsymbol{P}$ *n'existe pas toujours, comme on voit immédiatement en examinant une chaîne de Markov qui bouge cycliquement sur les noeuds d'un graphe. Par exemple, pour* $n = 3$, *avec la matrice de transition* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *on a :* $P^{3n} = I_3$, $P^{3n+1} = P$ *et* $P^{3n+2} = P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On voit immédiatement que la suite* $P, P^2, P^3 = I, P^4 = P, \ldots$ *est cyclique et donc sans limite.*

Ici, le vecteur propre à gauche (et loi stationnaire) $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$ *est unique (car on a une seule classe recurrente).*

Exemple 4.2. L'inexistence de la limite $\boldsymbol{P} = lim_{n\to\infty} P^n$ pour les chaînes périodiques. *Par exemple, pour* $n = 4$, *avec la matrice de transition* $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, *le polynome minimal est* $P^3 - P = 0$, $P^{2n+k} = P^k, k = 1, 2, n \geq 0$, *et la suite* $P, P^2, P^3 = P, P^4 = P^2, \ldots$ *est périodique de période 2 et donc sans limite.*

Le vecteur propre à gauche (et loi stationnaire) $\pi = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ *est unique (car on a une seule classe recurrente), et on vérifie facilement que* $\lim_{n\to\infty} \frac{P+P^2+\ldots+P^{2n}}{2n} = \mathbf{1}\vec{\pi}$.

4.3 Lois invariantes/stationnaires et équations d'équilibre global

Exercice 4.4. *Montrer que si la limite* $\vec{\pi}$ *définie en (4.4) existe (ce qui n'est pas toujours le cas), alors* $\vec{\pi}$ *doit satisfaire les équations* $\vec{\pi} = \vec{\pi} P$

Ind : Utiliser $\mu(n+1) = \mu(n)P$.

Définition 4.6. *Les équations*

$$\vec{\pi} = \vec{\pi} P \tag{4.6}$$

sont appelées **équations d'équilibre global/stationnarité/invariance**. *Un vecteur des probabilités qui les satisfait est appelé* **loi stationnaire** *ou invariante.*

Remarque 4.3. *Le nom invariant vient du fait que si* $\mu(0) = \vec{\pi}$, *alors on a* $\mu(n) = \mu(\infty) = \vec{\pi}$ *pour chaque* n.

Soit $\boldsymbol{\Pi}$ l'ensemble des toutes les lois invariantes pour une chaîne P, *autrement dit* l'ensemble des vecteurs de probabilités qui sont aussi des vecteurs propres a gauche de P associé à la valeur propre 1. L'exercice (4.4) et la remarquez que (4.3) impliquent :

Corollaire 4.1. *Les lois asymptotiques d'une chaîne de Markov homogène coincident avec les lois invariantes*

$$\boldsymbol{\mu}(\infty) = \mathbf{\Pi} = \textit{ensemble des vecteurs de probabilité propres à gauche.}$$

La clé du calcul des lois asymptotiques se trouve donc dans le système

$$\vec{\pi} = \vec{\pi} P, \vec{\pi}\mathbf{1} = 1, \vec{\pi} \geq 0, \tag{4.7}$$

qui fournit toutes les lignes de la matrice asymptotique $\boldsymbol{P}$. Nous allons devoir repondre aux questions d'existence et d'unicité de ses solutions :

1. Est-ce que c'est possible qu'il n'existent pas des vecteurs des probabilités qui satisfont le système d'équilibre (4.7), c.-à-d. est-ce que c'est possible qu'il n'y ait pas des vecteurs propres pour la valeur propre 1 qui ont toutes les composants nonnégatives ? (Non !)
2. Est-ce que c'est possible qu'il existent plusieurs vecteurs des probabilités independants qui satisfont le système d'équilibre (4.7) ? (Oui, cela est possible ssi le nombre des classes récurrentes est $K > 1$, ce qui implique que $\lambda = 1$ est une valeur propre multiple d'ordre K).

4.4 Un exemple ou P^n et le vecteur propre à gauche $\boldsymbol{\pi}$ se calculent explicitement

Exercice 4.5. Chaîne a deux ètats. *Soient $a, b \in [0,1]$ et la matrice de transition :*

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

1. *Calculer les valeurs propres, les vecteurs propres à droite d_i et les vecteurs propres à gauche g_i.* **Réponse:**

$$\begin{array}{cc} 1 & -a-b+1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{a}{b} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \left\{\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right\} & \left\{-\frac{b}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right\} \end{array}$$

2. *En utilisant la décomposition spectrale*

$$P = DDiag(\lambda_i)D^{-1} = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{d}_i \, \vec{g}_i \Longrightarrow P^n = \sum_i \lambda_i^n \boldsymbol{d}_i \, \vec{g}_i,$$

montrer que

$$P^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

3. *Montrez que avec $(a,b) \neq (0,0)$, et $(a,b) \neq (1,1)$, la limite*

$$\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n = \boldsymbol{P} = \sum_{i:\lambda_i=1} \boldsymbol{d}_i \, \vec{g}_i = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}.$$

4. *Est-ce que la limite existe dans le cas $(a,b) = (0,0)$? et dans le cas $(a,b) = (1,1)$?*

En conclusion, on voit qu'on est dans le cas ergodique ssi $a, b \in (0,1)$, et que la loi limite est alors $\boxed{\vec{\pi} = (\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})}$ (indépendamment du point de départ).

Remarque 4.4. *Sauf la décomposition spectrale, d'autres méthodes pour trouver* $\boldsymbol{P}$ *sont possibles, comme le Thm. de Cayley-Hamilton* $p(P) = 0$*, où* $p(z) = \det(zI - P)$*. Dans l'exercice 4.5, on trouve*

$$P^2 = (2-a-b)P - (1-a-b)I \Longrightarrow P^n = x_n P - y_n I, x_2 = 2-a-b, y_2 = 1-a-b, ...$$
$$\binom{x_n}{y_n} = \begin{pmatrix} 2-a-b & -1 \\ 1-a-b & 0 \end{pmatrix} \binom{x_{n-1}}{y_{n-1}} \Longrightarrow \binom{x_n}{y_n} A^{n-2} \binom{x_2}{y_2}, A = \begin{pmatrix} 2-a-b & -1 \\ 1-a-b & 0 \end{pmatrix}$$

Mais, comme A *a la même décomposition spectrale comme* P*, on n'a gagné rien.*

4.5 Un exemple avec une seule classe récurrente

Examinons maintenant pour ergodicité un exemple avec une seule classe récurrente, et contenant aussi des elements transitoires.

Exercice 4.6. *Calculez en résolvant les équations d'équilibre les vecteurs propres* $\vec{\pi} P = \vec{\pi}, \vec{\pi}\mathbf{1} = 1, P\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, \vec{\pi}\boldsymbol{v} = 1$*) la matrice limite* $\boldsymbol{P}$ *si*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & b \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

en supposant que la matrice $Q = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est sous-stochastique.*

Ind : Pour les vecteurs propres 'a gauche, montrez que le système pour les états transitoires implique $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0$. Pour les vecteurs propres 'a droite, montrez que le système pour les états récurrents implique $v_4 = v_5 = 1$, et en suite que le système pour les états transitoires implique $v_1 = v_2 = v_3 = 1$.

Réponse: Le vecteur propre à gauche est unique, donné par le vecteur propre à gauche de la classe récurrente, avec des 0 ajoutés sur les positions transitoires. Le vecteur propre à droite est $(1, ..., 1)$.

4.6 Les probabilités d'absorbtion

Définition 4.7. *Soit* X_t *un processus, soit* $\mathcal{T}$ *un sous-ensemble arbitraire de l'espace d'états et soit* ∂ *son complémentaire. On appelera* **processus absorbé en l'ensemble d'arret** ∂ *le processus* $\widetilde{X}_t$ *obtenu à partir de* X_t *en modifiant tous les états en* ∂ *en sorte qu'ils soient absorbants.*

Dans le prochaine exemple, nous utilisérons plusieurs ensembles d'arret.

Exemple 4.3. *Pour une* **marche aléatoire** X_t, $t = 0, 1, 2, ...$ **sur le graphe papillon** *ci-dessous, calculer :*

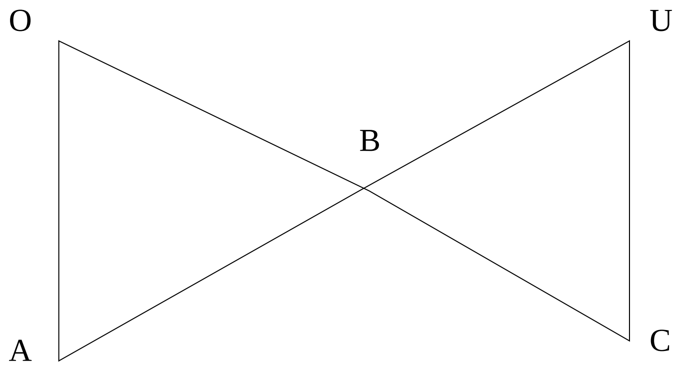


FIGURE 4.1 – **Marche aléatoire simple sur le graphe papillon**

1. *L'espérance n_U en sortant de U du nombre de pas N jusqu'au noeud O.* Indication : *Utiliser la symmetrie.*
2. *Les probabilités stationnaires de chaque noeud.*
3. *L'espérance en sortant de O du nombre de pas $\widetilde{N}_O$ jusqu'au premier retour à O.*
4. *La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_N = O\} = \mathbb{P}_A\{N_O < N_U\}$, où $N = \min[N_U, N_O]$.*

Solution : 4) En résolvant le système d'absorbtion pour p_A, p_B, p_C, on trouve $p_A = 3/4, p_B = 1/2, p_C = 1/4$■.

Supposons qu'il y a plusieurs états absorbants à probabilités d'absorbtion $\boldsymbol{p}^{(j)}, j \in S - \partial$, qui donnent des "prix finals" $\boldsymbol{f} = \{f_j, j \in \partial\}$, posons $\widehat{p}_i = \mathrm{E_i f(N)}$, et $\widehat{\boldsymbol{p}} = \{\widehat{p}_i, i \in S - \partial\}$ le vecteur de prix finals espérés. Le calcul de $\widehat{\boldsymbol{p}}$ est le fameux **problème de Dirichlet**. Par exemple, pour $\boldsymbol{f}_j = \{0, ..., 0, 1, 0, ...\} = \{\delta_j(i), i = 1, 2, ...\}$ (avec le 1 sur la position j) on obtient les probabilités d'absorbtion $\widehat{p}_i(j) = \mathbb{P}_i\{X_N = j\} = \mathrm{E_i I_{\{X_N=j\}}}$. La théorie des chaînes pour les quelles tous les états récurrents sont absorbants peut être utilisée pour étudier n'importe quelle chaîne, en modifiant certaines transitions.

Théorème 4.2. *a) Avec un prix final arbitraire $\boldsymbol{f} = (f_i, i \in \partial)$, les prix finaux espérés $\boldsymbol{p} = (p_i = E_i f(X_T), i \in \mathcal{T} \cup \partial)$ à partir de tous les états satisfont le* **système d'absorbtion**

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{p} = 0, \quad \boldsymbol{G} := \boldsymbol{P} - \boldsymbol{I} \tag{4.8}$$

$$p_i = f_i, \quad \forall i \in \partial \tag{4.9}$$

b) Le vecteur $\widetilde{\boldsymbol{p}} = (p_i, i \in \mathcal{T})$ d'espérances du prix final $\boldsymbol{f}$ satisfait le **système d'absorbtion**

$$\widetilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{p}_{(\mathcal{T},\partial)}\boldsymbol{f}$$

c) Avec une distribution initiale $\boldsymbol{\alpha}$ sur les états transitoires, on a :

$$\widetilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\alpha}(I - \boldsymbol{Q})^{-1})\boldsymbol{p}_{(\mathcal{T},\partial)}\boldsymbol{f}$$

En particulier

Corollaire 4.2. *Les probabilités d'absorbtion $\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(j)}$ dans un état absorbant fixe j satisfont le* **système d'absorbtion**

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(j)} = \boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(j)} + \boldsymbol{p}^{(j)}_{(\mathcal{T},\partial)}, \quad \widetilde{\boldsymbol{p}}^{(j)} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{p}^{(j)}_{(\mathcal{T},\partial)}$$

où $\boldsymbol{p}^{(j)}_{(\mathcal{T},\partial)}$ denote le vecteur des probabilités de transition dans l'état absorbant j. La matrice $\boldsymbol{P}^{(abs)}$ des probabilités d'absorbtion ayant $\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(j)}$ comme colonnes satisfait :

$$\boldsymbol{P}^{(abs)} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{(abs)} + \boldsymbol{p}_{(\mathcal{T},\partial)}, \quad \boldsymbol{P}^{(abs)} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{p}_{(\mathcal{T},\partial)}.$$

4.7 Un exemple de chaîne decomposable, avec deux classes récurrentes

Nous allons examiner maintenant une chaîne décomposable (pour la quelle la distribution stationnaire n'est pas unique, mais peut prendre toute valeur possible dans l'ensemble convexe engendré par les distributions stationnaires des classes recurents).

Exemple 4.4. Exemple de non unicité de la loi stationaire π *: Dans l'exemple défini par la matrice ci dessous, cherchons* $\vec{\pi} \in (\mathbb{R}^+)^5$ *tel que* $\vec{\pi}P = \vec{\pi}$ *et* $\sum_{i=1}^{5} \pi_i = 1$.

$$\vec{\pi}P = \vec{\pi} \iff (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \pi \iff \begin{cases} \pi_2 = 0 \\ \pi_1 = \pi_3 \\ \pi_5 = 2\pi_4 \\ \sum_{i=1}^{5} \pi_i = 1 \end{cases}$$

Ces équations ont comme solution $\vec{\pi} = (a, 0, a, b, 2b)$ *avec* $2a + 3b = 1$, *donc pas d'unicité.*

Cette chaîne étale des "pathologies", qu'on peut percevoir en examinant le **graphe de communication de la chaîne**.

Après le rangement facilitant des éléments dans l'ordre $1, 3, 2, 4, 5$, on decouvre une structure bloc-diagonale :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

avec $B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et encore

$$P = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q & q_2 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2}.$$

Remarque 4.5. *Rémarquons que* B_1 *et* B_2, *correspondant respectivement aux états récurrents* $(1, 3)$ *et aux états récurrents* $(4, 5)$, *sont des matrices stochastiques, et* Q, *correspondant à l'état transient* 2, *est une matrice strictement sous-stochastique.*

La structure des blocs montre que

1. le graph de communication se décompose en deux classes : $(1, 3)$ et $(2, 4, 5)$ qui ne communiquent pas. Aussi,

$$P^n = \begin{pmatrix} B_1^n & 0 & 0 \\ q_1(n) & Q^n & q_2(n) \\ 0 & 0 & B_2^n \end{pmatrix}$$

et cela implique qu'on peut étudier les trois chaînes correspondant aux classes B_1, B_2 et Q séparément.

2. il existe un seul élément "**transient**" 2, qu'on quittera sans retour après un nombre géométrique des boucles, pour aller en B_2. Par conséquent, on verifie immediatement que $Q^n = P^n(2,2) = (1/2)^n \to 0$ (le théorème concernant les puissances des matrices strictement sous-stochastiques est ici trivial).

Remarque 4.6. *La presence des deux classes recurrentes implique qu'il n'y a pas d'unicité de la loi stationnaire/vecteur propre a gauche. En effet, les lois stationnaires des deux classes recurrentes* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$ *et* $\left(0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ *sont des vecteurs propres a gauche, et ainsi sont toutes leurs combinaisons convexes.*

En conclusion,

$$\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Il reste encore à déterminer x_1, x_2.

Exercice 4.7. *Montrer à partir d'un systéme des récurrences que ces deux quantités sont aussi* $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$.

Remarque 4.7. *Ce problème peut être aussi abordé par la décomposition spectrale, en determinant lec vecteurs propres à droite et à gauche, qui peuvent être lues dans la décomposition*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{d}_1 \vec{g}_1 + \boldsymbol{d}_2 \vec{g}_2$$

Le plus intéressant est l'approche probabiliste, basé sur le fait qu'une fois arrivé dans la classe ergodique $\{4, 5\}$*, la chaîne oubliera sa position initiale (i.e. le point d'entrée dans la classe ergodique) et finira dans la loi (d'incertitude) stationnaire de la classe récurrente. En conclusion*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Intuitivement, avec plusieurs destinations (classes ergodiques) possibles, il va faloir encore multiplier leurs lois stationnaires par les probabilités d'absorbtion respectives. §

Définition 4.8. *Soit i un élément transient d'une chaîne* X_n*, et soit j un élément apartenant à une classe récurrente* $\hat{j}$*. On appelera* **probabilité d'absorbtion** $p_i(\hat{j})$ *la probabilité que la chaîne commençée en i finisse en* $\hat{j}$*.*

§. Rigoureusement, on utilisera une décomposition de "la vie de la chaîne" dans la partie qui précede l'absorbtion, et la partie qui s'ensuit.

Exemple 4.5. *Dans l'exemple ci-dessus, le fait qu'il existe une seule classe destination possible pour l'élément transient* 2*, implique l'absorption dans cette classe est sùre, et donc que* $p_2(\hat{4}) = p_2(\hat{5}) = 1$.

On peut montrer que pour j appartenant à une classe récurrente nonpériodique $\hat{j}$, la limite $lim_{n\to\infty}P^n(i,j)$ existe, et elle satisfait :

$$lim_{n\to\infty}P^n(i,j) = p_i(\hat{j})\ \pi(j)$$

où on a dénoté par $\pi(j)$ la probabilité stationnaire de j dans sa classe (qui coincide avec $lim_{n\to\infty}P^n(i,j)$ pour $i \in \hat{j}$). Ce deuxième facteur reflète le fait évident qu'une fois absorbée dans une classe fermée, la marche oubliera sa position initiale et donc aura exactement les probabilités limites de la classe.

Cette loi multiplicative est assez claire intuitivement : elle reflète l'indépendance entre le comportement avant et après absorption, et se vérifie facilement [1].

En conclusion, le calcul des limites $lim_{n\to\infty}P^n(i,j)$ pour i transitoire et j récurrent demande le calcul des probabilités d'absorption $p_i(\hat{j})$ et l'application du lemme 5.2.

Si dans l'exemple 4.4 l'élément transient aurait eu des possibilités de passage vers les deux classes récurrentes existantes, ça nous aurait obligé de résoudre un problème d'absorbtion avant de calculer la limite $\lim_{n\to\infty} P^n$. Considerons par exemple

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Ici, evidemment,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} & \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Considerons maintenant

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

1. En conditionnant sur la position k d'arrivée dans la classe de récurrence $\hat{j}$ de j après le temps T de transition de la partie transitoire, on trouve que :

$$lim_{n\to\infty}P^n(i,j) = \sum_{k\in\hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\}\ \ lim_{n\to\infty}P^n(k,j) \text{ (par propr. Markov)} \tag{4.10}$$

$$= \sum_{k\in\hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\}\ \pi(j) \text{(par ergodicité de la classe récurrente)} \tag{4.11}$$

$$= \pi(j) \sum_{k\in\hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\} = p_i(\hat{j})\ \pi(j) \tag{4.12}$$

Ici,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

La probabilité d'absorbtion $x = p_2(\widehat{1})$ satisfait

$$x = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \times 0, \Longrightarrow x = \frac{1}{4}$$

et l'autre probabilité d'absorbtion est $p_2(\widehat{4}) = 1 - p_2(\widehat{1}) = \frac{3}{4}$.

Remarque 4.8. *En conclusion, la base de l'espace des vecteurs propres à gauche est toujours donné par les vecteurs propres à gauche des classes récurrentes $\vec{g}(\widehat{j})$, et cela fournissent les lignes $\boldsymbol{P}_i, i \notin \mathcal{T}$. Finalement, les lignes $\boldsymbol{P}_i, i \in \mathcal{T}$ sont des combinaisons convexes, avec des coefficients obtenues en resolvant le problème d'absorption*

$$\boldsymbol{P}_i = \sum_{\widehat{j}} p_i(\widehat{j}) \vec{g}(\widehat{j}).$$

4.8 Le calcul de la matrice asymptotique et des vecteurs propres à gauche et à droite au cas de plusieurs classes récurrentes

Exercice 4.8. *Calculer la matrice $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ pour l'exemple :*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 1-a-b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution : après le rangement facilitant des éléments dans l'ordre $1, 4, 6, 2, 3, 5$ la matrice de transition devient :

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1-a-b & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

On aperçoit par la structure de matrice à "blocs" qu'on peut traiter les classes (2) et $(3, 5)$ séparément. Ici, l'absorption dans les classes récurrentes se fait toujours en partant de 1, et alors les probabilités d'absorption de 4 et 6 sont identiques aux celles de 1. En plus, l'absorption se fait avec les probabilités données a, b dans les classes récurrentes (2) et $(3, 5)$, respectivement.

Finalement, on trouve par le lemme (5.2)

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Le problème du calcul de $\boldsymbol{P}$ a été simplifié ci-dessus par la connaissance immédiate des probabilités d'absorption $p_i(\widehat{j})$ dans chacune des classes récurrentes. En applications, il faudra calculer les probabilités d'absorption $p_i(\widehat{j})$ séparément pour chaque classe, sauf une, en résolvant un système d'absorption correspondant, obtenu en "collant ensemble" tous les éléments de chaque classe (pour la dernière classe, on peut obtenir les probabilités d'absorption comme complémentaires de celles dans les autres classes)

Exercice 4.9. *Calculer la matrice* $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ *pour l'exemple :*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & b & 0 & 1-b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution : après le rangement des éléments dans l'ordre $1, 4, 6, 2, 3, 5$ la matrice de transition devient :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1-b \end{pmatrix}$$

Le système d'absorption :

$$p_1(2) = \frac{1}{3}p_4(2) + \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}0$$
$$p_4(2) = \frac{1}{2}p_4(2) + \frac{1}{2}1$$
$$p_6(2) = p_1(2)$$

donne $p_1(2) = 3/5 = p_6(2)$ et $p_4(2) = 4/5$, et alors les probabilités complémentaires sont : $p_1(\widehat{3}) = 2/5 = p_6(\widehat{3})$ et $p_4(\widehat{3}) = 1/5$ (les résultats auraient pu être dévinés, en observant que l'absorption dans les classes récurrentes se fait seulement en partant de 1 et de 4, tandis que 6 a les mêmes probabilités d'abs. que 1. Posant $\widetilde{a} = \frac{a}{a+b}, \widetilde{b} = \frac{b}{a+b}$ on trouve finalement :

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\widetilde{b} & \frac{2}{5}\widetilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\widetilde{b} & \frac{1}{5}\widetilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\widetilde{b} & \frac{2}{5}\widetilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Conclusion : On voit que la connaissance de la structure du graphe de communication simplifie considerablement le problème du calcul de la limite $\boldsymbol{P}$.

Exercice 4.10. *Demontrez le théorème suivant.*

Théorème 4.3. *a) Si la matrice asymptotique $\boldsymbol{P}$ existe, il s'agit d'une matrice stochastique et idempotente ($\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$). Les lignes de $\boldsymbol{P}$ sont des vecteurs propres à gauche.*

b) Les lignes récurrentes de $\boldsymbol{P}$ sont les points extremaux de l'ensemble convexe des toutes les lois asymptotiques possibles $\boldsymbol{\Pi}$.

Exercice 4.11. *a) Pour une chaîne a deux états $0, 1$ avec $P_{0,1} = \lambda, P_{1,0} = \mu$, calculez l'esperance t_0 du temps de retour T_0 (retour en 0, conditionné par un départ en 0). b) Verifiez l'identité $t_0 = \pi_0^{-1}/P_0[X_1 \neq 0]$, valable pour toutes les chaînes ergodiques. c) Quelle est la distribution du T_0 ?*

4.9 (*) La périodicité

Rapellons l'exercice (2.2), ou plutôt sa matrice après le rearrangement $\{5, 3, 1, 4, 6, 2\}$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque, en regardant le graph de communication, que la classe transiente 1,4,6 a une propriété speciale : chaque'un de ses elements peut être visité seulement aux dates qui sont congruents mod(3). Cette propriété, apellée périodicité, est aussi rendue evidente en calculant les puissances de

$$Q = P_{\{1,4,6\}} = P \text{ projeté sur } \{1, 4, 6\} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui satisfait $Q^3 = \frac{1}{16} I$. On peut aussi detecter la periodicité en calculant les valeurs propres, c.-à-d. les racines du pol char. Dans l'exercice (2.2), elles sont : $[(1-x)(1-12x)](1-16x^3)(1-x)$ (les trois termes correspondent aux projections sur les trois classes). Rémarquer que les trois racines cubiques satisfaisant $\lambda_i^3 = 1/16, i = 1, 2, 3$ provenant de la classe transiente à $Q = P_{\{1,4,6\}}$ qui satisfait $Q^3 = \frac{1}{2} Id$, exhibent aussi une périodicité de degré 3, "diminuant vers 0".

La periodicité est mieux abordée probabilistiquement, en analysant, pour chaque état e_i, l'ensemble A_i de temps pour lequels il est possible de se trouver en i en partant de i, c.-à-d.

$$A_i = \{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Remarque 4.9. *Cet ensemble des "longueurs possibles des cycles" est fermé sous l'opération d'addition, c.-à-d. cet ensemble est un sous groupe de $\mathbb{N}$.*

Définition 4.9. *Soit e_i dans E. On appelle période de e_i l'entier $d(i) = p\gcd\left\{n > 0\,;\, p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$ (autrement dit : $p_{ii}^{(n)} > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = md(i)$). Si $d(i) = 1$, l'état e_i est dit apériodique.*

Remarque 4.10. *Une classe de communication à matrice de transition P, pour laquelle il existe un entier c tel que $P^c = I$, apellée cyclique d'ordre c, est forcement périodique, et la période d est parmi les diviseurs de c. Par exemple, en changeant la classe transitoire dans l'exemple ci-dessus en sorte qu'elle contient un cycle de longueur* 4 *et un de longueur* 2, *on obtient une classe cyclique d'ordre* 4 *et période* 2.

Exemple 4.6.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On aperçoit immédiatement la classe récurrente $6, 7$ et les classes transitoires 1 et $2, 3, 4, 5$. La dernière classe est le collage des deux cycles de période 3, ce que donne immédiatement que $A_2 = \{3k, k \geq 0\} = \{3, 6, 9, ...\}$. Si par contre un de ces cycles avait une longueur pas divisible par 3, par exemple 4, on aurait eu : $A_2 = \{3k + 4l, k, l \geq 0\} = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, ...\}$, dans quel cas A_2 contient tous les nombres en partant de 6.

Remarque 4.11. *On voit que les ensembles A_i contiennent toujours tous les nombres de la forme $k\ d(i)$, pour k assez grand, et cela est un résultat valable pour n'importe quel semigroup de* $\mathbb{N}$.

En conclusion, il y a deux possibilités pour les ensembles A_i, en dépendant de d=p.g.c.d de la longueur des cycles :

1. Dans le cas $d = 1$, cet ensemble contient "tous les nombres assez grands" (en partant d'un certain point).
2. Dans le cas $d > 1$, cet ensemble est un sous ensemble du sous groupe $d\,\mathbb{N}$.

Proposition 4.1. *La période ne dépend que de la classe.*

Définition 4.10. *Une classe ayant un (et donc toutes les elements) de période 1 est dite apériodique.*

Exercice 4.12. *L'existence d'une boucle dans une classe, c.-à-d. $p_{ii} > 0$, assure l'apériodicité.*

Remarque 4.12. *La périodicité des classes transitoires n'empeche pas du tout le calcul de la matrice asymptotique –voir les exemples 4.8, 4.9). En effet, même que la matrice P^n contiendra toujours des* 0 *qui alternent avec des nombres positives, la masse totale de la partie transitoire converge vers 0.*

Par contre, la périodicité dans une classe récurrente rend la convergence impossible, à cause de la presence des valeurs propres qui sont racines de l'unité, (par Perron-Frobenius).

Donc, la limite $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n(i,j)$ d'une chaîne existe ssi il n'y a pas des classes récurrentes périodiques.

Finalement, on distingue deux cas :

1. Dans l'absence des classes récurrentes périodiques, l'ensemble $\mathbf{\Pi}$ peut être obtenue en calculant les puissances P^n, ou en resolvant le système d'équilibre.
2. Dans la présence des classes récurrentes périodiques, l'ensemble $\mathbf{\Pi}$ peut être obtenue seulement en trouvant les vecteurs propres à gauche (c.-à-d. en resolvant le système d'équilibre).

4.10 (*)Le théorème de Perron-Frobenius et ses conséquences

En parallel avec l'introduction par Markov (1906) des processus qui portent aujourd'hui son nom, Perron (1907) elucidait la théorie spectrale des matrices P avec elements strictement positifs.

Théorème 4.4. *(Perron) Soit P une matrice carrée à coefficients réels* **strictement positifs**. *Alors*

1. *P a une valeur propre simple λ_P qui est réelle, strictement positive et strictement supérieure au module de toute autre valeur propre :*

$$\lambda_P = \rho(P) := \max |\lambda(P)| > \max_{\lambda \neq \lambda_P} |\lambda(P)|.$$

2. *L'espace propre associé à cette valeur propre maximale ρ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur propre dont toutes les coordonnées sont strictement positives.*

Les matrices intervenant dans les applications sont rarement strictement positives. Par contre, elle satisfont souvent la condition ci-dessous.

Définition 4.11. *Une matrice sera appellée essentiellement positive, ou primitive, s'il existe k tel que P^k est strictement positive.*

L'extension du théorème de Perron aux matrices essentiellement positives, et finalement au cas général des matrices à coefficients nonnegatifs a été fournie par Frobenius (1912), au prix de la perte de tous les "strictement" dans les conclusions.

Théorème 4.5. (*) Le théorème de Frobenius *Soit P une matrice finie sans éléments négatifs. Alors :*

1. *Parmi les valeurs propres de module maximal il existe toujours une, $\lambda = \lambda_P$ qui est* **réelle positive**, *qu'on appellera* **la valeur propre de Perron-Frobenius**. *Dès lors, toutes les autres valeurs propres ont une valeur absolue inférièure ou égale à la valeur propre λ_P.*
2. *Le bloc de Jordan correspondant à λ_P a une structure diagonale (c.-à-d. la multiciplité algebrique ν_P de λ_P est égale à la dimension de son espace de vecteurs propres).*
3. *Les espaces des vecteurs propres à droite et à gauche de λ_P contiennent chacun une base de vecteurs propres $\boldsymbol{v}_i^{(P)}, \vec{\pi}_i^{(P)}, i = 1, 2, ..., \nu_P$ ayant* **toutes leurs composantes nonnégatives**.
4. *S'il y a d'autres valeurs propres égales à λ_P en valeur absolue, elles doivent être des racines de λ_P, c.-à-d. de la forme $\lambda_P^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$.*

Remarque 4.13. *On peut reduire ce problème au cas particulier des matrices stochastiques.*

Remarque 4.14. *Cette structure spectrale est liée á la structure du graphe de communication entre les états obtenu à partir des elements nonnuls de la matrice P (voir section 2.1), qui est obtenue en normalisant les lignes de A pour obtenir une matrice stochastique.*

Par exemple, a) la multiciplité de λ_P est égale au nombre des classes récurrentes, b) les vecteurs propres nonnegatifs à gauche $\vec{\pi}_i^{(P)}, i = 1, 2, ..., \nu_P$ de λ_P sont proportionels aux lois stationnaires des classes récurrentes, et c) au cas des matrices irréductibles (avec une seule classe de communication), le nombre des racines à valeur propre égale a λ_P (appellé indice d'imprimitivité), et égale au p.g.c.d. des longueurs des cycles du graphe.

Dans le cas des matrices stochastiques qui nous concerne, certaines parties de la théorie de Perron-Frobenius deviennent plus simples.

Théorème 4.6. *Soit P une matrice stochastique. Alors*

a) La valeur propre de Perron est $\lambda_P = \rho_P = 1$, i.e. si λ est une valeur propre d'une matrice stochastique à coefficients strictement positifs, alors forcémment $|\lambda| \leq 1$.

b) L'espace des vecteurs propre à droite de $\lambda_P = 1$ contient $\mathbf{1}$.

c) Toutes les valeurs propres d'une matrice strictement sous-stochastique Q ont valeurs absolues inferieurs à 1. Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} Q^n = 0$$

c.-à-d. **la limite des probabilités de transition entre les états transients est** 0.

Démonstration: de a), c) Rappelons le **théorème de Gershgorin**. Soit A une matrice complexe de taille $n \times n$, de terme général (a_{ij}). Pour chaque indice de ligne i entre 1 et n on introduit le disque de Gerschgorin correspondant

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C}, |a_{ii} - z| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right\} = D(a_{ii}, R_i), \quad R_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|,$$

qui constitue effectivement un disque dans le plan complexe, de rayon R_i.

Théorème Gerschgorin : toute valeur propre de A appartient à l'un au moins des disques de Gerschgorin.

Le théorème 4.6 a), c) est une conséquence immédiate du théorème Gerschgorin.

Exercice 4.13. *1) Démontrer directement la partie a) de la proposition ci-dessus, i.e. qu'une matrice stochastique P n'a pas de valeurs propres avec module plus grand que* 1.

2) Montrer aussi que si la matrice P est essentiellement positive, alors l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres réels de la valeur propre 1 *est* $\{a\mathbf{1}, a \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration: : 1) *Idée* : Pour fixez les idées, considérez d'abord le cas où $n = dim(P) = 2$.

Supposons maintenant l'existence d'un vecteur propre v pour une valeur propre λ avec $|\lambda| > 1$ et montrons que cela ramène a une contradiction. Intuitivement, ce qui cloche est que les moyennes ponderées du vecteur propre v données par Pv ne peuvent pas augmenter les composantes de v. Considérons donc l'équation $(Pv)_i = v_i$ correspondant à un indice i tel que $|v_i| \geq |v_j|, \forall j \neq i$, où la contradiction a plus des chances d'apparaitre. Pour simplifier encore, on peut aussi supposer que le vecteur propre v est normalisé tel que l'élément de valeur absolue maximale satisfait $v_i = 1$. Il suit alors que

$$|\lambda| = |\lambda| v_i = |\sum_j P_{ij} v_j| \leq \sum_j P_{ij} |v_j| \leq \sum_j P_{ij} = 1, \tag{4.13}$$

et nous arrivons a une contradiction.

Pour une formulation plus "soutenue" de ce raisonnement, démontrons que pour toute matrice carré P, le rayon spectral est moins que la norme max :

$$\rho(P) \leq \|P\|_\infty := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Px\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|Px\|_\infty,$$

où $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ (cette majorisation est vraie en fait pour toute norme matricielle induite par une norme vectorielle).

Le même raisonnement lit :

$$1 \leq \rho(P) \leq \|P\|_\infty = \max_{x:\max_j |x_j|\leq 1} \max_i |\sum_j P_{ij}x_j| \leq \max_i \sum_j P_{ij} = 1 \Longrightarrow \rho(P) = 1.$$

Alternativement, on peut utiliser le puissant théorème de Gershgorin, qui assure que chaque valeur propre doit λ appartenir à l'union des cercles

$$\lambda \in \cup_i \{|\lambda - P_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |P_{ij}|\}.$$

Pour les matrices stochastiques, cette union est inclue dans le cercle unitaire

$$\{|\lambda - P_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} P_{ij} = 1 - P_{ii}\} \subset \{|\lambda| \leq 1\}.$$

Par cette méthode, les sous regions du cercle unitaire ou se trouvent les valeurs propres des matrices nonnegatives d'une dimension donnée n ont été identifié par Dmitriev et Dynkin ($n \leq 5$) et Karpelevich (n arbitraire).

2) Comme les espaces vectoriels engendrés par les vecteurs propres de la valeur propre 1 coincident pour P et $P' = P^k$, et comme P stochastique implique P^k stochastique, il suffit de demontrer le résultat pour P', i.e. il suffit de considérer le cas de P strictement positive.

Prenons un vecteur propre v pour la valeur propre 1, supposant encore qu'un élément de valeur absolue maximale satisfait $v_i = 1$. Il suit par (4.13) que $|v_j| = 1$ pour tous les indices, et, si v est réel, alors $v = \mathbf{1}$ QED

En conclusion, les questions fondamentales de la théorie des chaînes de Markov sont :

1. le calcul des probabilités de transition P^n
2. le calcul des matrices asymptotiques $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$
3. le calcul des **probabilités d'absorbtion** $q_{i,j}(n), i \in \mathcal{T}, j \in \mathcal{R}, n = 1, 2, ...,$ des limites $q_{i,j} = \lim_{n\to\infty} q_{i,j}(n), i \in \mathcal{T}, j \in \mathcal{R}$, et des **probabilités de survie** $s_i(n) = 1 - \sum_j q_{i,j}(n)$.

Le prochain chapitre examine en detail la deuxième question.

Chapitre 5

Le calcul de la matrice asymptotique $\boldsymbol{P} = lim_{n\to\infty}P^n$ par l'approche spectrale

5.1 Révision de la diagonalisation des matrices

En vue de l'importance de la structure spectrale, nous allons réviser maintenant la décomposition spectrale, dans le cas le plus simple des racines propres distinctes (en sachant que le cas général demande juste l'utilisation de la décomposition de Jordan).

Lemme 5.1. *a) Soit une matrice A de dimension n ayant un ensemble de n vecteurs propres à droite independants $\boldsymbol{d}_i$ (ce cas a lieu par exemple quand toutes les valeurs propres de P sont distinctes), et donc aussi un ensemble de n vecteurs propres à gauche independants $\vec{g}_i$. Alors, on a la décomposition spectrale*

$$A = D\Lambda D^{-1} := G^{-1}Diag(\lambda_i)G$$

où $D = (\boldsymbol{d}_1 \mid \boldsymbol{d}_2 \mid \ldots \ \boldsymbol{d}_n)$ est la matrice ayant $\boldsymbol{d}_i$ comme colonnes, où $\Lambda = Diag(\lambda_i)$ est une matrice diagonale (λ_i sont les valeurs propres), et où $G = D^{-1}$. Par conséquent, $\vec{g}_i$ peuvent être choisis comme lignes de la matrice $G = D^{-1}$, ce qui assure $\vec{g}_i\boldsymbol{d}_j = \delta_{i,j}$.

b) La décomposition spectrale

$$A = D\Lambda G$$

peut être écrite comme décomposition en matrices de rang 1 :

$$A = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{d}_i \ \vec{g}_i \tag{5.1}$$

Démonstration: b) Décomposons $\Lambda = Diag(\lambda_i) = \sum_i \lambda_i E_i$, où E_i est la matrice projection sur la coordonné i. Alors

$$A = D(\sum_i \lambda_i E_i)G = \sum_i \lambda_i (DE_iG) = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{d}_i \ \boldsymbol{g}_i$$

Remarque 5.1. *En utilisant la représentation* (5.1), *on trouve dans le cas diagonalisable que*

$$P^n = D\Lambda^n G = \sum_i \lambda_i^n \boldsymbol{d}_i \vec{g}_i \tag{5.2}$$

et que convergence peut avoir lieu seulement dans l'absence des valeurs propres $\lambda_i \neq 1$ avec $|\lambda_i| = 1$ (qui donnent naissance à des de périodicités).

Exercice 5.1. *Déterminer la limite $\boldsymbol{P} := \lim_{n\to\infty} P^n$ pour une chaîne ayant*

1. 1 *comme la seule valeur propre de module* 1*, et ayant multiplicité* 1

2. des valeurs propres de P *distinctes (c.-à-d. une forme de Jordan diagonale, ce qui n'est pas nécéssaire, mais simplifie l'exposition).*

Réponse: Il suit immédiatement par la décomposition spectrale que

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty} DDiag(\lambda_i^n)D^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_i \lambda_i^n \boldsymbol{d}_i \, \boldsymbol{g}_i = D \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} D^{-1} = \mathbf{1} \, \vec{\pi},$$

en appliquant la Lemme 5.1 avec $R = 1$.

Passant à la limite en (5.2), on trouve :

Proposition 5.1. *Dans l'absence des valeurs propres* $\lambda_i \neq 1$ *avec* $|\lambda_i| = 1$*, et en supposant une structure diagonale pour la matrice de Jordan, on a :*

$$\boxed{P^n \Longrightarrow \boldsymbol{P} = \sum_{i:\lambda_i=1}^{R} \boldsymbol{d}_i \vec{g}_i = DG} \tag{5.3}$$

où R *est la multiplicité de la valeur propres* 1 *(=le nb des classes récurrentes), et* D, G *sont les matrices ayant* $\boldsymbol{d}_i$ *et* $\vec{g}_i$ *comme colonnes et lignes, respectivement.*

Remarque 5.2. *Cette formule reste encore valable dans le cas général, même que la décomposition de Jordan peut contenir des blocs nondiagonales, car les blocs de Jordan associée à des valeurs propres tel que* $|\lambda_i| < 1$ *disparaissent dans la limite* $n \to \infty$ *(vérifier !).*

Définition 5.1. *Nous allons appeller les vecteurs* $\boldsymbol{d}_i$ *et* $\vec{g}_i$ *en* (5.3) *vecteurs propres asymptotiques de* P *ou vecteurs de Perron.*

Exercice 5.2. *Montrer que les vecteurs propres asymptotiques de* P *sont aussi des vecteurs propres de la matrice asymptotique* $\boldsymbol{P}$*.*

5.2 La structure des blocs de la matrice asymptotique

Nous allons considerer maintenant la structure des blocs de la matrice asymptotique (dans l'absence des classes récurrentes périodiques). Soit

$$P = \begin{pmatrix} Q & \boldsymbol{p}_1 & ... & ... & \boldsymbol{p}_R \\ 0 & P_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ... & P_R \end{pmatrix}$$

une décomposition de la matrice de transition P, avec $P_i, i = 1, ..., R$ étant les projections de la matrice P sur les classes récurrentes, et avec Q étant la projection de la matrice P sur les classes transitoires. Il est facile de vérifier que la puissance P^n est de la forme :

$$P^n = \begin{pmatrix} Q^n & \boldsymbol{p}_{1,n} & ... & ... & \boldsymbol{p}_{R,n} \\ 0 & P_1^n & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & P_2^n & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ... & P_I^n \end{pmatrix}$$

Cette formule de décomposition reflète les idées suivantes :

1. Les classes récurrentes "ne savent" pas du tout qu'il existe un "monde extérieur" ; par conséquent, la projection P_i de la matrice P sur une classe récurrente i est elle même une matrice stochastique et la projection de la puissance P^n sur la classe i est précisément P_i^n ; ce calcul peut être effectué en ignorant le reste des éléments. Le même est vrai pour les probabilités de transition $Q^n(i,j)$ entre i et j transitoires, c.-à-d. la projection de la puissance P^n sur les classes transitoires est précisément Q^n et peut être donc aussi calculée en ignorant le reste des éléments.
2. Les probabilités $P^n(i,j)$ pour i,j récurrentes, mais dans des classes différentes sont toujours 0 (comme pour $n = 1$) et alors la limite est aussi 0. Le même est vrai pour les probabilités $P^n(i,j)$ pour i récurrentes et j transitoires.
3. La limite de Q^n sera toujours 0, parce que la matrice Q est sous-stochastique, et les limites de P_i^n seront donné par le théorème ergodique.

En conclusion, si la limite $\boldsymbol{P}$ existe, elle est de la forme :

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{T}_1 & ... & ... & \boldsymbol{T}_I \\ 0 & \Pi_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ... & \Pi_I \end{pmatrix}$$

où les elements de $\boldsymbol{T}_1, ..., \boldsymbol{T}_I$ sont donnés par la formule

$$\boxed{lim_{n\to\infty} P^n(i,j) = p_i(\widehat{j})\ \pi(j)} \tag{5.4}$$

qui multiplie les probabilités d'absorption dans la classe de récurrence de j $p_i(\widehat{j})$ avec les probabilités stationnaires $\pi(j)$. Pour lier ça à la structure spectrale, nous ajoutons maintenant une version matricielle de la formule (5.4).

Lemme 5.2. *Sa limite $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ existe, alors*

$$\boldsymbol{T}_{\widehat{j}} = \boldsymbol{p}_{\widehat{j}} \times \vec{\pi}_{\widehat{j}}$$

est une matrice de rang 1 (et cela implique (5.4)).

Exercice 5.3. *Démontrer la lemme 5.2, à partir des deux équations $P\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}P = \boldsymbol{P}$.*

Théorème 5.1. *1. La limite $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ existe ssi la matrice P n'a pas des valeurs propres avec $|\lambda| = 1$ à part la valeur propre de Perron-Frobenius $\lambda_P = 1$ (c.-à-d. s'il n y a pas des périodicités), dans quel cas elle est donnée par (5.3).*

2. *La multiplicité de la valeur propre 1 est égale au nombre R des classes récurrentes.*
3. *Le vecteur propre de Perron à droite correspondant à une classe récurrente j est $\boldsymbol{d}_{\widehat{j}} = (\boldsymbol{p}_{\widehat{j}}, 0, 0, ..., 1, .., 1, 0, ..., 0)$, où $\boldsymbol{p}_{\widehat{j}}$ est le vecteur des probabilités d'absorption dans la classe $\widehat{j}$.*
4. *Le vecteur propre de Perron à gauche est $\vec{g}_{\widehat{j}} = (0, 0, ..., \vec{\pi}_j, ..., 0)$, où $\vec{\pi}_j$ est la distribution stationnaire de la classe $\widehat{j}$, complété par des 0.*

Démonstration: 1. est evident. 2. est une conséquence du théorème 5.2 et 3,4. font l'objet du lemme 5.2.

Corollaire 5.1. *La distribution stationnaire existe et est unique ssi a) la valeur propre de Perron-Frobenius $\lambda = 1$ a multiplicité 1 et b) la matrice P n'a pas des valeurs propres avec $|\lambda| = 1$ à part la valeur propre de Perron-Frobenius $\lambda_P = 1$. Une chaîne satisfaisant les deux conditions ci-dessus est appellée (faiblement) ergodique, et satisfait $P^n \Longrightarrow \mathbf{1}\vec{\pi}$.*

En conclusion, une procédure qui fournisse la limite $\boldsymbol{P}$ doit :

1. identifier les classes récurrentes périodiques, correspondant aux lignes où la limite n'existe pas
2. calculer les **probabilités d'absorbtion** dans les classes récurentes
3. calculer la loi stationnaire des classes récurentes.

Dans la suite, nous allons examiner deux cas particuliers importants.

5.3 Le cas d'une seule classe récurrente

Nous examinons ici les chaînes avec $K = 1$ classes récurrentes, et matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{P}_r \end{pmatrix}$$

où $\boldsymbol{p}$ contient les probabilités de transition dans les états récurrents. Nous appellerons ce cas faiblement ergodique.

5.3.1 Le théorème de convergence

Nous reformulons ici plus en detail le corollaire 5.1 et le démontrons, ce qui sert a finir la démonstration du théorème 5.1.

Théorème 5.2. *Soit X_n une chaîne de Markov finie. Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes :*

1. *Il existe une seule classe récurrente, qui est apériodique.*
2. *La valeur propre $\lambda = 1$ à multiplicité un, et toutes les autres valeurs propres satisfont $|\lambda| < 1$.*
3. *La matrice asymptotique $\boldsymbol{P}$ existe et est de rang 1 :*

$$\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n = \mathbf{1} \times \boldsymbol{p} = \mathbf{1} \times (\mathbf{0} \quad |\vec{\pi}_\infty), \tag{5.5}$$

où $\vec{\pi}_\infty$ est la distribution stationnaire de la classe récurrente (et $\boldsymbol{p}$ est $\vec{\pi}_\infty$ completé avec des zeros sur les classes transitoires).

Remarque 5.3. *Les vecteurs propres à droite et gauche $\mathbf{1}, \boldsymbol{p}$ de P et de $\boldsymbol{P}$ sont normalisés tel que $\boldsymbol{p}$ est un vecteur des probabilités et tel que*

$$< \boldsymbol{p}, \mathbf{1} >= 1$$

Cette normalisation est souvent convenable – voir aussi (5.3).

Démonstration: L'équivalence entre deux et trois est évidente par la décomposition spectrale (par exemple, la convergence de P^n est équivalente au fait que λ^n converge pour chaque valeur propre λ). Il est aussi évident que $\mathbf{1}$ est l'unique vecteur propre à droite (jusqu'à multiplication par une constante), et en cherchant un vecteur propre à gauche pour $P = \begin{pmatrix} Q & q \\ 0 & P_r \end{pmatrix}$, de la forme $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{p}_r)$, on arrive à :

$$\boldsymbol{p}_t Q = \boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{p}_t q + \boldsymbol{p}_r P_r = \boldsymbol{p}_r \Longleftrightarrow$$
$$\boldsymbol{p}_t = (I - Q)^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}, \boldsymbol{p}_r = \vec{\pi}$$

Remarque 5.4. *Ce théorème célèbre – voir Seneta : Nonnegative matrices pour la longue histoire où figurent Fréchet, Doeblin, von Mises, Kolmogrov – est plus facile a démontrer pour les espace d'états finis. Le cas plus delicat d'espace d'états dénombrables est souvent abordé dans les textes de probabilités modernes par la technique appellée "couplage".*

5.3.2 Le théorème ergodique

Le cas "ergodique" = avec une seule classe récurrente apériodique est très important dans les applications, a cause du :

Théorème 5.3. *(*) Soit $X(n)$ une chaîne de Markov avec une seule classe récurrente apériodique, à loi asymptotique $\vec{\pi}$, et soit une fonction "coùt" f tel que la "moyenne spatiale"* $\mathrm{E}_{\boldsymbol{\pi}}\mathrm{f}(\mathrm{X}_.) = \sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{E}} \pi_\mathrm{j}\mathrm{f}_\mathrm{j}$ *est bien definie. Alors, la moyenne temporelle des coùts converge presque partout vers la moyenne spatiale, pour n'importe quel point de départ initial :*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f(X_n) = \sum_{j\in\mathcal{E}} \pi_j f_j$$

Exercice 5.4. *1) Calculer les lois $\mu(1), \mu(2)$ pour une marche sur le graphe papillon, en sachant que : a) le départ est surement à 0 b) le départ est avec probabilités égales en 0 ou en U, c.-à-d. $\mu(0) = (1/2, 0, 0, 0, 1/2)$. 2) Montrez que la marche aléatoire sur le graph papillon a*

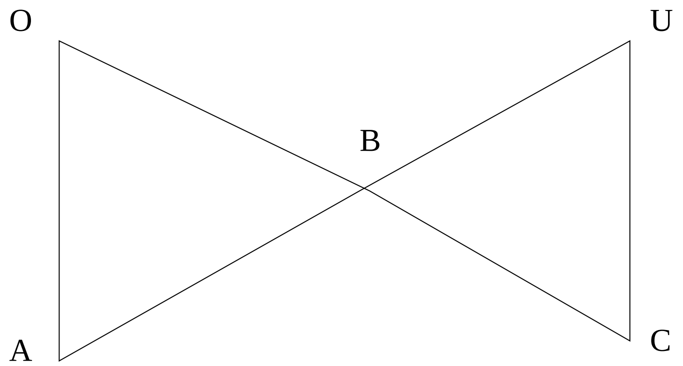


FIGURE 5.1 – **Marche aléatoire simple sur le graphe papillon**

une loi stationnaire unique $\boldsymbol{\pi}$. 3) Calculez l'espérance du coùt moyenne de cette marche, si $f(A) = 10, f(B) = 1$ et les autres coùts sont 0.

Remarque 5.5. *Dans le cas des espace d'états dénombrables, avec une seule classe récurrente B, on distingue deux cas :*

1. **ergodique positive***, quand la loi limite satisfait $\pi_i > 0, \forall i \in B$ et*
2. **ergodique nul***, quand elle satisfait $\pi_i = 0, \forall i \in B$ (ce dernier cas étant impossible pour des espace d'états finis).*

5.4 Le cas des plusieurs classes absorbantes

Nous examinons ici les chaînes absorbantes, i.e avec des classes récurrentes ayant toutes la cardinalité 1, avec matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{p}^{(1)} & \boldsymbol{p}^{(2)} & \dots \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & \dots \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & \ddots \\ \mathbf{0} & 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Théorème 5.4. *Soit $Y(t)$ une chaîne qui n'a que des états récurrents absorbants, et donc $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$, où $\boldsymbol{p}$ contient les probabilités de transition ("absorption immédiate") dans les états absorbants. Alors, la matrice asymptotique est*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{P}^{(abs)} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

où $\boldsymbol{P}^{(abs)}_{i,j}, i \in \mathcal{T}, j \in \mathcal{R}$ sont les probabilités d'absorption $p_i(\widehat{j}) = \mathbb{P}_i\{X_T = \widehat{j}\}$.

Dem. Comme $\lim Q^n = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{P}$ doit être de la forme

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{X} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

et $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}^{(abs)}$ est evident, en tenant compte du fait que les probabilités limite $\boldsymbol{P}(i,j), i \in \mathcal{T}, j \in \mathcal{R}$ coincident avec les probas d'absorbtion.

Pour une solution algébrique, en utilisant $P\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}$, on trouve la solution explicite

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}^{(abs)} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}^{(i)} = Q\boldsymbol{x}^{(i)} + \boldsymbol{x}^{(i)},$$

oú $\boldsymbol{x}^{(i)}$ sont les colonnes de la matrice $\boldsymbol{X}$. On reconnait alors que $\boldsymbol{x}^{(i)}$ satisfont le même système que les probabilités d'absorption dans la classe recurrente i.

Exercice 5.5. *Donnez des bases pour les espaces des vecteurs propres à droite et gauche de la valeur 1 dans le cas absorbant, qui satisfont la normalisation ususelle ($\boldsymbol{p}_i, i \in \mathcal{R}$ vecteurs des probas, et $\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{v}_j = \delta_{i,j}, i, j \in \mathcal{R}$).*

Solution : On trouve que le vecteur propre à gauche $\boldsymbol{p}_j$ pour chaque élément absorbant j est $\boldsymbol{p}_j = e_j = (0, 0, ..., 1, ..., 0)$. En suite, on trouve que le vecteur propre à droite $\boldsymbol{v}_j = (\boldsymbol{p}_{\widehat{j}}, 0, 0, ..., 1, ..., 0)$ où le vecteur $\boldsymbol{p}_{\widehat{j}}$ contiens les probabilités d'absorbtion dans la classe j.

Chapitre 6

Les lois de type phase(géométriques d'argument matriciel)

Motivation : Parfois, une chaîne/marche sur un espace d'états d́énombrable est forcée de rester dans un sous-ensemble de son espace d'états initial par des divers mécanismes de contrainte. Par exemple, une marche sur $\mathbb{Z}$ qui est contrainte à rester non-négative, donc en $\mathbb{N}$, pourrait être absorbée en 0 pour toujours, ou "réfléchie", i.e retournée en $\mathbb{N}$ dés qu'elle arrive dans le complément $\partial = \mathbb{Z} - \mathbb{N}$.

Le mécanisme de contrainte le plus simple est l'absorption. On appellera l'ensemble des états absorbants "cimetière" ∂ ; ceux-ci sont caractérisés par des probabilités de transition $P_{i,j} = \delta_{i,j}$, $\forall i \in \partial, \forall j$.

6.1 Les chaînes de Markov absorbantes

Définition 6.1. *Une chaîne s'appelle absorbante si tous ses états récurrents sont absorbants, c.-à-d. $P_{i,j} = \delta_{i,j}$ pour chaque état i récurrent.*

Définition 6.2. *Soit X_t une chaîne de Markov absorbante, soit ∂ l'ensemble des états absorbants, soit $\mathcal{T}$ le sous-ensemble (complémentaire) d'états transitoires, et soit $\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{p}_{(\mathcal{T},\partial)} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{array}\right)$ la matrice de transition.*

On appellera **temps de premier passage/sortie/absorption/vie** *N le nombre des fois tel que le processus X_t est en $\mathcal{T}$*

$$N = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{X_t \in \mathcal{T}\}}, N \in \{1, 2, ...\}$$

Une variable aléatoire N pour la quelle il existe une chaîne de Markov absorbante tel que N est son temps d'absorption est appellée loi de type phase, ou loi géométrique d'argument matriciel.

Remarque 6.1. *N est précisément le nombre des moments passés en $\mathcal{T}$ jusqu'à l'absorbtion, ou le nombre des transitions jusqu'à l'absorbtion, en incluant la dernière, ou "la longueur de la vie", ou le nombre de temps $t \in \{0, 1, 2, ...N - 1\}$ passés en $\mathcal{T}$.*

Soit X_f la derniŕe position en vie, et Y la position après la mort. Rémarquer que pour $t \in \{0, 1, 2, ...N-1\}$, $X_f = X(N-1), Y = X(N)$, et que pour $t \in \{1, 2, ...N\}$, $X_f = X(N), Y = X(N+1)$.

Exemple 6.1. *Soit une chaîne sur* $\{1,2\}$ *définie par la matrice de transition* $\begin{pmatrix} q & \vline & p=1-q \\ 0 & \vline & 1 \end{pmatrix}$ *avec* $X_0 = 1$ *(c.-à-d., la loi initiale est* $\boldsymbol{c}_0 = (1,0)$*). Soit* N *le nombre des moments passés en* 1 *jusqu'à l'absorbtion.*

a) Quel est l'espace d'états de N *? Quelle est la valeur de* N *si* $X_1 = 1 = ...X_k$ *et* $X_{k+1} = 2$ *?*

b) Trouvez $P[N = k]$ *et* $P[N \geq k]$*.*

c) Trouvez l'espérance $n = \mathrm{EN}$ *du nombre des pas* N *jusqu'à l'absorbtion, en partant du premier état (c.-à-d.* $X_0 = 1, \boldsymbol{\mu}_0 = (1,0)$*), en utilisant*

$$\mathrm{EN} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\mathrm{N} \geq \mathrm{k}\}.$$

Les lormules explicites pour la loi géométrique généralisent facilement aux lois de type phase. On trouve :

a) $\boldsymbol{P}[N = k] = Q^{k-1}\boldsymbol{p}$

b) $\mathbb{P}[N \geq k, X(k) = .] = Q^{k-1}, \boldsymbol{P}[N \geq k] = Q^{k-1}\mathbf{1}$

c) Les espérances $\boldsymbol{n} = (n_x, x \in \mathcal{T})$ du nombre des pas jusqu'à l'absorbtion à partir des états transitoires sont :

$$\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\, \mathbf{1}$$

La démonstration de la dernière formule à partir de la formule précédente est tr'es simple :

$$\boldsymbol{n} = \sum_{k=1} \boldsymbol{P}[N \geq k] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[N \geq k, X(k) = .]\mathbf{1} = \sum_{k=1} Q^{k-1}\mathbf{1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\, \mathbf{1}.$$

Comme il s'agît d'une formule importante, nous la redémontreront dans le chapitre suivant, en utilisant le **système d'absorbtion**

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{n} + \mathbf{1},$$

Les problèmes les plus basiques concernant les lois de sortie, appellées en analyse problèmes de Dirichlet, sont :

1. la loi des temps de sortie N
2. la loi du point de sortie $X_N \in \partial$ (premier problème de Dirichlet), et la loi de la position avant de sortir X_{N-1}
3. les espérances des temps de sortie $\boldsymbol{n} = (n_i = \mathrm{E_i N}, \mathrm{i} \in \mathcal{T})$ (deuxième problème de Dirichlet)
4. la loi "des moments heureux" = nombre des visites dans un sous-ensemble $\mathcal{H} \subset \mathcal{T}$,
5. des diverses autres esperances des prix finaux ou des couts accumulés par la marche jusqu'au moment de sa sortie.

Remarque 6.2. *On a vu pour les marches aléatoires que tous ces problèmes aboutissaient à des équations de différences. On verra maintenant que pour les chaînes de Markov, ces problèmes aboutissent à des équations impliquant la matrice* P*, la méthode pour établir les équations étant toujours le conditionnement sur le premier pas. Encore mieux, si on formulent les réponses en fonction de* $G = P - I$*, les mêmes équations resteront vraies pour les processus de Markov en temps continu et sur des espérance continues, pourvu qu'on remplace* G *par un opérateur approprié.*

6.2 Les espérances des lois de sortie à partir du système d'absorbtion

Théorème 6.1. *a) Les espérances* $\boldsymbol{n} = (n_x, x \in \mathcal{T})$ *du nombre des pas jusqu'à l'absorbtion à partir des états transitoires satisfont le* **système d'absorbtion**

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{n} + \mathbf{1} \tag{6.1}$$

b) Elles sont données explicitement par :

$$\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\,\mathbf{1} \tag{6.2}$$

c) Avec une loi initiale $\boldsymbol{\alpha}$*, l'espérance* $\bar{n} = \mathrm{E}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathrm{N}$ *du temps d'absorbtion est :*

$$\bar{n} = \mathrm{EN} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\mathbf{1}$$

Remarque 6.3. *Le système* (6.1) *donné au point a) est plus important que la formule explicite donnée en b) ; en effet, l'inversion des matrices n'est pas forcement la meilleure solution pour résoudre un système. Ce problème fournit encore une illustration du fait que conceptuellement et numériquement, les systèmes d'équations sont plus utiles que leurs solutions explicites !*

Pour le démontrer, nous pourrions differencier le résultat sur les fonctions génératrices . Mais, comme il existent beaucoup de variations de ce problème, nous allons privilegier ci-dessous la méthode basique du **conditionnement***.*

Demonstration par conditionnement sur le premier pas : a) est équivalent au système

$$n_i = \sum_{j \in \mathcal{T}} Q_{i,j}(n_j + 1) + \sum_{j \notin \mathcal{T}} q_{i,j}^{(\mathcal{T},\partial)} * 1,$$

obtenu par un conditionnement sur le premier pas. b) est simplement la solution du système donné en a).

Corollaire 6.1. *Soit* $\widetilde{\boldsymbol{G}} := \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{I}$.

a) Cette matrice $\widetilde{G}$ *a seulement des valeurs propres avec partie réelle negative, étant par conséquent inversible.*

b) Les espérances des temps d'absorbtion à partir des tous les états transitoires $\boldsymbol{n}$ *satisfont le satisfont le système*

$$\begin{aligned} &\widetilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{n} + \mathbf{1} = 0 \\ &n_i = 0, \quad \forall i \in \partial \end{aligned} \tag{6.3}$$

Remarque 6.4. *Nous avons une solution très simple de notre problème (deuxième problème de Dirichlet) en termes de l'operateur* $\widetilde{G}$*, juste comme le premier problème de Dirichlet (c.-à-d. le problème homogène concernant la position de sortie). Formulé comme ci-dessus, les deux sont valables aussi en temps continu (et en fait pour tous les processus de Markov).*

Exercice 6.1. La competition entre deux arrêts possibles*. Étant donné une chaîne finie avec deux états absorbants* $0, B$ *et le reste des états transitoires, obtenez un système et une formule explicite pour le vecteur* $\boldsymbol{a}_B = (a_i = P_i[X_N = B], i \in \mathcal{T})$.

Réponse:

$$\boldsymbol{a}_B = Q\boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{p}_B \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_B = (I - Q)^{-1}\boldsymbol{p}_B$$

où $\boldsymbol{p}_B$ est le vecteur des probabilités d'absorption directe en B (c.-à-d. après un pas).

6.3 La matrice génératrice associé à une chaîne de Markov

$G = P - I$ est appellée matrice génératrice (ou opérateur) associé à la chaîne de Markov.

Définition 6.3. *Une matrice G satisfaisant*

1. $g_{ij} \geq 0$ *si* $i \neq j$, $g_{ii} \leq 0$ *et*
2. $g_{i,i} + \sum_{j \neq i} g_{i,j} = 0$

sera appelée **matrice génératrice**. *Une matrice G satisfaisant 1. et $g_{i,i} + \sum_{j \neq i} g_{i,j} \leq 0$ sera appelée* **sous-génératrice**.

Remarque 6.5. *Il est facile de verifier que la matrice $G = P - I$ a les mêmes vecteurs propres comme P, et que ses valeurs propres sont translatées par -1. Par conséquent, oour une matrice (sous)stochastique arbitraire, la matrice $G = P - I$ est une matrice (sous) génératrice.*

Remarque 6.6. *Les équations de Dirichlet –voir par exemple* (6.3)*– concernant les chaînes de Markov en temps discret peuvent être formulées également en termes de P ou de $\widetilde{G}$ – voir Definition , mais l'avantage de la dernière formulation et qu'elle generalise pour le temps continu.*

6.4 La matrice fondamentale/ bilan de la vie

Remarque 6.7. *La* **matrice fondamentale** $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$ *intervenant dans la formule*

$$\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\, \mathbf{1} = \Big[\sum_{i=1}^{\infty} (\boldsymbol{Q})^i\Big] \mathbf{1}$$

a une interprétation probabiliste importante.

Lemme 6.1. *Les elements*

$$n_{i,j} := (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})_{i,j}$$

*fournissent l'espérance du nombre total $N_i(j)$ des visites en j avant le passage au dela les états transitoires, et la ligne i de $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$ nous fournit "***le bilan esperé de la vie***", avec état initial i donné.*

Démonstration: Remarquons d'abord **la décomposition en indicateurs**

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} I_k$$

où I_k est l'indicateur d'etre présent dans la partie transitoire au temps k. Donc, $n_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E_i I_k}$. Remarquons aussi la décomposition en indicateurs

$$I_k = \sum_{j \in \mathcal{T}} I_{k,j}, \quad I_{k,j} = \mathbb{1}_{\{X(k)=j\}}$$

où $I_{k,j}$ est l'indicateur d'etre en position $j \in \mathcal{T}$ au temps k. Ces décompositions nous fournissent encore une démonstration du Théorème 6.1

$$n_i = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathcal{T}} \mathrm{E_i I_{k,j}} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \sum_{\mathrm{j} \in \mathcal{T}} (\boldsymbol{Q})^{\mathrm{k}}_{\mathrm{i,j}}$$

Changeant l'ordre de sommation nous ramène à

$$n_i = \sum_{j \in \mathcal{T}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\boldsymbol{Q})_{i,j}^k \right) = \sum_{j \in \mathcal{T}} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})_{i,j} := \sum_{j \in \mathcal{T}} n_{i,j}$$

où

$$n_{i,j} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})_{i,j}$$

est le temps total espéré passé en j avant le passage dehors les états transitoires.

6.5 Exemples des lois de type phase

Exercice 6.2. Réseau parallèle. *Soit la matrice de transition* $\left(\begin{array}{cc|c} q_1 & 0 & p_1 \\ 0 & q_2 & p_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ *et la loi initiale* $(\beta_1, \beta_2, 0)$. *Trouvez l'espérance et la loi de* N, *et le bilan de la vie.*

Exercice 6.3. Réseau série. *Soit la matrice de transition* $\left(\begin{array}{cc|c} q_1 & p_1 & 0 \\ 0 & q_2 & p_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ *a) Trouvez l'espérance de* N, *et le bilan de la vie. b) Calculez la fonction génératrice des probabilités de* N, *et généralisez au cas des matrices de type série de taille* K. *c) Soit* $N = N_1 + N_2$, *où* N_i *est le nombre de fois qu'on reste en i. Montrez que si* $p_1 = p_2 = q$, *alors la loi de* N_1 *conditionné par* N *est uniforme.*

Remarque 6.8. *Avec* $p_1 = p_2 = q$, *on peut aussi résoudre l'exercice en remarquant que* N_i *sont des variables géométriques, et donc* N *est hypergéométrique (une somme des géométriques).*

Exercice 6.4. Une loi de sortie qui n'est ni serie, ni parallèle. *Soit* X_t *une chaîne absorbante sur* $\{1, 2, a\}$ *avec matrice de transition* $\left(\begin{array}{cc|c} q_1 & q & p_1 \\ 0 & q_2 & p_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} Q & p_1 \\ & p_2 \\ \hline 0\ 0 & 1 \end{array}\right)$ *où* $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$, *et avec loi initiale* $(1, 0, 0)$. *Soit* N *le nombre des pas jusqu'à l'absorption en a (transitions, en incluant la dernière).*

1. *Donnez la formule des probabilités*

$$P_{i,j}^{(k)} = P[N \geq k, X_k = j | X_0 = i], i, j \in \{1, 2\}, k \in \{1, 2, ...\}$$

   Quelles sont les probabilités $P[N \geq 3, X_2 = j | X_0 = i], i, j \in \{1, 2\}$ *?*
2. *Calculez la matrice génératrice* $\sum_{k=0} \mathbb{P}[N > k] x^k = \sum_{k=0} x^k Q^k = (I - xQ)^{-1}$.
3. *Calculez la matrice fondamentale* $(I - Q)^{-1}$.
4. *Trouvez l'espérance du nombre des pas* N *jusq'à l'absorption.*
5. *Calculez* Q^k, *en utilisant le développement limité (en série de puissances) de la matrice génératrice* $(I - xQ)^{-1}$.
6. *Trouvez les probabilités* $P[N \geq k | X_0 = 1]$. *Vérifier que la somme* $E_1 N = \sum_{k=1}^{\infty} P[N \geq k | X_0 = 1]$ *vérifie la réponse à 4.*

Réponse:

1. Il est clair que $P_{i,j}^{(k)} = Q^{k-1}(i, j), i, j = 1, 2$ $\mathbb{P}[N \geq 3] = Q^2$.

2. La matrice génératrice est

$$(I - xQ)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-xq_1} & \frac{xq}{(1-xq_1)(1-xq_2)} \\ 0 & \frac{1}{1-xq_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-xq_1} & \frac{q}{q_1-q_2}\left(\frac{1}{1-xq_1} - \frac{1}{1-xq_2}\right) \\ 0 & \frac{1}{1-xq_2} \end{pmatrix}$$

3. En posant $x = 1$, on trouve la matrice fondamentale :

$$M = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-q_1} & \frac{q}{(1-q_1)(1-q_2)} \\ 0 & \frac{1}{1-q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-q_1} & \frac{q}{q+p_1}\left(\frac{1}{1-q_2}\right) \\ 0 & \frac{1}{1-q_2} \end{pmatrix}$$

   L'interpretation de $M_{1,2}$ est evidente.

4. On trouve $Q^k(1,1) = q_1^k, Q^k(2,2) = q_2^k$, et $Q^k(1,2) = q\frac{q_1^k - q_2^k}{q_1 - q_2} = q\left(\sum_{i=0}^{k-1} q_1^i q_2^{k-1-i}\right)$. Pour interpreter probabilistiquement la formule de $Q^k(1,2)$, remarquons qu'il s'agit de la convolution des nombres des boucles en 1 et en 2, c.-à-d. d'une somme sur tous les longueurs possibles du sejour en 1.

5. $$n_1 = E_1 N = \frac{1}{1-q_1} + \frac{q}{(1-q_1)(1-q_2)}, \quad n_2 = E_2 N = \frac{1}{1-q_2}.$$

6. $P[N > k | X_0 = 1] = Q^k(1,1) + Q^k(1,2) = q_1^k + q\left(\sum_{i=0}^{k-1} q_1^i q_2^{k-1-i}\right)$ (il s'agit d'un melange d'une loi géométrique avec une convolution des deux lois géométriques). La somme $E_1 N = \sum_{k=0}^{\infty} P[N > k | X_0 = 1]$ vérifie la réponse 5, car $q\sum_{k=1}^{\infty} q_2^{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1}(q_1/q_2)^i\right) = q\sum_{k=1}^{\infty} q_2^{k-1}\frac{(q_1/q_2)^k - 1}{(q_1/q_2) - 1} = q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(q_1)^k - q_2^k}{q_1 - q_2} = \frac{q}{q_1-q_2}\left(\frac{1}{1-q_1} - \frac{1}{1-q_2}\right) = \frac{q}{(1-q_1)(1-q_2)}$

Exercice 6.5. *On effectue des tirages successifs d'une pièce de monnaie et on cherche à calculer le temps d'attente N jusqu'à observation du premier **PP** ainsi que sa loi. Repeter les questions 2-4 de l'exercice précédent.*

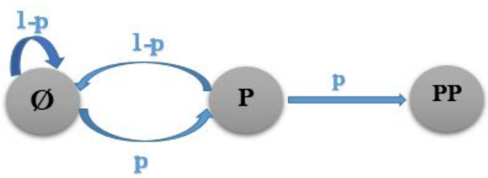


FIGURE 6.1 – Graphe de communication

Réponse: *La matrice de transition est $Q = \begin{pmatrix} q & p \\ q & 0 \end{pmatrix}$, la matrice fondamentale est $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2} & \frac{1}{p} \\ \frac{q}{p^2} & \frac{1}{p} \end{pmatrix}$ la matrice generatrice est $(I - zQ)^{-1} = \frac{1}{1-zq-pqz^2}\begin{pmatrix} 1 & -zp \\ -zq & 1-zq \end{pmatrix}$, et $\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \\ \frac{q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2} \end{pmatrix}$.*

Remarque 6.9. *Cette fois la structure du temps τ est plus compliquée. En conditionnant sur **les premiers deux pas**, on trouve :*

$$\tau_{PP} = 2\ \mathbb{1}_{\{X_1=P,\ X_2=P\}} + \mathbb{1}_{\{X_1=F\}}(1 + \tau_{PP}^{(1)}) + \mathbb{1}_{\{X_1=P,\ X_1=F\}}(2 + \tau_{PP}^{(2)})$$

Où : $\tau_{PP}^{(1)}$ est indépendant de X_1 et de même loi que τ_{PP} et $\tau_{PP}^{(2)}$ est indépendant de (X_1, X_2) et de même loi que τ_{PP}. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(z^{\tau_{PP}}) &= p^2z^2 + \mathbb{E}(z^{(1+\tau_{PP})})\ (1-p) + \mathbb{E}(z^{(2+\tau_{PP})})\ p(1-p) \\ &= \frac{p^2z^2}{1-(1-p)z-p(1-p)z^2}\end{aligned}$$

Et la moyenne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tau_{PP}) &= 2p^2 + (1-p)(1+\mathbb{E}(\tau_{PP})) + p(1-p)(2+\mathbb{E}(\tau_{PP})) \\ &= \frac{1+p}{1-(1-p^2)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}.\end{aligned}$$

Exercice 6.6. *On effectue des tirages successifs d'une pièce de monnaie et on cherche à calculer le temps d'attente $T = \min[N(FF), N(PP)]$, où N(M) est le nombre des transitions jusqu'à la première observation du motif M. Donner Q, calculez la matrice fondamentale $(I-Q)^{-1}$, et trouvez l'espérance du N.*

Réponse: Pour l'ordre $FF, F, 0, P, PP$, la matrice de transition est $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ q & 0 & p \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice fondamentale est $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-pq} & 0 & \frac{p}{1-pq} \\ \frac{(p+1)q}{1-pq} & 1 & \frac{p(q+1)}{1-pq} \\ \frac{q}{1-pq} & 0 & \frac{1}{1-pq} \end{pmatrix}$, et $\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} \frac{1+p}{1-pq} \\ \frac{2}{1-pq} \\ \frac{1+q}{1-pq} \end{pmatrix}$

Exercice 6.7. *On effectue des tirages successifs d'une pièce de monnaie et on cherche à calculer le temps d'attente $T = \min[N(PF), N(PP)]$, où N(M) est le nombre des transitions jusqu'à la première observation du motif M. a) Donner Q, calculez la matrice fondamentale $(I-Q)^{-1}$, et trouvez l'espérance du N. b) Calculer $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i \le 3} = \boldsymbol{P}[N(PF) < N(PP)]$.*

6.6 Formules explicites pour les lois jointes de type phase

Le prochain résultat fournit quelques lois jointes ou "multivariée" du temps de premier passage N et du point final après la sortie $X(N)$, avant la sortie $X(N-1)$, conditionnée par tous les point de départ possibles, ainsi que les lois marginales de N et de $X(N)$ et leurs espérances .

Théorème 6.2. La loi multivariée du temps de sortie, et de la position après la sortie. *Soit $X(k)$ une chaîne de Markov absorbante à matrice de transition*

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{p}_{(\mathcal{T},\partial)} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{array}\right)$$

et soit

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{P}}(k) &= \mathbb{P}\{N > k, X(k) = .\} = (\overline{\boldsymbol{P}}_{x,z}(k) = \mathbb{P}_x\{X(k) = z\}, x \in \mathcal{T}, z \in \mathcal{T}), \qquad (6.4) \\ \boldsymbol{F}(k) &= \boldsymbol{F}_{N,X(N)}(k) = \mathbb{P}\{N = k, X(N) = .\} = (\boldsymbol{F}_{x,y}(k) = \mathbb{P}_x\{N = k, X(k) = y\}, x \in \mathcal{T}, y \in \partial).\end{aligned}$$

les matrices de dimensions $|\mathcal{T}| \times |\partial|$ et $|\mathcal{T}| \times |\mathcal{T}|$, respectivement, ayant comme éléments les probabilités de survie et d'absorption en k pas, conditionnés par un départ en x et joints avec point final en y.

a) Les probabilités multivariées (6.4) *sont données par :*

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{P}}(k) &= \boldsymbol{Q}^k \quad \Longleftrightarrow \widehat{\overline{P}}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k \overline{\boldsymbol{P}}(k) = (\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{Q})^{-1} \\
\boldsymbol{F}(k) &= \boldsymbol{Q}^{k-1}\boldsymbol{p}_{(\mathcal{T},\partial)} \quad \Longleftrightarrow \widehat{F}(z) := \sum_{k=1}^{\infty} z^k \boldsymbol{F}(k) = z(\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{p}_{(\mathcal{T},\partial)}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

b) La loi marginale du temps de sortie/durée de vie est :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N > k] &= \mathbb{P}\{N \geq k+1\} = \boldsymbol{Q}^k \mathbf{1}_{\mathcal{T}} \\
\mathbb{P}[N = k] &= \boldsymbol{F}(k)\mathbf{1}_{\partial} = \boldsymbol{Q}^{k-1}\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{p} := \boldsymbol{p}_{(\mathcal{T},\partial)}\mathbf{1}_{\partial} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\mathbf{1}_{\mathcal{T}}
\end{aligned}$$

c) Avec une loi initiale $\boldsymbol{\alpha}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{N > k\} &= \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{Q}^k \mathbf{1}_{\mathcal{T}} \\
\mathbb{P}\{N = k\} &= \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{Q}^{k-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\mathbf{1}_{\mathcal{T}} \\
\phi_N(z) &= \mathrm{E}\mathrm{z}^{\mathrm{N}} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \mathrm{z}^{\mathrm{k}}\mathbb{P}\{\mathrm{N} = \mathrm{k}\} = \mathrm{z}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{I} - \mathrm{z}\boldsymbol{Q})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\mathbf{1}_{\mathcal{T}}
\end{aligned}$$

d) La loi marginale de la position après la sortie est :

$$\mathbb{P}[X(N) = y] = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{p}_y, \forall y \in \partial$$

e) (*) La loi marginale de la position avant la sortie est

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}(x,z) = \boldsymbol{F}_{X(N-1)}(x,z) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}(x,z) \;\; (\boldsymbol{p}_{(\mathcal{T},\partial)}\mathbf{1}_{\partial})(z), \quad x \in \mathcal{T}, z \in \mathcal{T}$$

Remarque 6.10. *Plusieures de ces formules font intervenir la "matrice fondamentale"* $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$.

Démonstration: : a) Les matrices $\boldsymbol{p}(k), \boldsymbol{P}(k)$ satisfont les récurrences :

$$\boldsymbol{p}(k) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}(k-1), \boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{p}, \quad \text{et } \boldsymbol{P}(k) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(k-1), \boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$$

qui ramènent (en itérant) au résultat.

Alternativement, $I_{N=k} = \sum_{x_0,x_1,\ldots,x_{k-1} \in \mathcal{T}, y \in \partial} I_{X_0=x_0,X_1=x_1,\ldots,X_{k-1}=x_{k-1},X_k=y \in \partial \in \mathcal{T}}$. Dès lors,

$$\mathbb{P}_{x_0}\{N = k, X_k = y\} = \sum_{x_1,\ldots,x_{j-1} \in \mathcal{T}} \boldsymbol{Q}_{x_0,x_1}\boldsymbol{Q}_{x_1,x_2}\ldots\boldsymbol{Q}_{x_{k-2},x_{k-1}}\boldsymbol{p}^{(\mathcal{T},\partial)}_{x_{k-1},y} = \boldsymbol{Q}^{k-1}\boldsymbol{p}^{(\mathcal{T},\partial)}(x_0, y)$$

b,c,d,e) Ces résultats sont obtenus en prenant somme des lois multivariées en y, en k ou en x, dans le dernier cas pondéré par les poids $\boldsymbol{\alpha}$ ■

Définition 6.4. *Une variable $Z \in \mathbb{N}$ ayant une loi représentable comme*

$$\mathbb{P}\{Z = k\} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{Q}^{k-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\mathbf{1}, k \geq 1$$

où $\boldsymbol{Q}$ est une matrice sous-stochastique, et $\boldsymbol{\alpha}$ est un vecteur ligne des probabilités, sera appelée de type phase/géométrique à argument matriciel.

Remarque 6.11. *Le probléme de l'existence d'une represetation de type phase (aux prix possible d'une augmentation de la dimension) est appellée le "positive realization problem".*

6.7 (*) La loi des moments heureux (chaînes censurées)

Soit X_t une chaîne de Markov absorbante, soit B, A une décomposition de l'ensemble des états transitoires $\mathcal{T}$, et soit ∂ l'ensemble des états absorbants. On supposera qu'il y a un seul état absorbant (en «collant ensemble» tous les états absorbants si nécéssaire).

Définition 6.5. *Le nombre des moments heureux est le nombre*

$$N_B = \#(\{k \geq 0, X_k \in B\})$$

des visites en B sans compter le point de départ et avant l'absorbtion en ∂ (par conséquent $N_B \geq 0$).

Exercice 6.8. *Considérer la chaîne associé au graphe papillon sur $(O = 1, A = 2, B = 3, C = 4, U = 5)$ –voir figure 6.8 :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 1-b & 0 & b & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & x_4 & 1-x_1-x_2-x_4 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $a = b = c = 1/2, x_1 = x_2 = x_4 = 1/4$ si $B = \{1\}$? Si $B = \{3\}$?

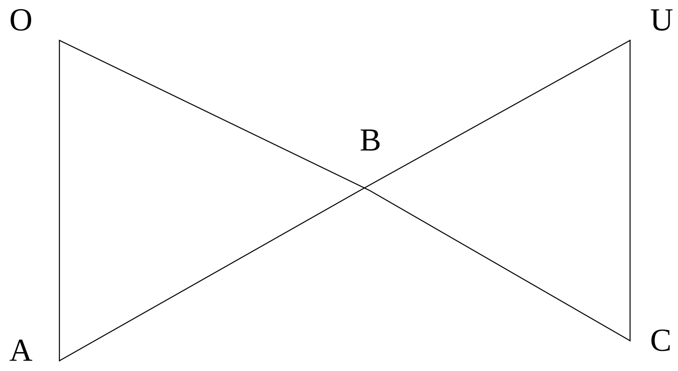


FIGURE 6.2 – **Marche aléatoire simple sur le graphe papillon**

1. *Montrer que pour $B = \{x\}$ on a $\{\mathcal{L}(N_{\{x\}})|X(0) = x\} = Geo(\lambda_x)$ et spécifier le paramètre λ_x. Utiliser la notation*
$$P = \left(\begin{array}{cc|c} Q_A & Q_{A,x} & \boldsymbol{p}_A \\ Q_{x,A} & Q_x & q_x \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
pour la matrice de transition avec les états rangés dans l'ordre A, x, ∂.
Quel est le résultat pour $x = 1$ et $x = 3$?

Réponse:

1. Il est clair que $N_{\{x\}}$ a une loi géométrique $\mathbb{P}[N_{\{x\}} = k] = p_x(k, \{x\}) = \lambda^k(1-\lambda), k \geq 0$, de paramètre $\lambda = \lambda_x = \mathbb{P}_x[X_t \text{ revisitera } x]$ (car on a la récurrence : $p_x(k, \{x\}) = \lambda p_x(k-1, \{x\}),\ k \geq 1$).

Finalement, λ est la somme de la probabilité d'une boucle avec celle d'une réincarnation :

$$\lambda = Q_x + \sum_{y \in A} P(x,y) P_y[T_x < T_\partial] = Q_x + Q_{x,A}(I - Q_A)^{-1} Q_{A,x},$$

où on a utilisé la loi des probabilités d'absorbtion en x.

Pour le papillon avec $B = \{1\}$, $\lambda_B = 3/8$, et pour $B = \{3\}$, $\lambda_B = x_1 + x_2 + cx_4 = 5/8$.

Théorème 6.3. *Soit*

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} Q_A & Q_{A,B} & \boldsymbol{p}_A \\ Q_{B,A} & Q_B & \boldsymbol{p}_B \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

la partition de la matrice de transition d'une chaine avec un état absorbant.

Pour B quelconque et $x \in \mathcal{T}$, soit $p_x(k,B) := \mathbb{P}_x[N_B = k], k \geq 0$, et soit

$$\boldsymbol{p}(k) = \boldsymbol{p}(k,B) = (p_x(k,B), x \in \mathcal{T}) = (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k),$$

où $\boldsymbol{a}_k = (p_x(k,B), x \in B), \boldsymbol{a}_k = (p_x(k,B), x \in A)$.

Alors, les probabilités de k visites en B à partir de B satisfont une récurrence vectorielle

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_k = M\boldsymbol{b}_{k-1} = M^k \boldsymbol{a}_0, & k \geq 1 \\ \boldsymbol{a}_0 = (I_B - M)\mathbf{1}, & k = 0 \end{cases}$$

où

$$M = Q_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1} Q_{A,B}.$$

Les probabilités de k visites en B à partir de A sont :

Remarque 6.12. *La matrice M est la matrice de transition de la ≪chaîne induite≫ (transitoire) sur B, appellée aussi ≪complément de Shur≫ de A.*

Exercice 6.9. *Redéduire le résultat pour le papillon avec $B = \{1\}$, à partir de la formule du théorème précédent.*

Dem : En conditionnant sur le premier pas, on trouve

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{p}_A + Q_A \boldsymbol{a}_0 \Longrightarrow \boldsymbol{a}_0 = (I - Q_A)^{-1} \boldsymbol{p}_A, \\ \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{p}_B + Q_{B,A} \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{p}_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1} \boldsymbol{p}_A \end{cases}$$

et pour $k \geq 1$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_k = Q_{A,B} \boldsymbol{a}_{k-1} + Q_A \boldsymbol{a}_k \Longrightarrow \boldsymbol{a}_k = (I - Q_A)^{-1} Q_{A,B} \boldsymbol{a}_{k-1} \\ \boldsymbol{a}_k = Q_B \boldsymbol{a}_{k-1} + Q_{B,A} \boldsymbol{a}_k = (Q_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1} Q_{A,B}) \boldsymbol{a}_{k-1} \end{cases}$$

Finalement

$$\boldsymbol{a}_0 = (I_B - Q_B)\mathbf{1}_B - Q_{B,A}\mathbf{1}_A + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1}([I_A - Q_A]\mathbf{1}_A - Q_{A,B}\mathbf{1}_B) = (I_B - M)\mathbf{1}_B$$

Pour les probabilités de k visites en B à partir de A on trouve :

$$\boldsymbol{a}_k = (I - Q_A)^{-1} Q_{A,B} M^{k-1} (I_B - M)\mathbf{1}_B$$

Il s'agit d'une loi matrice géométrique avec le même M, mais seulement à partir de $k \geq 2$.

Exercice 6.10. *1. Vérifiez le théorème ci-dessus dans le cas $B = \mathcal{T}$.*

2. *Calculer le complément de Schur $M = Q_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1}Q_{A,B}$ et les lois du bonheur pour le papillon, avec $B = \{1 = A, 2 = B, 3 = C\}$. Vérifiez pour cet exemple que la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(i, B) = 1, \forall i \in \{1, 2, 3\}$.*

3. *Écrivez un program dans votre language de choix qui calcule $\boldsymbol{p}(k, B)$ et une approximation $\boldsymbol{p}(k, B) \approx c\lambda^k$ pour une chaîne et ensemble B arbitraires et démontrez sa performance sur les exemples precedentes et d'autres, de votre choix.*

Réponse: 1. Quand $B = A$, on retrouve la loi de la durée de vie $\boldsymbol{a}_k = Q_B^{k-1}\boldsymbol{p}_B$.

2. Quand le point de départ $x' \neq x$, on trouve que $\{\mathcal{L}(N_{\{x\}})|X(0) = x' \neq x\}$ est une loi géométrique avec le même λ_x, mais seulement à partir de $k \geq 2$.

Pour $k \geq 2$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_k &= \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ x_2 & 0 & x_4 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{a}_k + \begin{pmatrix} 1-b \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{a}_{k-1} \\
\iff \boldsymbol{a}_k &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1-b \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{a}_{k-1} \\
\iff \boldsymbol{a}_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix} \boldsymbol{a}_{k-1}
\end{aligned}$$

Remarque 6.13. *Les lois de type phase demandent le calcul des puissances/exponentielles de matrices. Ces expressions sont très vite obtenues par logiciels comme Matlab, etc ; comme pour la plupart des matrices, les valeurs propres ne sont pas accessible analytiquement, leur calcul demande en effet une évaluation numérique.*

6.8 Exercices de révision

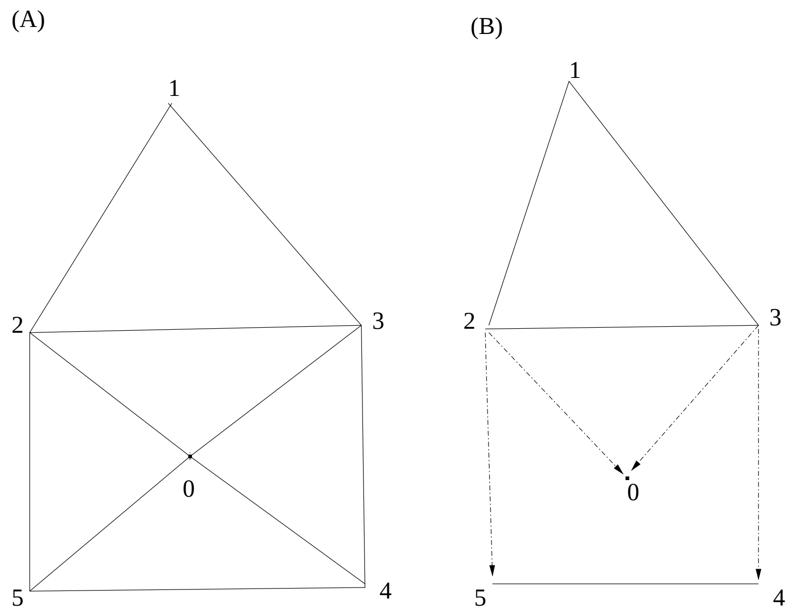
1. L'espace des états d'une chaine est $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Dessinez le graphe de communication et identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrents et transientes. Y' a-t-il des classes périodiques ?

   (b) Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.

   (c) Trouvez la **limite quand** $n \to \inf$ **de la matrice de transition après** n **étapes** P^n



2. Considérez une particule effectuant une **marche aléatoire simple** $X_t,\ t = 0, 1, 2, ...$ sur le graphe (A) ci-dessous : i.e. à chaque moment $t = 1, 2, ...$, la particule se déplace vers l'un de ses voisins sur le graphe à sa position actuelle, avec la même probabilité pour chaque choix.

   (a) Calculer :

   i. Les probabilités stationnaires de chaque noeud.

   ii. L'éspérance en sortant de 1 du nombre de pas T_0 jusq'au noeud 0. *Indication :* Utiliser la symmetrie.

   iii. L'éspérance en sortant de 0 du nombre de pas $\widetilde{T}_0$ jusq'au premier retour en 0.

   (b) i. La probabilité $x_2 = \mathbb{P}_2\{X_T = 1\}$, où $T = \min[T_1, T_0]$.

   ii. Les probabilités p_k en partant de 2 que la marche visite 1 exactement k fois $(k = 0, 1, 2, ...)$ avant le premier retour en 0.

   iii. Les probabilités p_k en partant de 5 que la marche visite 1 exactement k fois $(k = 0, 1, 2, ...)$ avant le premier retour en 0. Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.

   iv. Les probabilités p_k en partant de 1 que la marche visite 0 exactement k fois $(k = 0, 1, 2, ...)$ avant le premier retour en 1.

   (c) À un moment donné, le passage sur certaines arrêtes du graphe devient impossible, ou possible seulement dans une direction, comme indiqué par des flèches dans le graphe (B). La particule continue de choisir des destinations suivant le graphe initial (A) comme dans la question précédente, mais les choix qui ne sont plus disponibles résultent cette fois dans un pas annulé, donc sur place.

   i. Donnez la matrice de transition de la marche.

   ii. Identifiez les classes de la chaîne, et classifiez les en récurrentes et transitoires.

   iii. Trouvez la distribution stationnaire de chaque classe récurrente.

iv. Est-ce que la limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition après n étapes P^n existe ?

v. Le cas écheant, trouvez-la.

3. **La marche paresseuse arrêtée :** Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = 1]$ =p, $P[Z_n = -1]$ =q et $P[Z_n = 0]$ =1- p-q, avec $0 < p + q < 1$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par $\mathrm{E_x}$ l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés.

   (a) Classifiez les pbs suivantes $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\}$, $f_x = E_x[X_T]$, $g_x = E_x[X_T^2]$, $t_x = \mathrm{E_x T}$, $c_x = E_x[\sum_0^{T-1} X_t]$, et $d_x = E_x[\sum_0^{T-1} X_t^2]$ comme des pbs de prix final ou de coût accumulé. Quelles sont les équations de récurrence et les conditions frontière corespondant a chaque pb ?

   (b) (*) Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $w_x = \mathrm{E_x a^T}$.

   (c) Rappeler les etapes principales de la resolution des équations de récurrence avec coefficients constants qui en résultent pour a) p_x, b) f_x, c) t_x, et d) c_x, dans les deux cas possibles $p < q$ et $p = q < 1/2$. Donner les réponses finales dans le cas $p = q < 1/2$.

4. Calculer les **probabilités de ruine** $p_x, x \in \mathbb{N}$, pour une marche sur les nombres naturels, avec la distribution de chaque pas donnée par : a) $\left\{p_1 = \frac{6}{7}, p_{-1} = 0, p_{-2} = \frac{1}{7}\right\}$. b) $\left\{p_{-2} = \frac{2}{5}, p_{-1} = \frac{1}{5}, p_1 = \frac{2}{5}\right\}$ c) $\left\{p_{-1} = \frac{8}{10}, p_1 = \frac{1}{10}, p_2 = \frac{1}{10}\right\}$. Vérifier la positivité du résultat.

5. **Une chaîne de Markov** sur $E = \{1, 2, ..., 2n - 1\}$. Une particule se deplace a chaque moment $1, 2, \ldots$; si la particule est en $i < n$, alors elle se déplace en $j = i + 1$, et si la particule est en $i > n$, alors elle se déplace en $j = i - 1$. Si la particule est en $i = n$, alors elle se déplace en une position j choisie avec probabilités egales parmi les elements de E différentes de n. La position X_k au temps k constitue .

   (a) Donner le graphe de communication et la matrice de transition.

   (b) Déterminer la loi invariante de la chaîne.

   (c) Calculer la position moyenne de la particule en regime stationnaire.

   (d) Donner l'espérance du temps de retour en n d'une particule qui part de n.

   (e) (*)Rajouter maintenant deux états absorbants 0 et $2n$, et supposer que si la particule est en $i = n$, alors elle se déplace en 0 avec probabilité a, en $2n$ avec probabilité b, et avec probabilité $1 - a - b \geq 0$ à une position j choisie avec probabilités egales parmi les autres elements de E, différents de n.

      i. Déterminer les lois invariantes de la chaîne.

      ii. Calculer les probabilités de ruine $\Psi(k) = P_k[T(0) < T(2n)]$.

      iii. Calculer l'espérance du temps $T = \min[T(0), T(2n)]$.

6. Soit X_t une chaîne de Markov représentant le **nombre de clients en attente** dans un arrêt de bus, dans le quel à chaque instant $t = 1, 2, ..$ (en temps discret !) une seule personne arrive (ou pas) avec probabilité $p < 1$, et en suite le bus arrive (ou pas) avec probabilité $q < 1$, et prend tous les voyageurs (le dernier arrivé inclu).

   a) Dessinez le graph de transitions de ce processus, en indiquant les probabilités λ et μ pour que le nombre de voyageurs augmente et diminue respectivement, ainsi que la probabilité z pour que ce nombre reste inchangé. Donnez la matrice des probabilités de transition pour la chaîne X_t.

   b) Calculez la distribution stationnaire de X_t.

   c) Calculez, en utilisant un système de conditionnement, l'éspérance en sortant de 0 du nombre des pas $\widetilde{T}_0$ jusqu'au premier retour en 0.

   d) Reprenez les question précédentes pour une file d'attente M(λ)/M(μ)/1, dans la quelle le serveur **sert chaque fois simultanément tous les clients** qu'il trouve en attente dans le tampon (arrivés dans la file après le début de son dernier service). Plus précisément, donnez la matrice génératrice pour le processus X_t. Indiquer les valeurs des probabilités $\widetilde{\lambda}$ et $\widetilde{\mu}$ pour que le nombre de clients augmente/diminue, au moment du premier saut à partir d'un état $n \geq 0$. Reprenez ensuite les questions b), c).

7. **Marche reversible ?**

   (a) Considerez une chaîne de Markov sur $\{1, 2, 3\}$ avec matrice des transitions

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 5/6 \\ 6/7 & 0 & 1/7 \\ 30/31 & 1/31 & 0 \end{pmatrix}$$

   Combien d'**équations d'équilibre detaillé**

$$\pi_i P(i, j) = \pi_j P(j, i), \quad \text{avec } i \neq j$$

   y a t'il ? Est-ce qu'ils admettent des solutions strictement positives ? Le cas échéant, trouvez la distribution stationnaire.

   (*) Est-ce que les équations d'équilibre detaillé continuerons à admettre des solutions (strictement positives), si on modifie une des lignes de la matrice des transitions, en laissant les deux autres inchangées ?

8. **La marche paresseuse réfléchie :** Soit X_n une chaîne de Markov sur $\{0, 1, 2, ..., B\}, B \in \mathbb{N}$, avec :

$$P(i, i+1) = p, \quad \forall i \in \{0, 1, 2, ..., B-1\}$$
$$P(i, i-1) = q, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., B-1, B\}$$
$$P(i, i) = 1 - p - q, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., B-1\}$$
$$P(0, 0) = q, P(B, B) = p, \text{ et } P(i, j) = 0 \text{ outrement}$$

   (on suppose $0 < p, q$ et $p + q < 1$).

   (a) Combien d'équations d'équilibre detaillé y a t'il ? Est-ce qu'ils admettent des solutions strictement positives ? le cas échéant, trouvez la distribution stationnaire.

(b) Calculer l'éspérance en sortant de 1 du nombre de pas T_0 jusq'au noeud 0.

(c) Calculer l'éspérance en sortant de 0 du nombre de pas $\widetilde{T}_0$ jusq'au premier retour en 0.

(d) (*) Est-ce que les équations déquilibre detaillé continuerons à admettre des solutions (strictement positives), si on modifie les valeurs p, q à $p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i < 1, \forall i \in \{0, 1, 2, ..., B\}$ (en gardant exactement le même graphe des transitions avec probabilités non nulles) ?

9. Un spéolog est obligé a faire une **marche aléatoire** entre les sommets d'un triangle $\{1, 2, 3\}$, avec toutes les chemins ayant des chances égales d' être prises. Il y a deux chemins entre $1, 2$, deux chemins entre $1, 3$, et 1 chemin entre $2, 3$. Il y a aussi deux chemins boucles (partant et finissant) en 2, deux chemins boucles en 3, et six chemins boucles en 1.

   Calculer

   (a) La matrice de transition P de la marche et ses valeurs propres

   (b) les probabilités stationnaires de chaque noeud

   (c) La matrice symmétrique $\pi(i)P(i, j)$.

   (d) La matrice de transition P^n

   (e) La fonction génératrice $(I - xP)^{-1}$ et

   (f) l'espérance en sortant de 3 du nombre de pas $\widetilde{N_3}$ jusqu'au premier retour à 3.

10. a) Une mouche effectue une marche cyclique sur les sommets $\{1, 2, 3\}$ d'un triangle, avec matrice de transition "circulante"

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

   où $a, b, c \geq 0$ et $a + b + c = 1$. Il est facile de verifier que la matrice de transition P^n est aussi "circulante" (i.e. chaque ligne est déduite de la ligne précédente par une permutation cyclique de ses éléments vers la droite) et on dénote par (a_n, b_n, c_n) les éléments de sa première ligne.

   (a) Quelles sont les valeurs limites de (a_n, b_n, c_n) quand $n \to \infty$?

   (b) On cherche une formule explicite, aussi simple que possible, pour la probabilité $a_n = P^n(1, 1)$ qu'après n étapes, la mouche soit retournée au sommet 1 d'où elle est partie. Soit $v_n = (b_n, c_n)$. Trouvez une récurrence pour le vecteur v_n.

   (c) Résolvez cette récurrence et trouvez a_n, au cas $a = b = c = 1/3$ et au cas $b = c = 1/2$.

   (d) Résolvez la récurrence, au cas où la mouche a deux fois plus de chances de sauter dans le sens des aiguilles d'une montre, i.e. $b = 2/3, c = 1/3$.

   (e) Généraliser au cas d'une marche cyclique sur les sommets d'un polygone avec k sommets (utilisant eventuellement votre language formel de choix, comme xmaxima,...).
   Ind : Cela nous ramène à ètudier, eventuellement l̀'aide de Sage, les puissances des matrices circulantes stochastiques :
   A :=matrix([1-b-c,b,c],[c,1-c-b,b],[b,c,1-c-b]) ;

11. Soit X_t une chaîne de Markov absorbante, soit ∂ l'ensemble de ses états absorbantes, soit B, A une decomposition de l'ensemble des états transitoires, et soit

$$\boldsymbol{p}(k,B) = (p_x(k,B), x \notin \partial)$$

où

$$p_x(k,B) := \mathbb{P}_x\{\text{exactement } k \text{ visites en } B \text{ avant l'absorbtion en } \partial\}, x \notin \partial$$

   (a) Quel type de distribution on trouve pour $p_x(k,B)$, quand $B = \{x\}$? (Specifiez les paramètres). Quel est le résultat pour la chaîne associé à : $\begin{pmatrix} 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 1-b & 0 & b & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & x_4 & 1-x_1-x_2-x_4 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $B = \{3\}$, et en particulier pour $a = b = c = 1/2, x_1 = x_2 = x_4 = 1/4$ ("le papillon").

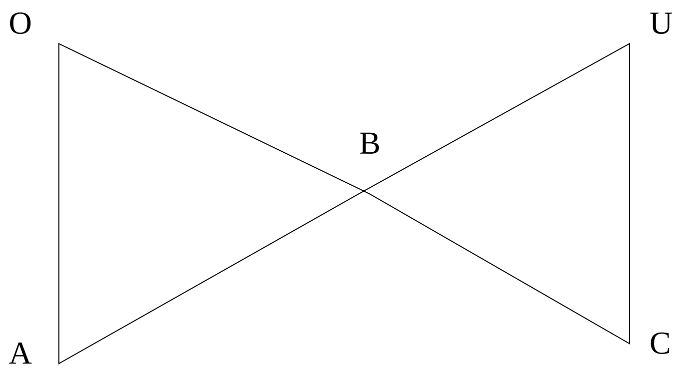


FIGURE 6.3 – **Marche aléatoire simple sur le graphe papillon**

   (b) Pour B quelqonque, en conditionnant sur le premier pas, trouvez une relation entre les variables $p_x(k,B), x \in A, k \in \mathbb{N}$, et finalement une récurrence vectorielle $\boldsymbol{p}(k) = M\boldsymbol{p}(k-1)$, en spécifiant comment obtenir la matrice M à partir de la matrice P de transition de la chaîne. Vérifiez votre formule avec le cas $B = A$.

   (c) Retrouvez le résultat pour le "papillon généralisé" ci-dessus, dans le cas qu'on cherche la probabilité p_k en partant de $U = 5$ que la marche visite $O = 1$ exactement k fois ($k = 0, 1, 2, ...$) avant le premier retour à U) (les autres sommets seront libelés $A = 2, B = 3, C = 4$), **à partir de la formule générale**.

   (d) Considerez aussi le "papillon généralisé", en prenant $B = \{1, 2, 3\}$. Vérifiez pour cet exemple que la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(i,B) = 1, \forall i \in \{1, 2, 3\}$.

   (e) Ecrivez un program dans votre language de choix qui calcule $\boldsymbol{p}(k,B)$ et une approximation $\boldsymbol{p}(k,B) \approx c\lambda^k$ pour une chaîne et ensemble B arbitraires et démontrez sa performance sur les exemples 3.5, 3.6 (pages 23-24) et ensembles B de votre choix.

12. Soit X_t une chaîne absorbante sur $\{1,2,a\}$ avec matrice de transition $\begin{pmatrix} p_1 & p & | & 1-p_1-p \\ 0 & p_2 & | & 1-p_2 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} Q| & 1-p_1-p \\ | & 1-p_2 \\ \hline 0\ 0| & 1 \end{pmatrix}$ où $Q = \begin{pmatrix} p_1 & p \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$, et avec distribution initiale $(1,0,0)$.
Soit N le nombre des pas (transitions) jusqu'à l'absorbtion en a.
   (a) Quelle est la valeur de N si $X_0 = X_1 = ... = X_{k-2} = 1, X_{k-1} = 2$ et $X_k = a$?
   (b) Trouvez l'espérance du nombre des pas N jusqà l'absorbtion.
   (c) Demontrez que pour $i, j \in \{1,2\}$, et $k \in \{1,2,...\}$, il est vrai que
   $$P[N \geq k, X_k = j | X_0 = i] = P[X_k = j | X_0 = i]$$
   (d) Quelle sont les probabilités
   $$P[N \geq 2, X_2 = j | X_0 = i], i, j \in \{1,2\}$$
   (e) Donnez la formule des probabilités
   $$a_1 = P[N \geq k, X_k = 1 | X_0 = 1],\ a_2 = P[N \geq k, X_k = 2 | X_0 = 2], k \in \{1,2,...\}$$
   (f) Calculez la matrice génératrice $(I - xQ)^{-1}$.
   (g) Calculez la matrice fondamentale $(I - Q)^{-1}$, et verifiez la réponse du point b).
   (h) (*) Calculez Q^k, en utilisant le developpement limite (en serie de puissances) de la matrice génératrice $(I - xQ)^{-1}$.
   (i) (*) Trouvez les probabilités $P[N \geq k | X_0 = 1]$.
13. (*) Marc et un groupe de $n-1$ amis jouent un jeu. Chacun met un euro, et ensuite lance une monnaie biaisée, avec une probabilité de sortir «face» égale à p. La totalité de l'argent est partagée également entre ceux qui ont obtenu face (s'il n'y a aucune, l'argent est donné à une œuvre charitaire), et les piles perdent leur argent. a) Quelle est l'espérance du capital de Marc, après un tour ? b) (*) Quelle est l'espérance du capital après un tour pour un joueur choisi aléatoirement ?
14. a) Quelle est la probabilité que la marche aléatoire simple est de retour en 0 après $2n$ pas ? b) Approximer cette quantité par la formule de Stirling $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$.
   c) (*) Démontrez la formule de Stirling.
15. Un message electronique doit être transmis par l'utilisateur d'une machine A vers l'utilisateur d'une machine C. Ce transfert s'effectue par l'intermédiaire d'une machine B. Mais Mickey Markov est administrateur du réseau et il y a parfois des messages perdus ou détruits. On suppose que – le transfert de A vers B est effectif avec la probabilité p et échoue avec la probabilit é 1 - p. En cas d'échec, le message est retourné 'a l'utilisateur A ; – le transfert de B vers C est effectif avec la probabilité q et échoue avec la probabilit é 1 - q. En cas d'échec, le message est 'a nouveau retourné 'a l'utilisateur A ; – en cas d'échec, A renouvelle l'envoi du message ; – tous les transferts sont indépendants entre

eux. On note $X_n, n \geq 0$ la succession des machines sur lesquelles le message transite. a) Démontrer que $X_n, n \geq 0$ est une chaîne de Markov homogène d'espace d'états A,B,C, de condition initiale X0 = A, dont on écrira le matrice de transition P. b) On s'intéresse au nombre N de transitions nécessaires pour que le message atteigne son destinataire : $N = inf n \geq 1, X_n = C$. 1) Démontrer que, pour tout entier n, $P(N \leq n) = p_{AC}(n)$, o'u $p_{AC}(n)$ est le coefficient correspondant à la ligne A et à la colonne C de la matrice P^n, puissance n de P. 2) En utilisant l'identité $P^{n+1} = PP^n$, démontrer la relation suivante : $p_{AC}(n+1) = (1-p)p_{AC}(n) + p(1-q)p_{AC}(n-1) + pq$. 3) Existe-t-il une suite constante solution particulière de l'équation de récurrence $u_{n+1} = (1-p)u_n + p(1-q)u_{n-1} + pq$ 4) Que valent $p_{AC}(0)$ et $p_{AC}(1)$? – On suppose maintenant p = q = 1/ 2 . Pour tout $n \geq 0$, on pose $v_n = u_{n-1}$. Quelle est la forme générale de la solution de l'équation de récurrence satisfaite par la suite $v_n, n \geq 0$? 5) En déduire $P(N \leq n)$ pour tout n 2 IN. 6) Calculer E[N].

16. Est-ce qu'il existent des matrices réeles 2×2, sans éléments négatifs, et avec des valeurs propres complexes ?
17. Est-ce que la marche aléatoire symmétrique simple sur les sommets d'un polygon est ergodique ?
18. n points indépendents sont choisis uniformement sur le perimètre d'un cercle. Quelle est la probabilité p_n qu'il existe un démi-cercle contenant tous les points ?

    Ind. Trouvez p_2, p_3. Fixez un point i et trouvez la probabilité p que le démi-cercle voisin, dans le sense des aiguilles d'une montre, contient tous les points.

6.9 Solutions

1. a) Les classes récurrentes sont 2 et 3,5. La classe transiente 1,4,6 est périodique de période 3 (par exemple en regardant le graph, ou en remarquant que les puissances de P projeté sur 1,4,6 ont la même structure des elts nonnuls.

   Algébriquement, on peut aussi calculer les valeurs propres, i.e. les racines du pol char : $(1-x)^2(1-12x)(1-16x^3)$. Les trois racines $l_i = 1/2 * (1/2)^{1/3}, i = 1,2,3$ exhibent une périodicité de degré 3, "diminuant vers 0" (en fait, la réponse depend de la definition, car souvent on n'inclut pas ce genre de périodicité dans les classes transientes).

   c) Pour obtenir la limite, on a juste besoin des probabilités d'absorbtion dans la classe 2, qui satisfont :

$$y_4 = y_6, y_6 = 1/4y_1, y_1 = 1/4 + 1/4y_6 = 1/4 + 1/16y_1 \Longrightarrow y_1 = 4/15, y_4 = y_6 = 1/15$$

   ou des probabilités d'absorbtion dans la classe 3,5 :

$$x_4 = x_6, x_1 = 1/2+1/4x_6, x_6 = 3/4+1/4x_1 = 3/4+1/8+1/16x_6 \Longrightarrow x_1 = 11/15, x_4 = x_6 = 14/15$$

2. (a) i. π_i sont proportionels aux degrés d_i des sommets. En divisant par la somme $D = 2 + 4*3 + 3*2 = 20$, on trouve $\pi_i = \frac{d_i}{\sum_j d_j}$, donnant ($\pi_1 = 2/20 = \frac{1}{10}, \pi_2 = \pi_3 = \pi_0 = 4/20 = \frac{1}{5}, \pi_4 = \pi_5 = \frac{3}{20}$)

ii. Soit

$$t_i = \mathrm{E_i}\ \mathrm{T_0} = \mathrm{E_i}[\text{ nombre esperé de pas jusq'au noeud 0}].$$

Rq : Pour cette question, le noeud 0 est effectivement absorbant.

La symmetrie implique $t_2 = t_3, t_5 = t_4$, donc trois équations suffiront (au lieu de 5). En conditionnant sur le premier pas, on trouve que t_i satisfont :

$$t_1 = 1 + t_2$$
$$t_2 = 1 + \frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_2 + \frac{1}{4}t_5$$
$$t_5 = 1 + \frac{1}{3}t_5 + \frac{1}{3}t_2$$

Rq : C'est la structure typique $G\boldsymbol{t} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ pour les pbs de temps esperé.

Ça donne : $t_5 = \frac{11}{3}, t_2 = \frac{13}{3}, t_1 = \frac{16}{3}$

iii. $\mathrm{E\widetilde{T}_0} = 1 + \frac{1}{4}(\mathrm{t_2} + \mathrm{t_3} + \mathrm{t_4} + \mathrm{t_5}) = 1 + \frac{12}{3} = 5\ (= \frac{1}{\pi_0})$ en vérifiant ainsi le théorème $\mathrm{E\widetilde{T}_0} = \frac{1}{\pi_0}$.

(b) i.

Remarque 6.14. *Pour cete question, les noeuds* $0, 1$ *sont effectivement absorbants. Le système d'absorption, tenant compte de* $x_2 = x_3, x_4 = x_5$ *est :*

$$x_2 = \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}$$
$$x_4 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4$$

Remarque 6.15. *C'est la structure typique* $G\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$ *pour les pbs de prix final esperé.*

Ça donne : $x_2 = \frac{2}{5}, x_4 = \frac{1}{5}$.

Soit p_k *la probabilité d'avoir exactement* k *visites à* 1 *avant de visiter* 0*, à partir de* 2*. Alors* p_0 *c'est la probabilité commençant en* 2 *que la marche visite* 0 *avant de visiter* 1*, qui est* $\frac{3}{5}$*, et pour* $k \geq 1$*,* $p_k = \frac{2}{5})p_{k-1}$*, et* $p_k = \frac{3}{5}\ (\frac{2}{5})^{k-1}$*, donc une distribution geometrique.*

Soit p_k *la probabilité d'avoir exactement* k *visites à* 1 *avant de visiter* 0*, à partir de* 5*. Alors,* p_0 *c'est la probabilité commençant en* 5 *que la marche visite* 0 *avant de visiter* 1*, qui est* $\frac{4}{5}$*.*

Pour $k = 1$ *visite, "le chemin" observé seulement en O, 1 et l'état aprés 1" est 5,1,2,0. Donc,* $p_1 = P_5[1, 2, 0] = \frac{1}{5}\frac{3}{5}$*,* $p_2 = P_5[1, 2, 1, 0] = \frac{1}{5}\frac{2}{5}\frac{3}{5}$*, et en général* $p_k = \frac{2}{5}p_{k-1} = (\frac{1}{5}\frac{3}{5})(\frac{2}{5})^{k-1}, k \geq 1$*. La distribution pour* $k \geq 1$ *est geometrique, et* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{1}{5}$*, comme il faut.*

Remarque 6.16. *Pour cette question, le noeud* 1 *est absorbant.*

$$p_k = (\frac{2}{5})^k \frac{3}{5}.$$

(c) i. Après la détérioration, la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(Sans les pas sur place, elle serait)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii. classes recurrentes : $\{0\}, \{4, 5\}$; classe transiente : $\{1, 2, 3\}$.

iii. les distributions stationnaires des classes recurrentes : 1 et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

iv. Le système d'absorption pour les probabilités d'absorption dans la classe 0 est :

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$
$$x_2 = \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}$$
$$x_3 = \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}$$

et $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$.

v. La matrice des distributions asymptotique est :

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. (a,b) Soit $(Gf)_x = p\ (f_{x+1} - f_x) + q\ (f_{x-1} - f_x)$ (formellement, la même expression comme dans le cas "non-paresseux", sauf que maintenant $p + q < 1$.

Les équations sont respectivement :

$$(Gp)_x = 0, p_K = 1, p_0 = 0$$
$$(Gf)_x = 0, f_K = K, f_0 = 0$$
$$(Gg)_x = 0, g_K = K^2, d_0 = 0$$
$$(Gt)_x + 1 = 0, t_K = 0, t_0 = 0$$
$$(Gc)_x + x = 0, c_K = 0, c_0 = 0$$
$$(Gw)_x + (1 - a^{-1})w_x, w_K = 1, w_0 = 1$$

Ces sont exactement les mêmes équations comme pour une marche non-paresseuse, sauf que l'opérateur est different.

(c) Pour p_x et f_x on obtient donc les mêmes équations comme pour une marche symmetrique avec $p = 1/2$, par exemple :

$$\begin{aligned} 2pp_x &= pp_{x+1} + pp_{x-1} \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \\ p_K &= 1, \quad p_0 = 00 \end{aligned}$$

et donc les mêmes réponses $p_x = \frac{x}{K}, \quad f_x = K^2 \frac{x}{K} = xK.$

(d) Pour $t_x = E_x[T]$ (temps de sortie esperé) on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= pt_{x+1} - (p+q)t_x + qt_{x-1} + 1 \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \\ t_K &= 0, \quad t_0 = 0 \end{aligned}$$

Soit $t_0(x) = \frac{x}{q-p}$ une solution particulière qui satisfait $t_0(0) = 0$. La solution est
$t_x = t_0(x) - t_0(K)\frac{h(x)}{h(K)}$ où $h(x) = 1 - (q/p)^x$ est une solution homogène satisfaisant $h(0) = 0$. Pour $K = \infty, q > p$ on obtient $t(x) = t_0(x)$.
Pour c_x on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= pc_{x+1} - (p+q)c_x + qc_{x-1} + x \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \\ c_K &= 0, \quad c_0 = 0 \end{aligned}$$

Soit $c_0(x) = \frac{x^2}{2(q-p)} + \frac{x(q+p)}{2(q-p)^2}$ une solution particulière qui satisfait $c_0(0) = 0$. La solution est
$c_x = c_0(x) - c_0(K)\frac{h(x)}{h(K)}$ où $h(x) = 1 - (q/p)^x$ est une solution homogène satisfaisant $h(0) = 0$. Pour $K = \infty, q > p$ on obtient $c(x) = c_0(x)$.

Remarque : Le fait que les équations sont identiques pour ces deux marches (paresseuse et non-paresseuse) n'est pas une coincidence. En fait, il s'avère que les réponses obtenues sont les mêmes por n'importe quel processus Markovien homogène, si on defini l'opérateur de la façon juste. Donc, la réponse pour tous les problèmes concernant espérances va impliquer un seul opérateur G (seulement les conditions frontière et la partie non-homogène changent d'un problème à l'autre)- en fait, la famille des processus aléatoires Markoviens est isomorphe à une famille d'opérateurs déterministes.

En plus, la structure des réponses en fonction de G est la même pour toutes les processus aléatoires Markoviens, malgré leur diversité ; c'est un fait remarquable, qui démontre la puissance de ce concept.

4. Les probabilités de ruine satisfont $p_x = \frac{6}{7}p_{x+1} + \frac{1}{7}p_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine de

$$\frac{6}{7}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{7} = (\rho - 1)(\frac{6}{7}\rho^2 - \frac{1}{7}\rho - \frac{1}{7}) = \frac{6}{7}(\rho - 1)(\rho - 1/2)(\rho + 1/3)$$

$p_x = A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(\frac{-1}{3})^x$ satisfait $p_0 = p_{-1} = 1$ ssi $A_1 = 4/5, A_2 = 1/5.$

5. (a) La matrice de transition est :

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ \hline \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & ... & 0 & ... & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} \\ \hline ... & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

(b) $\pi_k = \frac{k}{2(n-1)}\pi_n, \ \forall k < n$ et la symmetrie $\pi_k = \pi_{2n-k}$ impliquent $\pi_n(1 + \frac{(n-1)n}{2(n-1)}) = \pi_n(1 + \frac{n}{2}) = 1$ et $\pi_n = \frac{2}{2+n})$

(c) $E_S[X_n] = n$

(d) $t_n = \frac{2+n}{2}$

(e) i.

ii. $\Psi(k) = \Psi(n) = \frac{a}{a+b}$.

iii. $t(k) = t(n) + |n-k|, t(n) = 1 + n\frac{1-a-b}{a+b}$.

6. a) Soit$\lambda = p(1-q), \mu = q$. On a $z_0 = 1 - \lambda$, et $\forall n \geq 1, z_n = z = 1 - \lambda - \mu = (1-p)(1-q)$. Le graph de communication est :

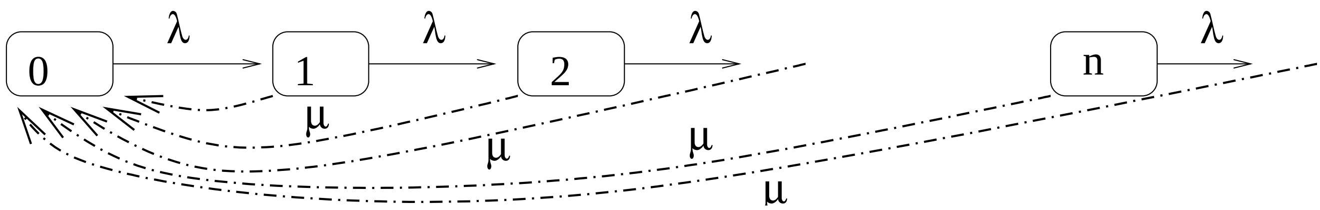


FIGURE 6.4 – **Exe 2 : Le serveur sert tous les clients**

b) On trouve $\pi_i = \lambda\pi_{i-1} + z\pi_i \Leftrightarrow \pi_i = \widetilde{\lambda}\pi_{i-1}, i = 1, 3, ...,$ avec $\widetilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, et donc $\pi_i = \widetilde{\lambda}^i\pi_0$, où la constante de normalisation est $\pi_0 = 1 - \widetilde{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

c) $t_0 = t^{(0)} + t_1$ où $t^{(0)} = \lambda^{-1}$ et $t_1 = t_2 = ... = \mu^{-1}$. Remarquez l'identité $t_0 = \pi_0^{-1}/P_0[X_1 \neq 0$, valable pour toutes les chaînes ergodiques.

d)

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \\ \mu & 0 & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}$$

7. a) **C'est un système linéaire avec** $n = 3$ **équations et** $n = 2$ **inconnues** (car la troisième viendra de la normalisation). En général, il n'y aura pas des solutions. Esaayons quand même résoudre 2 équations d'équilibre detaillé

$$\pi_1 5/6 = \pi_3 30/31, \pi_2 1/7 = \pi_3 1/31,$$

en prenant $\pi_3 = 31$ (en renoncant pour l'instant à la normalization). On trouve $\pi_1 = 36, \pi_2 = 7$, qui satisfont aussi la troisième équations d'équilibre detaillé.

Il ne reste qu'a normaliser par la somme :

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{74}(36, 37, 31).$$

Rq : La matrice $D(i,j) = \pi_i P(i,j)$ obtenue ainsi (avec ou sans normalisation) est symmétrique.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 30 \\ 6 & 0 & 1 \\ 30 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(et pourrait correspondre aux conductances d'un réseau).

Pour une matrice stochastique arbitraire de dimension 3, les quatre équations correspondantes (trois d'équilibre detaillé + la normalisation) n'auront pas de solution, et donc la distribution stationnaire ne sera pas reversible/"graphique/electrique". En general, les matrices de dimension $n \geq 3$ n'ont pas de "graphe ponderé associé) mais seulement le digraph (graphe directionné) de communication bien connu.

b) Les équations d'equilibre correspondent à une récurrence d'ordre deux (donc facile à résoudre), mais les équations d'équilibre detaillé sont d'ordre 1, donc **super facile à résoudre**. Comme il y a que $B-1$ équations d'équilibre detaillé, cette fois ca reste super facile même avec une matrice arbitraire avec le même (di)graphe. Ca sera le cas de tous les graphes forêts (sans cycles), car un graphe forêt avec B noeuds a $B-1$ arrêtes ! (dem par récurrence).

8. (a) Il y a B équations d'équilibre detaillé $\pi_{i-1}p = \pi_i q, i = 1, ...B$, avec solution $\pi_i = \frac{\rho^i}{\sum_{i=0}^{B} \rho^i}, \rho = p/q$.

   Remarque 6.17. *Les équations d'équilibre sont linéaires, et donc leur solution explicite est toujours possible en principe, même symboliquement, avec deux bemols : 1) la matrice $G = P - I$ est singulière, et 2) si la réponse (après simplification, bien sùr) est trop longue, notre vie ne suffira peut être pas pour la lire ! Soyons quand même optimimistes. Demander a votre* **logiciel symbolique** *préféré quelle est la solution du système $\pi G = 0$, pour G de dimension 3. Est-ce que la réponse pour $\pi(1)$ peut être interprété en termes des chemins conduisant à 1, c.-à-d. $\{2,3,1\}, \{3,2,1\}, \{2,1\}, \{3,1\}$?*

   (b) Les éspérances $t_i = E_i T_0$ en sortant de $i = 1, 2, ...$ du nombre de pas jusqu'au noeud 0 satisfont $(I - Q)\mathbf{t} = \mathbf{1}$ où $Q = \begin{pmatrix} 1-p-q & p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ q & 1-p-q & p & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & q & 1-p-q \end{pmatrix}$

   (c) L'éspérance en sortant de 0 du nombre de pas $\widetilde{T}_0$ jusq'au premier retour en 0 est $\widetilde{t}_0 =$.

   (d) (*) Oui, les équations d'équilibre detaillé continuerons à admettre des solutions strictement positives, si on modifie les valeurs p, q à $p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i < 1, \forall i \in \{0, 1, 2, ..., B\}$.

9. 1)

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Le polynôme charactéristique est

$$-x^3 + \frac{7x^2}{5} - \frac{11x}{25} + \frac{1}{25} = -\frac{x-1}{25}(5x-1)^2,$$

avec valeurs propres $1, -1/5, -1/5$.

4) La solution la plus simple est par la decomposition spectrale. Une autre est de chercher des scalaires

$$P^n = a_n P^2 + b_n P + c_n I$$

où $a_n = ..., b_n = .., c_n = ...$, et l'initialisation vient de Cayley-Hamilton $P^3 = \frac{7}{5}P^2 - \frac{11}{25}P + \frac{1}{25}I$. Finalement,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{5^{-k}}{2} & \frac{1}{4} - \frac{5^{-k}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{5^{-k}}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{5^{-k}}{2} & \frac{1}{4} + \frac{35^{-k}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{5^{-k}}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{5^{-k}}{2} & \frac{1}{4} - \frac{5^{-k}}{4} & \frac{1}{4} + \frac{35^{-k}}{4} \end{pmatrix}$$

10. a) L'équation de Chapman-Kolmogorov donne imédiatement une formule explicite : $P^n(1,1)$. On note aussi que les marches cycliques ont la matrice de transition P circulante, et donc nous avons une decomposition spectrale bien-connue explicite, qui utilise les racines (complexes) de l'unité. Mais, on peut faire mieux. La matrice P^n est aussi circulante, et contient donc seulement deux inconnues : $b_n = P^n(1,2), c_n = P^n(1,3)$. Soit $b = P(1,2), c = P(1,3), a = P(1,1) = 1 - b - c$ les probabilités après un pas. On trouve la récurrence :
$\begin{pmatrix} b_{n+1} - 1/3 \\ c_{n+1} - 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & c-b \\ b-c & a-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n - 1/3 \\ c_n - 1/3 \end{pmatrix}$
Le cas $b = c = 1/2$ et $a = b = c = 1/3$ donnent des récurrences "decouplées". Le cas $b = 2/3, c = 1/3$ est plus difficile. En utilisant l'ordinateur, on rémarque que :

$$(b_n - 1/3, c_n - 1/3) = (1/3, 1/3) + 3^{-1-n/2} v_n$$

où $v_n = v_{n+12}$ est périodique.

11. (a) Quand $|B| = 1$, on trouve une distribution geometrique $p_x(k, \{x\}) = \lambda^{k-1}(1-\lambda)$ où : $1 - \lambda = p_x(1, \{x\}) = Q(x, \partial(A) + \sum_{y \in A-B} p(x,y) P_y[T_{\partial(A)} < T_x] = Q(x, \partial(A) + \sum_{y \in A-B} p(x,y)(1 - P_y[T_{\partial(A)} > T_x])$, et $\lambda = Q_{B,B} + \sum_{y \in A-B} p(x,y) P_y[T_{\partial(A)} > T_x] = Q_{B,B} + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1} Q_{A,B}$, car pour $k \geq 2$ on a :

$$p_x(k, \{x\}) = \sum_{y \in A-B} p(x,y) P_y[T_{\partial(A)} > T_x] p_x(k-1, \{x\}) = \lambda p_x(k-1, \{x\})$$

Pour le papillon, $B = \{3\}$, $\lambda_B = x_1 + x_2 + c x_4 = 5/8$ et pour $B = \{1\}$, $\lambda_B = 3/8$.

(b) Il est convenable de partager $\boldsymbol{p}_k = (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_k)$, où $\boldsymbol{b}_k = (p_x(k,B), x \in B), \boldsymbol{a}_k = (p_x(k,B), x \in A, x \notin B)$. On peut supposer qu'il y a un seul état absorbant (en "collant ensemble" tous les états absorbants), et soit

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} Q_A & Q_{A,B} & \boldsymbol{p}_A \\ Q_{B,A} & Q_B & \boldsymbol{p}_B \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

la partition de la matrice de transition contenant les états dans l'ordre $A - B, B, \partial$. On a $\boldsymbol{b}_0 = 0, \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{p}_B + Q_{B,A}\boldsymbol{a}_0$ et

$$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{p}_A + Q_A \boldsymbol{a}_0 \Longrightarrow \boldsymbol{a}_0 = (I - Q_A)^{-1}\boldsymbol{p}_A, \quad \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{p}_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1}\boldsymbol{p}_A$$

Pour $k \geq 2, x \in B$, $p_x(k,B) = \sum_{y \in A} P(x,y) p_y(k-1,B)$, et donc

$$\boldsymbol{b}_k = Q_B \boldsymbol{b}_{k-1} + Q_{B,A}\boldsymbol{a}_{k-1}$$

tant que pour $x \notin B, k \geq 1$, $p_x(k,B) = \sum_{y \in A} P(x,y) p_y(k,B)$ et donc

$$\boldsymbol{a}_k = Q_{A,B}\boldsymbol{b}_k + Q_A \boldsymbol{a}_k \Longrightarrow \boldsymbol{a}_k = (I - Q_A)^{-1} Q_{A,B} \boldsymbol{b}_k$$

Comme

$$\boldsymbol{b}_1 = (I_B - Q_B)\mathbf{1}_B - Q_{B,A}\mathbf{1}_A + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1}((I_A - Q_A)\mathbf{1}_A - Q_{A,B}\mathbf{1}_B) = (I_B - M)\mathbf{1}_B)$$

on trouve

$$\boldsymbol{b}_k = (Q_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1} Q_{A,B})\boldsymbol{b}_{k-1} \Longrightarrow \boldsymbol{b}_k = M^{k-1}\left((I_B - M)\mathbf{1}_B\right)$$

où $M = Q_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1} Q_{A,B}$ est la matrice de transition de la "chaîne induite" sur B (où "complement de Shur" de A en Q).
Quand $B = A$, on retrouve $\boldsymbol{b}_k = Q_B^{k-1}\boldsymbol{p}_B$.

(c) En résolvant le système d'absorbtion pour p_A, p_B, p_C, on trouve $p_A = 3/4, p_B = 1/2, p_C = 1/4$. 5) Soit $p_{A,k} = \mathbb{P}_A\{$exactement k visites en U avant le retour en $O\}$, avec $p_{B,k}, p_{C,k}$ définies pareillement, et $\boldsymbol{p}_k = (p_{A,k}, p_{B,k}, p_{C,k})$.
Ainsi, $\boldsymbol{p}_0 = (p_A, p_B, p_C)$ et $p_0 = \frac{1}{2}(p_{A,0} + p_{B,0}) = \frac{1}{2}(p_A + p_B)$.
Pour $k \geq 1$, on trouve :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_k \quad &= \quad \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_k + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_{k-1} \\ &\Longleftrightarrow \boldsymbol{p}_k = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_{k-1} \\ &\Longleftrightarrow \boldsymbol{p}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_{k-1} \end{aligned}$$

Les vecp à droite sont les colonnes de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & 2/3/ \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, les valp correspondantes sont : $0, 0, 5/8$ et le vecp de PF à gauche est : $(0, 3/5, 3/5)$.

Dés lors, $\boldsymbol{p}_k = (5/8)^{k-1}(p_B + p_C)\begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ et $p_k = (5/8)^{k-1}(p_B + p_C)3/10$

12. a) $N = k$, b) $E_1 N = \frac{1}{1-p_1} + \frac{p}{(1-p_1)(1-p_2)}$,
c) Pour i, j transients, l'evenement $[X_k = j | X_0 = i]$ implique, est inclu et en effet coincide avec $[N \geq k, X_k = j | X_0 = i]$
d) $Q^2(i, j) = ...$
e) On devine et comprends facilement que $a_i = Q^k(i, i) = p_i^k, i = 1, 2$
f) La matrice génératrice est

$$(I - xQ)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-xp_1} & \frac{xp}{(1-xp_1)(1-xp_2)} \\ 0 & \frac{1}{1-xp_2} \end{pmatrix}$$

g) En posant $x = 1$, on trouve la matrice fondamentale :

$$(I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-p_1} & \frac{p}{(1-p_1)(1-p_2)} \\ 0 & \frac{1}{1-p_2} \end{pmatrix}$$

$$n_2 = E_2 N = \frac{1}{1 - p_2}, n_1 = E_1 N = \frac{1}{1 - p_1} + \frac{p}{(1 - p_1)(1 - p_2)}$$

h) On retrouve $Q^k(1, 1) = p_1^k, Q^k(2, 2) = p_2^k$, et on trouve $Q^k(1, 2) = p\left(\sum_{i=0}^{k-1} p_1^i p_2^{k-1-i}\right)$.
Pour interpreter probabilistiquement la formule de $Q^k(1, 2)$, il est utile de remarquer qu'il s'agit de **la distribution phase la plus simple qui n'est ni serie, ni parallèle**
i) $P[N \geq k | X_0 = 1] = Q^k(1, 1) + Q^k(1, 2) = p_1^k + p\left(\sum_{i=0}^{k-1} p_1^i p_2^{k-1-i}\right)$. La somme verifie la réponse b).

13. a) X, le nombre total des faces a une distribution binomiale $B(n, p)$. Il y a deux possibilités : - que Marc tire une pile et perd, dans quel cas son gain sera 0, et qu'il tire une face, dans quel cas le gain sera $Y = \frac{n}{1+X'}$ où X' a une distribution binomiale $B(n, p)$. Donc, l'espérance du gain est

$$\begin{aligned} Y = pE\frac{n}{1 + X'} &= p\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1 + k} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} = p\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1 + k} \frac{(n - 1)!}{k!(n - k - 1)!} p^k q^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1 + k} \frac{n!}{(k + 1)!(n - k - 1)!} p^{k+1} q^{n-1-k} = \sum_{j=1}^{n} C_n^j p^j q^{n-j} = 1 - q^n \end{aligned}$$

b) Le gain espéré d'un «joueur aléatoire» $Y = Y(X)$ est 0 si $X = 0$, a.p. q^n. Au cas contraire, le «joueur aléatoire» est gagnant avec probabilité $\frac{X}{n}$ et perdant avec probabilité

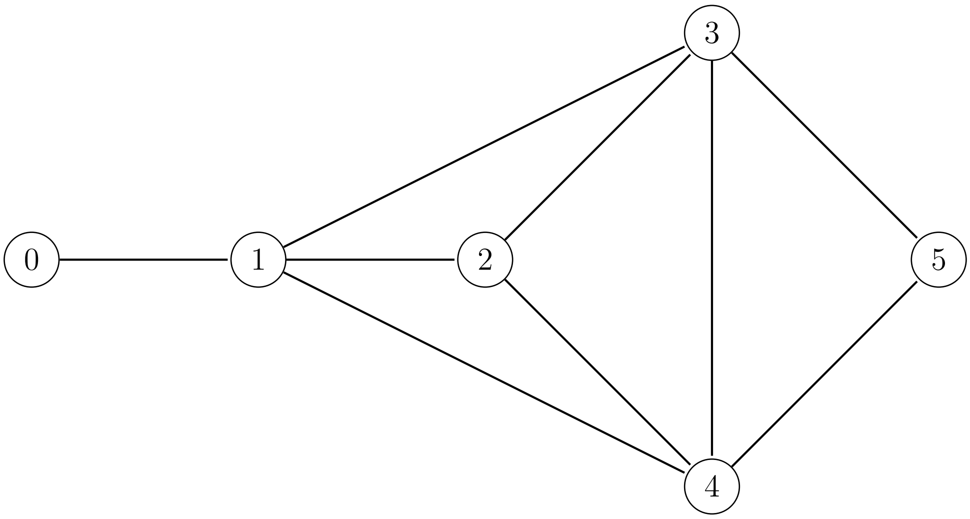
$1 - \frac{X}{n}$. Le gain espéré est toujours $(1-q^n)E[\frac{X}{n}\frac{n}{X}] = (1-q^n)$. Finalement, cet exercice suggère la question générale du calcul des «sommes binomiales», par exemple

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i$$

où $x = \frac{p}{q}$. Parfois, ces sommes peuvent être déduites à partir de l'identité $(1+x)^m = \sum_{i=0}^m C_m^i x^i$ en dérivant ou en intégrant. Mais, le procès d'intégration n'aboutit pas toujours à des sommes closes. Une somme $S_n = \sum_1^n f_n$ est une solution d'une relation de récurrence de premier ordre $S_n - S_{n-1} = f_n$ et donc la question de l'existence des formules closes pour f_n polynômes ou fonctions rationnelles est un cas particulier de la question de l'existence des formules closes pour les récurrences avec coefficients polynomiaux. Cette question est assez difficile, et le plus efficace est d'utiliser un logiciel symbolique. Ceux-ci nous informent s'il y a des formules closes, par exemple dans la famille relativement simple des solutions «d'Alembertiennes», ou si non.

Chapitre 7

Chaînes de Markov. Controle continu 2018



Considérez une particule effectuant une **marche aléatoire simple** $X_t,\ t = 0, 1, 2, ...$ sur le graphe ci-dessus : i.e. à chaque moment $t = 1, 2, ...$, la particule se déplace vers l'un de ses voisins sur le graphe à sa position actuelle, avec la même probabilité pour chaque choix.

1. Calculer :
   (a) Les probabilités stationnaires de chaque noeud.
   (b) L'éspérance en sortant de 0 du nombre de pas T_2 jusq'au noeud 2. *Indication :* Utiliser la symmetrie.
   (c) L'éspérance en sortant de 2 du nombre de pas $\widetilde{T}_2$ jusq'au premier retour en 2.

2. (a) La probabilité $x_0 = \mathbb{P}_0\{X_T = 5\}$, où $T = \min[T_5, T_2]$.

(b) Les probabilités p_k en partant de 0 que la marche visite 5 exactement k fois ($k = 0, 1, 2, ...$) avant le premier retour en 2. Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.

3. À un moment donné, le passage sur les arrêtes $(1,3),(2,3),(1,4),(2,4)$ devient possible seulement dans la direction de gauche à droite, et le passage sur l'arrête $(0,1)$ devient possible seulement dans la direction de droite à gauche. La particule continue de choisir des destinations suivant le graphe initial comme dans les questions précédentes, mais les choix qui ne sont plus disponibles résultent cette fois dans un pas annulé, donc sur place.
   (a) Donnez la matrice de transition de la marche.
   (b) Identifiez les classes de la chaîne, et classifiez les en récurrentes et transitoires.
   (c) Trouvez la distribution stationnaire de chaque classe récurrente, et les vecteurs propres à gauche qui correspondent a ces classes.
   (d) Est-ce que la limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition après n étapes P^n existe ? Le cas écheant, trouvez-la.

Solutions :

1. (a) π_i sont proportionels aux degrés d_i des sommets. En divisant par la somme $D = 18$, on trouve $\pi_i = \frac{d_i}{\sum_j d_j}$, donnant $(\pi_0 = \frac{1}{18}, \pi_1 = \frac{4}{18} = \pi_3 = \pi_4, \pi_2 = \frac{3}{18}, \pi_5 = \frac{2}{18})$
   (b) Soit
$$t_i = \mathrm{E_i\ T_2} = \mathrm{E_i}[\text{ nombre esperé de pas jusq'au noeud 2}].$$
   Rq : Pour cette question, le noeud 2 est effectivement absorbant.
   La symmetrie implique $t_4 = t_3$, donc quatre équations suffiront (au lieu de 5). En conditionnant sur le premier pas, on trouve que t_i satisfont :
$$t_0 = 1 + t_1, t_1 = 1 + t_3/2 + t_0/4$$
$$t_2 = 1 + \frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_2 + \frac{1}{4}t_5$$
$$t_5 = 1 + \frac{1}{3}t_5 + \frac{1}{3}t_2$$
   Rq : C'est la structure typique $G\boldsymbol{t} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ pour les pbs de temps esperé.
   Ça donne : $t_5 = t_0 = 6, t_1 = t_3 = 5$
   (c) $\mathrm{E}\widetilde{\mathrm{T}}_2 = 1 + 5 = 6$ $(= \frac{1}{\pi_0})$ en vérifiant ainsi le théorème $\mathrm{E}\widetilde{\mathrm{T}}_0 = \frac{1}{\pi_0}$.
2. (a)
   Remarque 7.1. *Pour cete question, les noeuds* $0, 1$ *sont effectivement absorbants. Le système d'absorption, tenant compte de* $x_2 = x_3, x_4 = x_5$ *est :*
$$x_2 = \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}$$
$$x_4 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4$$
   Remarque 7.2. *C'est la structure typique* $(I - Q)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ *pour les pbs de prix final esperé.*
   Ça donne : $x_0 = \frac{2}{7}, x_4 = x_3 = \frac{3}{7}$.

Soit p_k la probabilité d'avoir exactement k visites à 5 avant de visiter 2, à partir de 0. Alors p_0 c'est la probabilité commençant en 0 que la marche visite 2 avant de visiter 1, qui est $\frac{5}{7}$. $p_1 = \frac{2}{7}\frac{4}{7}$, et pour $k \geq 2$, $p_k = \frac{3}{7}p_{k-1}$, et $p_k = \frac{2}{7}\frac{4}{7}\ (\frac{3}{7})^{k-1}$, donc une distribution geometrique avec retard.

3. (a) Après la détérioration, la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) classes recurrentes : $\{0\}, \{3, 4, 5\}$; classe transiente : $\{1, 2\}$.

(c) les distributions stationnaires des classes recurrentes : 1 et $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$.

(d) Le système d'absorption pour les probabilités d'absorption dans la classe 0 est :

$$x_1 = \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}x_1$$

et $x_1 = \frac{3}{11}, x_2 = \frac{1}{11}$.

Chapitre 8

Temps continu et espace d'états discrets. Le processus de Poisson.

8.1 Complements sur la loi exponentielle

Exercice 8.1. *Soit X1 et X2 la durée de vie de deux composants. On suppose que ces deux composants suivent la même loi E(λ = 1/1000). 1. Si ces composants sont montés en série, quelle est la loi de la durée de vie du circuit électronique ? (On suppose que les deux composants fonctionnent indépendemment l'un de l'autre) 2. Même question si ces composants sont montés en parallèle. 3. Calculer la durée de vie moyenne du circuit dans le premier cas, dans le deuxième cas. 4. Généraliser au cas de n composants.*

Théorème 8.1. La loi exponentielle et la propriété de ≫'manque de mémoire≫' *Soit X une variable aléatoire réelle positive. Alors, X suit une loi exponentielle si, et seulement si la ≪fonction de survie conditionnelle≫ satisfait :*

$$\forall t, h \geq 0 \ , \ P\left[X \geq t+h \mid X \geq t\right] = P\left[X \geq h\right],$$

qu'on appelle la propriété de manque de mémoire.

Démonstration : Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors pour tous $t, h \geq 0$ on a :

$$P\left[X \geq t+h \mid X \geq t\right] = \frac{P\left(\left[X \geq t+h\right] \cap \left[X \geq t\right]\right)}{P\left[X \geq t\right]} = \frac{P\left[X \geq t+h\right]}{P\left[X \geq t\right]}$$
$$= \frac{\bar{F}_X\left(t+h\right)}{\bar{F}_X\left(t\right)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = \bar{F}_X\left(h\right) = P\left[X \geq h\right]$$

où $\bar{F} = \bar{F}_X = 1 - F_X$. Réciproquement , si on suppose que $\forall t, h \geq 0 \ , \ P\left[X - t \geq h \mid X \geq t\right] = P\left[X \geq h\right]$ c'est-à-dire :

$$\forall t, h \geq 0 \ , \ P\left[X \geq t+h\right] = P\left[X \geq t\right] P\left[X \geq h\right],$$

alors la fonction de survie $\bar{F}$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$(**) \ \ \bar{F}\left(t+h\right) = \bar{F}\left(t\right)\bar{F}\left(h\right) \ \text{ pour tous } t, h \geq 0$$

En prenant logarithmes, on trouve que la fonction $f(x) = \log(\bar{F}(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$(**) \ \ f\left(t+h\right) = f\left(t\right) + f\left(h\right) \ \text{ pour tous } t, h \geq 0$$

On utilise maintenant le résultat :

Théorème 8.2. *Une fonction monotone f satisfaisant l'équation fonctionnelle*

$$(**) \quad f(t+h) = f(t) + f(h) \quad \textit{pour tous } t, h \geq 0$$

doit être linéaire, c.-à-d.

$$f(t) = tf(1)$$

Remarque 8.1. *Il suffit de supposer que la fonction f soit mesurable, mais alors le théorème est beaucoup plus difficile à démontrer.*

Démonstration : À partir de $(**)$, on obtient que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \ , \ f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left((f(1))^{\frac{1}{n}}\right)^m = (f(1))^{\frac{m}{n}}$$

Montrons que $f(1) \neq 0$: si $f(1) = 0$ alors d'après ce qui précède f est nulle sur $\mathbb{Q}^+$, or on sait que pour tout réel $x > 0$, il existe r dans $\mathbb{Q}^+$ tels que $r \leq x$, comme f est décroissante, on aura alors $0 \leq f(x) \leq f(r) = 0$ donc $f(x) = 0$ et $f = 0$, ce qui est faux. Par conséquent les fonctions f et $x \mapsto (f(1))^x = e^{x \ln f(1)}$ coïncident sur $\mathbb{Q}^+$, comme ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^+$, on peut alors affirmer que $\forall x \geq 0$, $f(x) = e^{x \ln f(1)}$ On sait que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 - \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 0$ donc $\ln f(1) < 0$ et on peut écrire que

$$\forall x \geq 0 \ , \ F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ avec } \lambda = -\ln f(1) > 0$$

et on en déduit que la loi de X est une loi exponentielle ■

Remarque 8.2. *La fonction*

$$\lambda(t) := \lim_{h \to 0} \frac{P[X \leq t+h \mid X \geq t]}{h} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = -\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)}$$

appelée «risque instantané» ou «taux de hasard/mort» offre encore une caractérisation importante d'une loi.

Exercice 8.2. *Montrez que la seule loi avec un taux de hasard constant $\lambda(t) = \lambda$ est la loi exponentielle.*

Exercice 8.3. *Montrez qu'à chaque fonction bornée $\lambda : \mathbb{R}_+ - > \mathbb{R}_+$ avec intégrale $\int_0^\infty \lambda(u)du = \infty$ on peut associer une loi de probabilité avec fonction de survie $\bar{F}(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$ et taux de hasard $\lambda(u)$.*

Remarque 8.3. *Le «taux de hasard/mort» immédiat $\lambda(0)$ coïncide pour une variable positive avec la densité $f(0)$*

$$\lambda(0) = \lim_{h \to 0} \frac{P[X < h | X \geq 0]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{P[X < h]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F_h}{h} = f(0)$$

La formule correcte au premier ordre pour h très petit

$$F_h \approx f(0)h$$

est souvent utilisée pour conditionner sur une arrivée en temps continu avant h. Pour une variable exponentielle X à paramètre λ par exemple, on utilise souvent

$$F_h \approx \lambda h,$$

au lieu de la formule exacte $F_h = 1 - e^{-\lambda h}$.

8.2 La loi de Poisson

Exercice 8.4. *Calculer la fonction génératrice des probabilités* $p_X(z) = \mathbb{E}z^X$ *d'une variable aléatoires réelle* X *de loi de Poisson de paramètres* $\lambda > 0$*. Calculer l'espérance et la variance.*

Exercice 8.5. *On considère deux variables aléatoires réelles* X *et* Y *indépendantes de loi de Poisson de paramètres* $\lambda > 0$ *et* $\mu > 0$ *respectivement.*

1. *Quelle est la loi de* $Z = X + Y$ *?* **Indication :** *On peut utiliser la fonction génératrice des probabilités* $p_X(z) = \mathbb{E}z^X$*, ou la fonction génératrice des moments* $m_X(s) = \mathbb{E}e^{sX} = p_X(e^s)$*.*
2. *Pout tout entier* $n \geq 0$*, déterminer la loi conditionnelle de* X *sachant que* $Z = X+Y = n$*.*
3. *Déterminer* $E(X \mid X + Y)$ *.*

Exercice 8.6. Invariance par rapport aux sommes indépendantes. *Trouver la loi d'une somme de* n *variables Poisson indépendantes de paramètre* $\lambda_i, i = 1, ..., n$*.*

Exercice 8.7. Coloriage : *Quelle est la loi de*

$$S = \sum_{i=1}^{X} B_i$$

où X *est une variable de loi de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$*, et* B_i *sont des variables aléatoires Bernoulli de paramètre* p *? Quelle est la loi* $\mathcal{L}(S/X)$ *?*

8.3 Processus ponctuelles, de comptage et de renouvellement en temps continu

Motivation : Beaucoup de phénomènes aléatoires demandent l' étude dec l'evolution au cours du temps des processus qui comptent le nombre $N_t, t \in \mathbb{R}_+$ des diverses "arrivées" : • appels arrivant dans un standard téléphonique • arrivées de clients à un guichet • survenue de pannes dans un parc de machines, ...

Définition 8.1. *Un processus* $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est appelé processus de comptage s'il prend des valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et s'il vérifie les trois propriétés suivantes :*

(i) $0 \leq s \leq t \Rightarrow N_s \leq N_t$
(ii) N_s *a des chemins "cadlag", c.-à-d. continues à droite et avec des limites à gauche*
(iii) $P[N_s - N_{s_-} > 1] = 0$

Il s'agit donc des processus non décroissants et qui n'augmentent jamais avec plus d'une unité. Soit $a_i, i = 1, 2, ...$ les temps entre deux arrivés consecutives.

Définition 8.2. *Un processus de comptage pour le quel les temps entre deux arrivés consecutives sont des variables aleatoires i.i.d. s'appelle processus de renouvellement. Les temps de renouvellement (ou les temps de la n-ieme arrivée) sont :*

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, n = 0, 1, 2, ...$$

Il est facile de voir que le nombre d'arrivées avant le temps t, c.-à-d. le processus

$$(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+} = \sup_k \{k : A_k \leq t\}$$

est un processus de comptage. Le processus de comptage N_t et le "processus de points" A_k sont intimêment liées. Nous regarderons plus en detail ce couple dans le cas des temps a_i à loi exponentielle entre les arrivées.

8.4 Le processus de Poisson unidimensionnel

Définition 8.3. Un processus de renouvellement avec des "interarrivées" exponentielles . *Soit $a_i, i = 1, 2, ...$ une suite des v.a. i.i.d., à loi exponentielle de paramètre λ, et soit $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ les temps de renouvellement. On appelera processus de Poisson unidimensionnel homogène (en partant de $N_0 = 0$) le processus qui compte le nombre d'arrivées pendant $[0, t]$:*

$$N_{[0,t]} = N_t = \max\{n \in \mathbb{N} : A_n \leq t\}$$

Remarque 8.4. *La loi de A_n est Gamma $\Gamma_{(n,\lambda)}$ de densité $\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\lambda$.*

Une autre définition équivalente du processus de Poisson unidimensionnel est :

Définition 8.4. *Un processus qui a des "acroissements/increments"*
a) independants et b) homogènes en temps (i.e. avec $\mathcal{L}(N_{t+s} - N_s) = \mathcal{L}(N_t), \forall s$), et
c) avec

$$p_k(t) := \mathbb{P}\{N_t = k\} = \mathbb{P}\{N_{t+s} - N_s = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \quad k = 0, 1, 2, ..., \forall t,$$

où $\lambda > 0$ est une constante[§] s'appelle processus de Poisson homogène.

Remarque 8.5. *Un processus X_t avec les deux premières propriét'es, c.-à-d. avec des acroissements independants et homogènes (PAIH), s'apelle processus de Lévy(c'est la généralisation naturelle des marches aléatoires quand on passe au temps continu). Le processus de Poisson est donc notre premier exemple de marche aléatoire au temps continu.*

Pour voir l'analogue du processus de Poisson en temps discret, considerer une marche qui bouge toujours à droite avec probabilité1.

Le processus de Poisson est aussi l'exemple le plus simple de processus de Markov. Pour completer son graphe de communication, il faut d'abord remplacer le temps de transition 1 par dt, et en suite vérifier que $P[N_{t+dt} = N_t + 1] = \lambda dt$ (dessiner le graphe). On reviendra a ce sujet après avoir étudié la théorie de processus de Markov en temps continu.

Remarque 8.6. *Le nombre espéré d'arrivées du processus de Poisson dans un intervalle de longueur t est : $E[N(s + t) - N(s)] = \lambda t$. λ est donc le "taux d'arrivées".*

Cette définition peut être généralisée au cas multidimensionnel – voir Définition 8.5.

Exercice 8.8. *Donner la probabilité $P[N(t_1) = 2, N(t_2) = 3, N(t_3) = 7$ pour un processus de Poisson de taux 1.*

Exercice 8.9. *Des clients arrivent dans une banque selon un processus de Poisson $N(t), t \in \mathbb{R}$, de paramètre $\lambda = 1.2$ (l'unité de temps est la minute).*

1. *Il arrive en moyenne combien de clients en 10 mn ?*
2. *Donnez la loi de probabilité de N(2), le nombre de clients qui arrivent en deux minutes, et esquisser le graphique de $p_k = P[N(2) = k]$, pour k=0,1,2,3,4,5.*
3. *Donnez la probabilité que personne n'arrive durant 2 mn, et après ça que 3 personnes arrivent dans les 4 mn suivantes.*
4. *Donnez la probabilité q_3 que 3 personnes arrivent en 4 mn, vérifiez que $q_3 = p_0p_3 + p_1p_2 + p_2p_1 + p_3p_0$, et expliquez pourquoi.*

§. cette hypothèse peut- être remplacée par le fait que N_t est le processus ce comptage d'un processus ponctuel homogène

Exercice 8.10. *Considèrons la loi du nombre d'accidents de voiture dans une ville, par jour. a. Est ce-que ce nombre d'accidents pourra suivir approximativement une loi de Poisson ? b. Trouver i. la probabilité qu'il y ait au plus trois accidents un jour donné. ii.le nombre moyen d'accidents (M) pour lequel la probabilité d'avoir trois accidents ou plus un jour donné est* < 0.05. *(On exprimera cette probabilité en fonction de l'inconnue M et on en déduira une équation qu'il faudra résoudre numériquement).*

Exercice 8.11. *Calculez les moments factorielles et les moments de la loi de Poisson, en utilisant la fonction génératrice des probabilités.*

L'idée de la démonstration de l'équivalence des deux définitions (8.4), (8.3) est presentée dans les exercices suivantes :

Exercice 8.12. *Soit* $(N_t)_{t\geq 0}$ *un processus défini par la Définition 8.3. Pour tout* $t > 0$*, la variable aléatoire* N_t *suit une loi de Poisson de paramètre* λt*, c.-à-d.*

$$p_k(t) = \mathbb{P}\{N_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Demo : Il est naturel d'aborder ce problème par récurrence. Les cas pour $k = 0, 1, 2$ sont simples. Pour $k \geq 2$, on a besoin de conditionner sur $A_k = x$, et donc de s'appuyer sur la densité Gamma $\Gamma(\lambda, k)$ de $A_k, k \geq 2$: $f_{A_k}(x)dx = \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} \lambda dx$. L'integral qui resulte est juste $\int_0^t x^{k-1} dx, \forall k$; finalement, le raisonnement par récurrence n'est pas nécessaire.

Exercice 8.13. *Soit* $(N_t)_{t\geq 0}$ *un processus défini par la Définition 8.4. a) Montrez que les variables aléatoires suivantes :* a_1*, qui réprésente le temps jusqu'à la première arrivée, et* a_2*, qui réprésente le temps entre les deux premières arrivées, sont indépendantes et exponentielles de paramètre* λ*. Outrement dit, pour tout* $t_1 > 0, t_2 > 0$*,*

$$\mathbb{P}\{a_1 > t_1, a_2 > t_2\} = e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda t_2}$$

b) Montrez que la loi du temps de la prochaine arrivée d'un processus de Poisson de paramètre λ *après temps* t *est exponentielle a paramètre* λ*.*

Exercice 8.14. *Demontrer l'identité*

$$f_{A_k}(t)dt = \mathbb{P}\{N_t = k - 1\}\lambda dt$$

(qui fournit une demonstration directe de l'equivalence entre processus de Poisson et arrivées Gamma).

Réponse: $f_{A_k}(t)dt = \mathbb{P}\{A_{k-1} \leq t, A_k \geq t, A_k \leq t + dt\} = \mathbb{P}\{A_{k-1} \leq t, A_k \geq t\}\lambda dt = \mathbb{P}\{N_t = k - 1\}\lambda dt$.

En conclusion, le processus de Poisson homogène unidimensionnel de taux λ est un processus de comptage, où "l'avancé du compteur" se fait après des temps exponentielles de paramètre λ, et qui a plusieurs propriétés remaquables, comme :

— loi exponentielle (donc "sans mémoire") de paramètre λ pour les intervales a_i entre les arrivées
— la propriété de Markov
— Le processsus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements stationnaires et indépendants (A.S.I. en abrégé), c'est-à-dire les variable aléatoire $N_{I_i}, i = 1, ..., n$ sont indépendantes, si les intervalles $I_i, i = 1, ..., n$ sont disjoints. En particulier,

$$\forall s, t \geq 0 \text{ avec } s \leq t \text{ , } N_t - N_s \text{ est indépendante de } N_u \text{ pour tout } u \leq s.$$

— $(N_t)_{t\geq 0}$ est homogène, c'est-à-dire les increments $N_{[s,s+t]} = N_{s+t} - N_s$ ont une loi indépendante du moment initial s :

$$\forall s,t > 0, \forall k \in \mathbb{N}\ ,\ P\left[N_{s+t} - N_s = k\right] = P\left[N_t = k\right] \overset{not.}{=} p_k\left(t\right).$$

— $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov, et les probabilités de transition satisfont $\mathbb{P}\{N_t = i+k|N_0 = i\} = p_k(t) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}, \mu = \lambda t$.

Exemple d'application du processus de Poisson : La pêche ! On note X_t le nombre de poissons pris par un pêcheur à la ligne dans l'intervalle de temps $[0,t]$. On fait les hypothèses suivantes : $(h1)$ il y a un très grand nombre de poissons, de façon à ce qu'une prise n'influe pas sur la suite de la pêche $(h2)$ l'appétit des poissons ne varie pas avec le temps. Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ peut alors être considéré comme un processus de Poisson, car : - $(X_t)_{t\geq 0}$ est bien un processus de comptage (il est assez clair qu'il est très peu probable de pêcher plusieurs poissons au même instant) - $(X_t)_{t\geq 0}$ est homogène d'après $(h2)$ - $(X_t)_{t\geq 0}$ est un P.A.I. d'après $(h1)$.

8.5 Le processus de Poisson comme limite des processus de Bernoulli

Remarque 8.7. *Pour $h \to 0$, la loi approximative de $N_\lambda(h)$ est une loi de Bernoulli de paramètre λh, i.e. $P[N_\lambda(h) = 1] \sim \lambda h + O(h^2), P[N_\lambda(h) = 0] \sim 1 - \lambda h + O(h^2), P[N_\lambda(h) \geq 2] \sim O(h^2)$.*

Cela suggère d'aborder l'étude du processus de Poisson unidimensionnel en discretisant le temps : on partagera chaque unité de temps en n unités "infinitesimales" de longueur $h = 1/n$, et en ignorant la possibilité des deux, troi, ... arrivés. Cela remplace le processus d'arrivées en temps continu par un processus de Bernoulli (lancés d'une monnaie) en temps discret. En suite, en laissant $n \to \infty \Leftrightarrow h \to 0$, on arrive au processus de Poisson. Le fait que le nombre (binomial) d'arrivées des succes dans un processus de Bernoulli en temps discret converge vers processus de Poisson en temps continu est une consequence de l'exercice suivant :

Exercice 8.15. *Considerez un processus d'arrivées independantes dans des unités de temps de longueur $h = 1/n$, avec la probabilite d'une arrive per unite de temps égale a λ.*

1. *Montrez que la limite quand $n \to \infty$ d'une loi binomiale $B(n,p)$ avec $p = \frac{\lambda}{n}$ est la loi de Poisson avec espérance λ, directement et aussi en utilisant la fonction génératrice des probabilités ou des moments.*
2. *Soit $K_n^{(i)} i = 1, 2, ...$ les nombres d'intervalles separant les arrivées consecutives. Montrez que les temps $t_n^{(i)} = \frac{K_n^{(i)}}{n}$ entre les arrivées consecutives convergent vers des loi s exponentielles de paramètre λ, pour $i = 1, 2$.*
3. *Considerez un processus d'arrivées independantes, avec la probabilité d'une arrive per unite de temps (ou "taux") égale a λ. Trouver la loi jointe des nombres d'arrives dans deux unitées de temps consecutives, en subdivisant chaque unitée en n periodes d'observation et en prenant $n \to \infty$.*

Théorème 8.3. *(admis) Le seul processus de renouvellement qui est aussi markovien est le processus de Poisson.*

8.6 Le processus de Poisson multidimensionel (*)

La forme speciale des probabilités de transition du processus de Poisson unidimensionnel (c.-à-d. indicé par $\mathbb{R}_+$) est une conséquence de la propriété de Markov, et des équations de Chapman Kolmogorov. Mais ce processus est aussi un processus de Lévy(c.-à-d. un processus avec des increments independants et stationnaires), avec des valeurs entières, et sans des points doubles. De manière surprenante, ces trois propriétés forcent les increments d'avoir la loi de Poisson, même dans le cas multidimensionel !

Définition 8.5. *Soit λ une constante. On appelle champs (où processus) de Poisson homogène d'intensité λ sur $\mathbb{R}^d$ un ensemble des variable aléatoire $N(A)$* **indexées par des sous-ensembles** *$A \subset \mathbb{R}^d$ tq :*

1. **indépendance :** *si les sous-ensembles $A_1, ..., A_k \subset \mathbb{R}^d$ sont disjoints, alors les variables $N(A_1), ..., N(A_k)$ sont indépendantes*
2. **stationarité :** *la loi des variables $N(A + t), t \in \mathbb{R}^d$ ne dépend pas de t*
3. *$N(A)$ est une variable Poisson d'intensité $c = \lambda\, m(A)$, où $m(A)$ est la mesure de Lebesgue.*

Remarque 8.8. *Un processus ayant les propriétés (1) et (2) s'appelle processus de Lévy.*

Remarque 8.9. *En fait, la troisième condition peut être remplacée par une condition beaucoup plus faible : $N(A) \in \mathbb{N}$, et la probabilité de plus d'un point dans des ensembles petits est négligeable, c.-à-d. $P[N(A) \geq 2] = o(P[N(A) = 1])$, quand $m(A) \to 0$.*

Pour $d = 1$, le cas du processus de Poisson uni-dimensionel, il suffit d'étudier les variables aleatoires indexées par les intervalles $A = [a, b]$, et on reserve le nom de processus de Poisson pour le processus $N(t), t \in \mathbb{R}_+$, défini par $N(t) := N([0, t])$. Les variables $N(A) = N(b) - N(a)$ sont appelées alors "incréments" du processus $N(t)$.

8.7 Exercices

1. Des voitures passent sur une route selon un processus de Poisson de param. $\lambda = 1/mn$. a. Si 5% des voitures sont des Renault, montrer que le passage de ces voitures suit un processus de Poisson de param. 0.05. b. Sachant que 10 Renault sont passées en une heure, quelle est l'espérance du nombre total de voitures passées durant cette heure ? c. Si 50 voitures sont passées en une heure, quelle est la probabilité que cinq d'entre elles soient des Renault ?
2. Il existe plusieurs objets d'interet associés à chaque processus de renouvellement :

   (a) l'âge courant $Z_1(t) = t - A_{N_t}$

   (b) le temps residuel courant $Z_2(t) = A_{N_t+1} - t$

   (c) le temps total courant $Z(t) = Z_1(t) + Z_2(t) = A_{N_t+1} - A_{N_t}$

   Soit $N_\lambda(t)$ un processus de renouvellement de Poisson. a) Quelle sont les probabilités $P[Z_1(t) = t]$, et $P[Z_1(t) \in [s, t], \forall s \leq \infty$? Trouver la densité de $Z_1(t)$. Concluez que l'âge courant satisfait :

$$F_{Z_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda} \text{ pour } x \leq t \text{ et} \\ F_{Z_1}(x) = 1 \text{ outrement} \end{cases}$$

b) Montrer que le temps residuel courant a une loi exponentielle de paramètre λ. c) Calculez l'espérance du temps total courant ; et comparez la à l'espérance des temps entre les arrivées λ.

3. Soient N_t un processus de Poisson homogène, et t_1 l'instant où se produit la première arrivée. a) Determiner la loi de t_1, conditionnellement sur $[N_t = 1]$ b) Determiner la loi de t_1, conditionnellement sur $[N_t = 2]$
4. Un scribe doit copier n pages d'un manuscrit. Comme il est fatigué, il comet un nombre total d'erreurs distribuées à loi de Poisson $Po(\lambda)$, qui peuvent se trouver sur n'importe quelle page, avec des probabilités égales. a) Quelle est la probabilité que la première page ne contient pas des erreurs ? b) Quelle est l'espérance du nombre des pages contenant des erreurs ?
5. (a) Quelle est la probabilité qu'un cercle de rayon r autour de l'origine ne contient aucun point d'un processus de Poisson deux-dimensionel de taux λ ? Autrement dit, calculez la fonction de "survie" ou de "loi complementaire" $\bar{F}_D(r) = \mathbb{P}\{D > r\}$, où D est la distance de l'origine jusqu'au point le plus proche d'un processus de Poisson deux-dimensionel.
   (b) Calculez la fonction de densité $f_D(r)$.
   (c) Calculez le mode de la fonction de densité.
   (d) Calculez par parties l'intégrale $\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$ et montrez que l'espérance est $\mathbb{E}D = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$ (l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \sqrt{\pi/2} = \int_0^\infty \int_{r^2/2}^\infty e^{-s} ds dr$ peut être calculé par le théorème de Fubini)
6. **Le temps jusqu'à la première "arrivée non-decouragée" et la dernière "arrivée decouragée"**. Soit N une variable géométrique, à loi $\mathbb{P}\{N = k\} = (1-p)p^{k-1}, k = 1, ...,$, soit $N_0 = N - 1$ la variable géométrique à loi $\mathbb{P}\{N = k\} = (1-p)p^k, k = 0, 1, ...,$ et soit $T_i, i = 1, 2, ...$ des variables aleatoires i.i.d. exponentielles à paramètre μ. Soit $T = \sum_{i=1}^N T_i$ le temps jusqu'à la première "arrivée non-decouragée", et soit $W = \sum_{i=1}^{N_0} T_i$ le temps jusqu'à la "dernière arrivée decouragée".
   (a) Trouvez la fonction génératrice des moments $m_{T_1}(s) = \mathbb{E}e^{sT_1}$ de T_1,
   (b) Trouvez les fonction génératrices des moments m_T de $T = \sum_{i=1}^N T_i$ et m_W de $W = \sum_{i=1}^{N_0} T_i$.
   (c) Quelle sont les loi s des variable aleatoires T, W ?
7. Qu-est-ce qu'on obtient en superposant n processus de Poisson à paramètres $\lambda_i, i = 1, ..., n$?
8. Montrez que la densité du temps de la n-ième arrivée dans un processus de Poisson a la densité
$$f_{T_n}(x)dx = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda dx$$
9. Soit $a_i, i = 1, 2, ...$ une suite des variable aléatoire i.i.d. positives ("interarrivées"), à loi exponentielle de paramètre λ, soit $A_n = A_{(n,\lambda)} = \sum_{i=1}^n a_i$, et soit
$$N_\lambda(t) = \max\{n \in \mathbb{N} : A_n \leq t\}$$
le processus de Poisson qui compte le nombre d'arrivées pendant $[0, t]$.

(a) Quelles sont la moyenne, la variance et le cumulant d'ordre k de $N_\lambda(t)$?

(b) Montrer que la loi de $A_n = A_{(n,\lambda)}$ a la densité Gamma $\Gamma_{(n,\lambda)}(t)$.

(c) Exprimer la probabilité $P[N_\lambda(t) \leq n$ comme une probabilité faisant intervenir la loi de Gamma.

(d) Calculer la moyenne de $A_{(\lceil \lambda x \rceil, \lambda)}$, ainsi que sa limite quand $\lambda \to \infty$.

(e) On peut montrer, par l'inégalité de Chebyshev, que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \begin{cases} P[N_\lambda(t) > \lambda x] = 0 & \text{si } x > t \\ P[N_\lambda(t) < \lambda x] = 0 & \text{si } x < t \end{cases}$$

Qu'est qu'on peut conclure sur la limite

$$\lim_{\lambda\to\infty} P[A_{(\lceil \lambda x \rceil, \lambda)} \geq t]?$$

(f) Donnez un argument direct (sans s'appuyer sur la loi de Poisson) pour calculer la limite

$$\lim_{\lambda\to\infty} P[\Gamma_{(\lambda x, \lambda)} \geq t].$$

10. Soit X_t un processus de Poisson de taux λ, les point du quel sont coloriés en K couleurs, independamment avec des probabilités $p_1, ..., p_K$, donnant naissance ainsi à K processus de comptage $X_1(t), ..., X_K(t)$. Montrez que $X_1(t), ..., X_K(t)$ sont des processus de Poisson independants, avec taux $\lambda p_1, ..., \lambda p_K$.

11. Une banque a deux caissières. Trois personnes (A,B, et C) entrent en même temps ; A et B vont directement aux deux caissières libres et C attend. Quelle est la probabilité que A soit toujours dans la banque quand les deux autres sont partis, dans les trois cas suivants :

    (a) Les "temps de service" sont exactement 2 mn pour les deux caissières.

    (b) Pour les deux caissières, ce temps est 1,2, ou 3 mn, avec probabilités 1/3 pour chaque cas.

    (c) Les "temps de service" sont exponentielles a paramètres c_1, c_2.

Solutions :

1.
2.
3.
4. a) Les nombres des erreurs N_i sur chaque page i sont des variable de Poisson "coloriée" avec probabilité $1/n$, et donc N_i sont des variables de Poisson de taux λ/n (independantes). La probabilité que $N_i \geq 1$ est $1 - e^{-\lambda/n}$. b) En décomposant la variable N comme somme des indicatrices, l'espérance de $N = \sum_{i=1}^n N_i$ est $n(1 - e^{-\lambda/n})$ (en fait, N a une loi binomiale, car N_i sont independants, par le théorème de coloriage des variables Poisson).
5. a) $\bar{F}(r) = e^{-\lambda\pi r^2}$ b) $f_D(r) = 2\lambda\pi r e^{-\lambda\pi r^2}$. c)Le mode de la densité satisfait $(1 - 2\lambda\pi r^2)e^{-\lambda r^2} = 0$, donc $r = \frac{1}{\sqrt{2\lambda\pi}}$. d) $ED = 2\lambda \int_0^\infty r^2 e^{-\lambda\pi r^2}$ En posant $\lambda\pi = \frac{1}{2\sigma^2} \Leftrightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\lambda\pi}}$, on s'aperçoit que notre intégrale est de la forme

$$\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma^3}{2}$$

car elle represente une demi de la variance de la loi Gaussienne. (On peut aussi retrouver ce resultat en utilisant l'integration par parties, et en calculant l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \sqrt{\pi/2} = \int_0^\infty \int_{r^2/2}^\infty e^{-s} ds dr$ par le théorème de Fubini.) On trouve finalement que l'espérance est

$$\mathbb{E}D = 2\lambda \frac{\sqrt{2\pi}}{4\lambda\sqrt{2\lambda\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$$

6. (a) $m_{T_1}(s) = \frac{\mu}{\mu-s} = \frac{1}{1-s/\mu}$
   (b) $m_T(s) = \sum_{n=1}^\infty (1-p)p^{n-1}(\frac{\mu}{\mu-s})^n = (1-p)\frac{\mu}{\mu-s}\frac{1}{1-p\frac{\mu}{\mu-s}} = \frac{(1-p)\mu}{(1-p)\mu-s}$
   (c) T est donc une variable aléatoire exponentielle à paramètre $(1-p)\mu$, qui est précisement le taux des points "acceptés" du processus de Poisson "aminci" des arrivées non-decouragées.
7. Il s'agît d'un processus de comptage à inter-arrivées exponentielles, donc d'un processus de Poisson, a paramètre $\lambda = \sum_i \lambda_i$.
8.
9. (a) $\mathcal{K}_k(N_\lambda(t)) = \lambda t$.
   (b) $P[N_\lambda(t) \leq n] = P[A_{n+1} > t]$.
   (c) $\mathrm{E}[\mathrm{A}_{(\lceil\lambda \mathrm{x}\rceil,\lambda)}] = \frac{\lceil\lambda\mathrm{x}\rceil}{\lambda} \to \mathrm{x}$
   (d) $\lim_{\lambda\to\infty} P[A_{(\lceil\lambda x\rceil,\lambda)} \geq t] = \mathbb{1}_{[0,x]}(t)$

Chapitre 9

Les processus markoviens de saut, en temps co

Les chaînes de Markov constituent un objet mathématique versatile, mais leur puissance de modélisation atteint son vrai potentiel seulement si on permet aux temps de transition d'un état à l'autre d'etre des variable aléatoire (plutôt que prendre toujours la valeur 1. On arrive ainsi à la modélisation en temps continu.

9.1 La proprietè de Markov

Définition 9.1. ***-Proprietè de Markov*** *Un processus* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *en temps continu et a éspace d'états* $\mathcal{E}$ *a la proprietè de Markov si, et seulement si ses probabilités conditionnelles ne depend pas du passé que par le passé imediat, c.-à-d.* $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t$, $t_i \in \mathbb{R}, et \forall e_{i_0}, e_{i_1}, ..., e_{i_k}, e_i \in \mathcal{E}$

$$P\left([X_t = e_i] \mid [X_{t_0} = e_{i_0}, ..., X_{t_k} = e_{i_k}]\right) = P\left([X_t = e_i] \mid [X_{t_k} = e_{i_k}]\right)$$

Un processus ayant la proprietè de Markov s'appelle processus de Markov.

Interprétation de la propriété de Markov : si on considère que le processus est indicé par le temps, cette propriété traduit le fait que le présent ne dépend du passé qu'à travers le passé immédiat.

Remarque 9.1. *Un processus de sauts avec des temps de sauts nonexponentiels n'a pas la propriété de Markov.*

Définition 9.2. ***Matrices de transition*** *Pour tous* $0 \leq s \leq t$*, pour tous* i, j *dans* I*, et pour chaque processus de Markov, on définit les probabilités de transition par :*

$$p_{ij}(s, t) = P\left([X_t = e_j] \mid [X_s = e_i]\right).$$

Définition 9.3. ***Homogeneité des transitions*** *Un processus est dit homogène si, et seulement si :*

$$\forall\, i, j \in I \;,\; \forall\, 0 \leq s \leq t \;,\; p_{ij}(s, t) = p_{ij}(0, t - s).$$

On note alors $p_{ij}(s, t) = p_{ij}(t - s)$*, et la matrice* $p_{ij}(t)$ *est appelée matrice de transition après temps* t*.*

Hypothèse de travail : $\boxed{(H1)\ \textbf{On ne considérera ici que des processus homogènes.}}$ Un processus de Markov homogène est uniquement specifié par ses des probabilités de transition après temps t. Pour tout $t \geq 0$, on note par

$$P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in I}$$

la **matrice des probabilités de transition après temps** t.

Remarque 9.2. *$\forall t \geq 0$, $P(t)$ est une matrice stochastique (c.-à-d. $\forall i, j \in I$, $p_{ij}(t) \geq 0$ et $\forall i \in I$, $\sum_{j \in I} p_{ij}(t) = 1$).*

9.2 Les semigroupes de Markov homogènes

En temps discret, a cause de l'équation de Chapman-Kolmogorov, les matrice des probabilités de transition après temps n avait une structure de semigroup P^n, qui était engendré par la matrice P de transition après temps 1. On retrouve la même structure dans le cas continu :

Théorème 9.1. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus Markovien homogène, à temps continu $t \in \mathbb{R}_+$. Alors, les operateurs de transition $(P(t))_{t\geq 0}$ forment un* <u>*semi-groupe stochastique*</u>*, c'est-à-dire :*

1. *$P(0) = I_d$*
2. *$\forall s, t \geq 0$,*

$$P(t+s) = P(t)P(s)$$

(équations de Chapman-Kolmogorov)

Définition 9.4. *Une famille des operateurs satisfaisant les propriétés (1) et (2) du théorème 9.2 est appelée* **semi-groupe**.

Rappelons que dans les semigroupes discrètes de matrices stochastiques indicé par $t \in \mathbb{N}$ sont engendrés par $P(1)$ (par la formule $P(n) = [P(1)]^n$).

9.3 La dérivée du semi-groupe en 0 (matrice de taux) engendre le semi-groupe

Pour les processus de Markov en temps continu, il n'existe plus un "temps minimal" d'observation (comme le $t = 1$ du cas discrète) ; il est donc moins evident comment générer le semi-groupe des matrices de transition.

Question 1. *Est il possible de caractériser un processus de Markov en temps continu, comme par exemple le processus de Poisson, par une seule matrice ?*

Réponse: Comme le temps $t = 1$ ne peut plus suffire, il est naturel de tourner vers les "taux infinitesimales" caractérisant les transitions après des intervalles très petites avec durée $h \to 0$. Il se trouve que les semigroupes de matrices stochastiques en temps continu sont aussi engendrés par une seule matrice. Comme les propriétés (1) et (2) du théorème 9.1 sont celles d'une fonction exponentielle, on peut s'attendre par analogie avec le cas scalaire que la réprésentation desirée sera de la forme

$$P(t) = e^{tG}, \tag{9.1}$$

où $G = P'(t)_{t=0}$.

La matrice G, appelée **générateur** sera donc construite à partir des matrices de transition infinitesimale P_h, avec $h \to 0$.

Définition 9.5. *On appelle* <u>*générateur*</u> *d'un semigroupe de Markov sur un espace d'états fini où denombrable la matrice G donnée par :*

$$G = lim_{t \to 0^+} \frac{P(t) - I_d}{t} = P'(0) \quad \Leftrightarrow \quad P(t) \approx I + tG, \ pour\ t \to 0_+ \tag{9.2}$$

(dérivée de $t \mapsto P(t)$ en 0)[§] .

Plus précisement, la matrice G de "taux de transition" infinitesimales, ou "générateur", en partant d'un état initial arbitraire $X_0 = i$, est définie par :

$$\begin{cases} g_{ij} & = \lim_{t \to 0^+} \frac{P_{ij}(t)}{t} \quad \text{quand } i \neq j \\ -g_{ii} & = \lim_{t \to 0^+} \frac{1-P_{ii}(t)}{t} \quad \text{quand } i = j \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{ij}(t) = g_{ij}t + o(t) \text{ quand } i \neq j \\ p_{ii}(t) = 1 + g_{ii}t + o(t) \end{cases}$$

Remarque 9.3. *On vérifie facilement que* $G\mathbf{1} = \mathbf{0}$, *(ou $g_{i,i} = -\sum_{j \neq i} g_{i,j}$) ssi $e^{tG}\mathbf{1} = \mathbf{1}$ (en utilisant le developpement $e^{tG} = I + tG + \frac{t^2}{2}G^2 + ...$*

Ainsi, pour $j \neq i$ alors $g_{ij} = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{p_{ij}(t)}{t} \geq 0$ est le **taux de passage** de l'état e_i à l'état e_j, et on a $g_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$. Pour $j = i$, $-g_{ii} = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{1 - p_{ii}(t)}{t} \geq 0$ est le **taux de sortie** de l'état e_i, pour $t \to 0$.

Définition 9.6. *a) Une matrice G satisfaisant $g_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$ est appelée essentiellement nonnegative. b) Une matrice G essentiellement nonnegative satisfaisant*

$$g_{i,i} = -\sum_{j \neq i} g_{i,j} = 0, \forall i$$

sera appelée **matrice de taux**. *c) Une matrice G essentiellement nonnegative et satisfaisant*

$$\sum_j g_{i,j} \leq 0$$

sera appelée **sous-génératrice**.

Remarque 9.4. *En utilisant les equations différentielles du théorème 9.2, on peut verifier que les elements de e^{tG} sont nonnegatives ssi G est une matrice essentiellement nonnegative.*

Remarque 9.5. *Chaque matrice de taux G sur un espace d'états fini défini un processus de Markov de sauts X_t (qui choisi son prochaine état $j \neq i$ à partir de $X_t = i$ avec probabilités proportionelles à $g_{i,j}, j \neq i$, après un temps exponentiel de paramètre $\lambda_i = \sum_{j \neq i} g_{i,j}$), avec semigroupe e^{tG}.*

Exercice 9.1. *a) Pour une matrice (sous)stochastique arbitraire, la matrice $G = P - I$ est une matrice (sous) génératrice. b) La matrice $G = P - I$ a les mêmes vecteurs propres comme P, et ses valeurs propres sont translatées par -1.*

Remarque 9.6. *Les résultats de la théorie des chaînes de Markov en temps discret (comme les systèmes de Dirichlet –voir ci dessous) peuvent être formulées également en termes de P ou de G Mais, l'avantage de la dernière formulation et qu'elle unifie les cas continu et discret.*

---

§. Nous supposerons toujours la continuité du semigroupe en 0 :

$$\lim_{t \to 0^+} P(t) \to I_d \tag{9.3}$$

ou I_d denote l'identité, dans quel cas le semi-groupe $(P(t))_{t \geq 0}$ est dit standard.

9.4 Ou sautera la sauterelle ?

Pour comprendre les deplacements d'un processus des sauts en temps continu, (par exemple pour simuler le processus), il est nécessaire de repondre a deux questions :

1. Ou on va ?
2. Quand on va ?

La prémière question ramène à l'étude de la **chaine sous-jacente/discretisée** $\widehat{X}_n$ obtenue en regardant seulement où est le processus après les moments des transitions $A_i, i = 1, 2, ...$ Ce processus est evidemment une chaîne de Markov (et il peut etre markovien, même quand le processus initial ne l'est pas).

Exercice 9.2. *Soit*

$$X_t = N_{1,\lambda}(t) - N_{2,\mu}(t)$$

une marche aléatoire qui saute en haut/bas with taux λ/μ*. Soit* A *le moment du premier saut. a) Quelle est la probabilité que* $X_{A_+} - X_A = 1$ *? b) Quelle est la probabilité* $P[A \geq t | X_{A_+} - X_A = 1]$ *?*

Réponse: a) Supposons que $X_0 = 0$, et que, plus generalement, n types de saut sont possibles, c.-à-d.

$$X_t = \sum_{i=1}^{n} s_i N_{i,\lambda_i}(t)$$

Soit $\{a_i, i = 1, ..., n\}$ des temps exponentielles independantes à paramètres $\lambda_i, i = 1, ..., n$, correspondant à la première arrivée du processus de sauts de type i. Alors la variable $a = \min\{a_i, i = 1, ..., n\}$ a une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \sum_i \lambda_i$, et la loi de la variable I qui donne le type qui realise le minimum prend la valeur j a.p.

$$\lambda_j / \sum \lambda_k. \tag{9.4}$$

Pour la file M/M/1, la chaîne discretisée a aussi une structure très simple :

Exercice 9.3. *Montrez que pour la file M/M/1 : a)* $\mathbb{P}\{\widetilde{X}_{n+1} = j | \widetilde{X}_n = i\}$, *quand* $i \geq 1$ *est donné par* $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ *et* $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ *si* $j = i \pm 1$ *et par* 0 *outrement, et* $\mathbb{P}\{\widetilde{X}_{n+1} = j | \widetilde{X}_n = 0\}$ *est* 1 *si* $j = 1$ *et* 0 *outrement (plus tard nous allons généraliser cet exercice et donner une formule (9.5) pour la chaîne discretisé d'un processus des sauts en temps continu arbitraire. b) Le temps d'attente entre les transitions est exponentiel à paramètre* $\lambda + \mu$ *conditionnellement sur* $\widetilde{X}_n = i$ *quand* $i \geq 1$*, est exponentiel à paramètre* λ *conditionnellement sur* $\widetilde{X}_n = 0$*.*

En conclusion, la "chaîne discretisé" de la file M/M/1 a comme matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \\ \frac{\mu}{\mu+\lambda} & 0 & \frac{\lambda}{\mu+\lambda} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{\mu}{\mu+\lambda} & 0 & \frac{\lambda}{\mu+\lambda} & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

ce qui vérifie la formule generale (9.5) ci-dessus.

Exercice 9.4. *a) Soit X_t un processus des sauts a trois états. Les taux de transition à partir de 1 sont $\lambda_i, i = 2, 3$, à partir de 2 elles sont $\mu_i, i = 1, 3$, et à partir de 3 elles sont $\nu_i, i = 1, 2$, Montrez que :*

$$\mathbb{P}\{\widetilde{X}_{n+1} = j | \widetilde{X}_n = i\} = \begin{cases} \frac{\lambda_j}{\sum_k \lambda_k}, & si\ i = 1, \\ \frac{\mu_j}{\sum_k \mu_k}, & si\ i = 2, \\ \frac{\nu_j}{\sum_k \nu_k}, & si\ i = 3 \end{cases}$$

b) Plus generalement, montrer que pour des processus de sauts Markoviennes en temps continu arbitraires, la chaîne discretisée prend la valeur j a.p.

$$g_{i,j} / \sum_{j \neq i} g_{i,j}. \tag{9.5}$$

9.5 Le calcul de l'exponentielle des semigroupes par les équations de Chapman-Kolmogorov

Une troisième méthode de calcul de l'exponentielle exploite la presence de la variable t, et des équations différentielles ci-dessous. Cela nous permet par exemple de calculer e^{tG} numériquement, en augmentant t à partir de $t = 0$ (cette mt́hode peut servir aussi pour calculer e^A pour une matrice constante A, en calculant d'abord e^{tA} et en posant en suite $t = 1$).

Théorème 9.2. *Pour tout $t \geq 0$, le semigroupe des matrices de transition $P(t)$ satisfait*

1. $$\begin{cases} P(t)' = P(t)\, G \text{ (équation Kolmogorov avant)} \\ P(t)' = G\, P(t) \text{ (équation Kolmogorov arrière ou rétrograde)} \end{cases}$$

   où G est le générateur, et $P(0) = I$. Chaqu'une de ces deux équations est équivalente à

   $$P(t) = e^{tG}.$$

2. *La transformée de Laplace $P^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} P(t) dt$ satisfait*

   $$sP^*(s) - I_d = GP^*(s) = P^*(s)G \Leftrightarrow P^*(s) = (sI_d - G)^{-1},\ \forall s > 0.$$

   La dernière formule est appellé **résolvante** *de G, dans la théorie des operateurs.*

Démonstration:

$$P'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = P(t) \lim_{h \to 0} \frac{P(h) - I}{h} = P(t)G$$

Remarque 9.7. *Il y a deux cas qui nous interessent : celui des semigroupes stochastiques, satisfaisant $P_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$, et celui des semigroupes sous-stochastiques, satisfaisant $P_t \mathbf{1} < \mathbf{1}$ (avec G matrice sous-génératrice). Le résultat de la partie 2) est aussi vrai en $s = 0$ dans le deuxieme cas (et ne peut pas être vrai en $s = 0$ dans le cas contraire). Cela sera utile pour calculer la loi et les moments de temps d'atteinte τ.*

Remarque 9.8. *1. Les équations de Kolmogorov, formulées ci-dessus dans le cas le plus simple de processus de sauts (c.-à-d. avec des espaces détats E finis ou dénombrables, dans quel cas $P(t), G$ sont des matrices), sont valables dans un sens appoprié pour tous les processus de Markov (par exemple pour les processus de Lévy, qui sont parmi les outils de modélisation les plus utiles).*

2. *Dans le cas dénombrable, il faudra ajouter des conditions qui assurent que les sommes, intégrales, etc., soient bien définis. Une telle condition est $\sup_{i \in I}(-G_{ii}) < +\infty$.*
3. *Comme les matrices $P(t) = e^{tG}$ doivent être stochastiques pour chaque t, il découle que la partie réele des valeurs propres de G doit être nonpositive.*
4. *Pour le cas des espaces d'états finies, les equations différentielles de Kolmogorov pour $P(t)$ calculent la fonction exponentielle matrice e^{tG}, et donc admettent toujours des solutions explicites en fonction des valeurs/vecteurs propres de G. En plus, la fonction exponentielle de matrice est mise en oeuvre numeriquement dans toutes les logicielles modernes. Par contre, pour les espace d'états dénombrables, le calcul explicit de $P(t)$ devient difficile, même pour le cas le plus simple de la file $M/M/1$[1]. Ils restent toujours les approches numériques, et il y en a beaucoup, comme pour temoigner sur la difficulté du problème.*
5. *Pendant que le calcul du semigroupe suppose la connaissance du spectrum, celui de la résolvante ne le demande pas. Par conséquant, une méthode possible pour le calcul du semigroupe est de comencer par la résolvante, et ensuite l'inverser numériquement (ou analytiquement parfois, par exemple en utilisant la décomposition en fractions simples, dans le cas rationnel).*

9.6 Résolution des èquations Chapman-Kolmogorov pour le processus de Markov à deux états

Exercice 9.5. *Montrer, en utilisant* (9.1)*, et aussi en utilisant la résolvante, que la probabilité de se retrouver au point de départ au temps t pour le processus avec $G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est $\frac{1+e^{-2t}}{2}$.*

Réponse: Pour la matrice $G = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$, les valeurs propres sont $0, -\alpha-\beta$ et les v.propres a droite sont $V = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{\beta} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La résolvante est

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta+s}{s^2+\alpha s+\beta s} & \frac{\alpha}{s^2+\alpha s+\beta s} \\ \frac{\beta}{s^2+\alpha s+\beta s} & \frac{\alpha+s}{s^2+\alpha s+\beta s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+s}{s^2+2s} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{2s} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

On suppose que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $E = \{e_1, e_2\}$, de générateur $G = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \geq 0$. La chaîne étant simple, on peut résoudre des équations de Kolmogorov en diagonalisant G. Le polynôme caractéristique P_G de G est donné par : $P_G(\lambda) = \det(G - \lambda I_2) = \lambda(\alpha+\beta+\lambda)$. $\to$ <u>1^{er} cas</u> : $\alpha = \beta = 0$ On a $G = 0$ donc $e^{tG} = I_2$ pour tout $t \geq 0$. $\to$ <u>2-ième cas</u> : $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ La matrice G admet 2 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable. Les valeurs propres sont 0 (avec $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Dans ce cas, la transformé de Laplace de $P(t)$ est explicite, et on peut l'inverser, en arrivant a des combinaisons des fonctions Bessel.

comme vecteur propre associé) et $-(\alpha+\beta)$ (avec $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$ pour vecteur propre associé). En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$G = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

En utilisant $e^{tD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}$ on trouve :

$$P_t = e^{tG} = Pe^{tD}P^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha - \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} \\ \beta - \beta e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha + \beta e^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}$$

(on peut remarquer que P_t est bien une matrice stochastique). En posant $\lambda = -(\alpha+\beta)$ on arrive à :

$$P_t = e^{tG} = I + \frac{e^{t\lambda} - 1}{\lambda} G \tag{9.6}$$

9.7 La compétition des exponentielles

Exercice 9.6. la dernière ampoule a s'éteindre, ou le coureur et la tortue. *Soit* $\{X_i, i = 1, 2\}$, *deux variables exponentielles indépendantes à paramètres* $\lambda_i, i = 1, 2$, *qui représentent les temps nécessaires pour deux ampoules à s' éteindre, ou le temps des deux compétiteurs pour finir un parcours. Par exemple,* $\lambda_2 = .01$ *(la tortue), et* $\lambda_1 = .99$ *(le coureur).*

1. *Calculer les fonctions de répartition et survie de* $V = \max[X_1, X_2]$. **Réponse:** $P[V \leq t] = P[X_1 \leq t, X_2 \leq t] = (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t}) = 1 - e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$ $P[V > t] = e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$ *Rémarquez qu'il s'agit d'une combinaison d'exponentielles* $P[V > t] = \sum_i w_i e^{-s_i t}$, *avec* , $\sum_i w_i = 1$, *mais* w_i *pas forcement positifs.*
2. *la loi du minimum* $U = \min[X_1, X_2]$.
   Réponse: $P[U > x] = P[\min[X_1, X_2] > x] = P[X_1 > x, X_2 > x] = e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}$ *Cet exercice est très simple en utilisant directement l'indépendance (sans passer par la densité conjointe, conditionnement ...) ! Pour comparaison, utilisons aussi une approche de décomposition en deux cas, calculables comme intégrales doubles :* $P[U > x] = P[x < X_1 < X_2] + P[x < X_2 \leq X_1] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}$ *(cette approche peut également être vue comme un conditionnement sur l'ordre des* X_i*).*
3. *Soit* I *la variable aléatoire définie par* $U = X_I$. *Calculer*

   $$P[I = 2, U > t],$$

   ainsi que la loi de la variable I *donnant l'index qui réalise le minimum.*
   Réponse:

   $$P[I = 2, U > t] = P[t \leq Y \leq X] = \int_t^\infty f_2(y) dy (\int_y^\infty f_1[x] dx)$$
   $$= \int_t^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} e^{-\lambda_1 y} dy = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} = P[U > t]\ P[I = 2 | U > t]$$

Comme $P[I=2|U>t]$ ne dépend pas de t, il suit que U, I sont des variables indépendantes [§] *! La généralisation de ce fait pour une compétition des n exponentielles est la fondation de la construction des processus de Markov en temps continu.*

4. *Soit $W = V - U$. Calculer $P[W > t|I = 1]$ et $P[W > t|I = 2]$*
5. *Calculer la fonction de survie $P[W > t]$ de W.*
6. *Montrer que U et W sont indépendantes.*
7. *calculer la transformée de Laplace $\phi_V(s) = E[e^{-sV}]$ de V, et la décomposer comme produit des transformées de Laplace de deux lois. À partir de cette décomposition, suggérer une décomposition de V comme somme des deux variables independantes, avec des lois marginales qu'on identifiera.*
8. *Trouver la loi du minimum de n variables exponentielles indépendantes $\{X_i, i = 1, ..., n\}$, à paramètres $\lambda_i, i = 1, ..., n$, ainsi que la loi de la variable I qui donne l'index qui réalise le minimum.*
9. *Obtenez la transformée de Laplace et la densité du maximum V_n de n variables exponentielles indépendantes, avec paramètres égaux λ.*
   Réponse: *Comme $V_n = W_0 + W_1 + W_2 + W_{n-1}$, où W_i sont des variable aléatoire indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda(n-i))$, $Ee^{-sV_n} = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{s+\lambda_i}$.*
   $F_{V_n}(x) = (1-e^{-\lambda x})^n \Longrightarrow f_{V_n}(x) = ne^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}$.

Exercice 9.7. *Donner la matrice de transition G pour un processus de Markov modelisant la "competition de n exponentielles/dernière ampoule à s'éteindre" décrite dans l'exercice 9.6. Soit T le temps quand la dernière ampoule s'éteint. a) Calculez directement $F_T(t)$, dans le cas des taux différents. b) En utilisant un logiciel symbolique, comparer avec le resultat donné par e^{tG}, dans le cas des taux identiques . c) Calculez aussi la fonction de répartition du temps T_1 jusqu'au moment quand il reste une seule ampoule, dans le cas des taux identiques (*). d) Expliquer pourquoi le cas des taux différents demande un processus de Markov avec espérance de dimension 2^n.*

Réponse: c) $F_{T_1}(t) = (1-e^{-t})^n + ne^{-t}\left(1-e^{-t}\right)^{n-1} = \left(1-e^{-t}\right)^{n-1}\left(e^{-t}(n-1)+1\right)$

9.8 L' espérance du temps de retour

Exercice 9.8. *Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ une chaîne de Markov en temps continu sur l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$. Supposons que la matrice infinitésimale (de taux de transitions) de X est donnée par*

$$G = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. *Donnez la formule exacte, ainsi q'une approximation des probabilités de transition infinitésimales $\mathbb{P}_i\{X_{dt} = j\}$ de la chaîne.*
2. *Donnez une* **approximation** *pour les probabilités de transition de la chaîne discrétisée associée au temps .1 ?*
3. *Quelles sont les probabilités de transition de la chaîne incluse associée aux temps de saut ?*
4. *Trouvez la distribution stationnaire de ce processus.*
5. *Quelle est la loi conditionelle de $T^{(3)} = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 3\}$, en sachant que $X_0 = 3$?*
6. *Soit $T(3) = \inf\{t \geq 0 : X_t = 3\}$. Donnez un système des équations pour $t_1 = \mathrm{E}[\mathrm{T}(3)|\mathrm{X}_0 = 1]$ et $t_2 = \mathrm{E}[\mathrm{T}(3)|\mathrm{X}_0 = 2]$. Résolvez les équations.*

§. Cela est tout à fait surprenant (a priori, les chances de gagner sont .99 et .01 ; supposons que le temps de la course est très petit $U \sim 1/4$; paradoxalement, ça ne change en rien la proba que le coureur a gagné !).

7. *Calculez l' espérance du temps de retour* $\mathrm{E}[\widetilde{\mathrm{T}}(3)|\mathrm{X}_0 = 3]$, *où* $\widetilde{T}(3) = \inf\{t > T^{(3)} : X_t = 3\}$.
8. *Calculez, pour le processus absorbé en* 3*, la fonction de survie matricielle de* $T(3)$

$$P_{i,j}(t) = \mathbb{P}[t \le T(3), X(t) = j | X_0 = i], i = 1, 2.$$

9. *Calculez la fonction de survie* $\bar{P}_1(t) = \mathbb{P}[T(3) \ge t | X_0 = 1]$ *et* $\bar{P}_2(t) = \mathbb{P}[T(3) \ge t | X_0 = 2]$ *à partir des équations de Chapman-Kolmogorov et aussi à partir de la réponse précedente et vérifiez que les réponses coincident. Vérifiez que* $t_i = \int_0^\infty \bar{P}_i(t)dt, i = 1, 2$.

Réponse:

1. Les probabilités de transition infinitésimales

$$P(dt) = e^{dt\,G} \approx I + dt\,G = \begin{pmatrix} 1-7dt & dt & 6dt \\ 2dt & 1-6dt & 4dt \\ dt & 2dt & 1-3dt \end{pmatrix}$$

2.

$$P(.1) \approx \begin{pmatrix} .3 & .1 & .6 \\ .2 & .4 & .4 \\ .1 & .2 & .7 \end{pmatrix}$$

3. Les probabilités de transition au moment du premier saut sont :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/7 & 6/7 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $\pi = (\frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{8}{13})$
5. La loi conditionelle de $T^{(3)} = \inf\{t \ge 0 : X_t \ne 3\}$, en sachant que $X_0 = 3$, est la loi exponentielle à paramètre 3 (et moyenne 1/3).
6. En conditionnant sur le premier saut, nous trouvons :

$$t_1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}t_2$$
$$t_2 = \frac{1}{3}t_1 + \frac{1}{6}$$

   donc le même système. De lors, $t_1 = \frac{7}{40}, t_2 = \frac{9}{40}$.

7. Conditionnant au moment du premier saut

$$\mathrm{E}[\widetilde{\mathrm{T}}(3)|\mathrm{X}_0 = 3] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{t}_1 + \frac{2}{3}\mathrm{t}_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{7}{40} + \frac{2}{3}\frac{9}{40} = \frac{1}{3}(1 + \frac{7+18}{40}) = \frac{1}{3}\frac{13}{8} = \frac{13}{24}$$

8. Soit

$$\widetilde{G} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le générateur du processus absorbé en 3, et soit

$$\tilde{\tilde{G}} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

le générateur du processus observé seulement en $1, 2$. Diagonalisons $\tilde{\tilde{G}} = L^{-1} Diag(\lambda_i) L$, où les lignes de la matrice L sont les vecteurs propres à gauche. Ici, les valeurs propres, données par $\lambda^2 + 13\lambda + 40 = (\lambda + 8)(\lambda + 5) = 0$ sont -8 et -5 avec vecteurs propres $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Finalement,

$$\tilde{\tilde{P}}(t) = L^{-1} Diag(e^{\lambda_i t}) L$$

9. Les probabilités demandées satisfont $\bar{P}_I(t) = 1 - P_{i,3}(t), i = 1, 3$, où $P_{i,3}(t)$ sont les probabilités de transition du processus absorbé avec générateur

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A. Par la question precedente, :

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} = L^{-1} Diag(e^{\lambda_i t}) L\mathbf{1},$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-8t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-8\,t} \\ 2e^{-5\,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2e^{-5t}/3 + e^{-8\,t}/3 \\ 4e^{-5t}/3 - e^{-8\,t}/3 \end{pmatrix}$$

et $t_1 = \frac{2}{3}\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\frac{1}{8} = \frac{7}{40}, t_2 = \frac{9}{40}$.

B. Posons $p_I(t) = \bar{P}_{i,3}(t) = 1 - P_{i,3}(t)$ pour les probabilités de non-absorption dans la colonne fixe 3. On a $p_1(0) = p_2(0) = 1$ Comme $P_{3,3}(t) = 1$, l'équation Chapman-Kolmogorov $P' = GP$ donne pour la troisième colonne :

$$\begin{aligned} (1 - p_1(t))' &= -7(1 - p_1(t)) + (1 - p_2(t)) + 6 \\ (1 - p_2(t))' &= 2(1 - p_1(t)) + -6(1 - p_2(t)) + 4 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} p_1(t)' &= -7p_1(t) + p_2(t), p_1(0) = 1 \\ p_2(t)' &= 2p_1(t) - 6p_2(t), p_2(0) = 1 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} = e^{t\tilde{\tilde{G}}}\mathbf{1}$$

où $\tilde{\tilde{G}}$ denote le générateur avec la colonne et ligne d'absorption 3 enlevée.

Exercice 9.9. *Refaire l'exercice 9.8 si la matrice infinitésimale (de taux de transitions) de X est donnée par*

$$G = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 6 \\ 1 & -10 & 9 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.10. *Montrez que pour chaque état k d'un processus de sauts récurrent on a*

$$\lambda_k E_k \widetilde{T}(k) = 1 + \vec{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k, \quad 1 = \pi_k(1 + \vec{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k) = \pi_k \Big[\lambda_k E_k \widetilde{T}(k)\Big],$$

où $G = \begin{pmatrix} \widetilde{G} & \boldsymbol{\lambda}_k \\ \vec{\lambda}_k & -\lambda_k \end{pmatrix}$.

Réponse: Soit $(\vec{\pi}, \pi_k)$ le vecteur des probas stationnaires. Alors $\vec{\pi}\widetilde{G} + \pi_k \vec{\lambda} = 0 \Longrightarrow \vec{\pi} = \pi_k \vec{\lambda}(-\widetilde{G})^{-1} \Longrightarrow 1 - \pi_k = \vec{\pi}\mathbf{1} = \pi_k \vec{\lambda}(-\widetilde{G})^{-1}\mathbf{1} \Longrightarrow 1 = \pi_k(1 + \vec{\lambda}(-\widetilde{G})^{-1}\mathbf{1}) = \pi_k \tilde{t}_k g_k \Longrightarrow \pi_k \tilde{t}_k = E[T^{(k)}]$.

9.9 La propriété de Markov du processus de Poisson

Théorème 9.3. *a) La loi exponentielle et l'independance des intervales a_i entre les arrivées impliquent que le processus de Poisson est un processus de Lévy.*

b) Les processus de Lévy ont la propriété de Markov.

Démonstration: b) La propriété de Markov est une consequence immédiate de PAI et de l'homogèneité.

Exemple 9.1. *Montrons par exemple que :*

$$P[N_{t+s} \geq k+1 | N_t = k, N_{t-s_1} = k, \forall s, s_1 > 0]$$

$$\begin{aligned}
&P[N_{t+s} \geq k+1 | N_t = k, N_{t-s_1} = k] = P[a_{k+1} \leq t+s-A_k | A_k \leq t-s_1, a_{k+1} > t - A_k] \\
&= \frac{P[t - A_k < a_{k+1} \leq t+s-A_k, A_k \leq t - s_1]}{P[A_k \leq t - s_1, a_{k+1} > t - A_k]} \\
&= \frac{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) P[t+s-x \geq a_{k+1} > t-x] dx}{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) P[a_{k+1} > t-x] dx} \\
&= \frac{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x)(e^{-\lambda(t-x)} - e^{-\lambda(t+s-x)} dx}{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) e^{-\lambda(t-x)} dx} = \frac{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) e^{-\lambda(t-x)}(1 - e^{-\lambda s}) dx}{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) e^{-\lambda(t-x)} dx} = 1 - e^{-\lambda s}
\end{aligned}$$

Remarque 9.9. *Pour d'autres lois, cette miraculeuse simplification n'est pas vraie*[§]

Par consequent, le processus de Poisson est le seul processus de comptage Markovien.

§. La réponse dependra de t et de s_1 (on l'obtient en utilisant la formule $\bar{F}_{a_i}(x) = e^{-\int_0^x h(y)} dy$ où $h(y) = f_{a_i}(x)/\bar{F}_{a_i}(x)$ est le "taux de termination= hazard rate" de a_i).

9.10 Le générateur des transitions du processus de Poisson

Exercice 9.11. *Montrer que pour un processus de Poisson et pour $h \to 0$ on a :*

$$p_k(h) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & si\ k = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & si\ k = 0 \\ o(h) & si\ k \geq 2 \end{cases}$$

Introduisons maintenant une matrice de taux :

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}$$

qui contienne dehors la diagonale les taux d'arrivée, et sur la diagonale ce qu'il faut pour rendre la somme de chaque ligne 0 (explication plus tard).

Les probabilités de transition du processus de Poisson et de chaque processus Markovien en temps continu peuvent être calculés à partir de cette matrice, par la formule

$$P(t) = e^{tG}.$$

Dans notre cas, le calcul de l'exponentielle $P(t) = e^{tG}$ produit une structure triangulaire superieure

$$P(t)(i,j) = \begin{cases} p_t(j-i) & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases}, \quad i, j \in \mathbb{N},$$

où $p_t(k) = P[N_\lambda(t) = k] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ sont les probabilités du processus de Poisson en començant de 0 (la première ligne). **Rq :** La propriété de semigroupe $P_{t+s} = P(t)P_s, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+$ est équivalente ici au fait que $p_t(k)$ satisfont :

$$p_{t+s}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_s(k) p_t(n-k)$$

Exercice 9.12. *Supposons que le nombre des hommes X_t qui arrivent à un guichet sans serveur suit un processus de Poisson $N_{\lambda_1}(t)$, et que le nombre des femmes Y_t qui arrivent suit un processus de Poisson $N_{\lambda_2}(t)$. Quelle est la loi du nombre total $Z_t = X_t + Y_t$ qui arrivent au guichet ?*

Remarque 9.10. *Le processus de Poisson est a la fois un des exemples les plus simples d'un processus de sauts Markovien, et aussi un instrument théorique de démonstrations, grace a la possibilité de construire explicitement toutes les processus de sauts Markovien en partant des processus de Poisson ! C'est aussi un des rares cas où les probabilités de transition ont des formules explicites.*

9.11 Résolution des èquations de Chapman-Kolmogorov pour le processus de Poisson ; le calcul de l'exponentielle des matrices triangulaires

Exercice 9.13. la loi d'Erlang pour le passage par n phases exponentielles *a) Calculer la matrice $e^{tG} = \begin{pmatrix} e^{tB} & \boldsymbol{F}_\tau(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un reseau de n serveurs exponentiels en serie* **identiques***,* *avec temps de service $Expo(\lambda)$, et donc matrice de taux*

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) En deduire la la fonction de répartition du temps de passage d'un client avec loi initiale $(1, 0, 0, ..., 0)$ *(la loi d'Erlang), en utilisant la formule* $F_\tau(t) = e^{tG}(1, n+1)$ *.*

Ind : a) On peut calculer e^{tB} par les équations différentielles de Kolmogorov en raisonnant par récurrence, ou utiliser le fait que les deux composantes de $G = \lambda T - \lambda(I - E_{n+1})$ commutent !

Considerons le processus de Poisson Markov homogène $(X_t)_{t \geq 0}$ d'intensité $\lambda \geq 0$, de générateur $G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$ Fixons l'état initial $i = 0$ et posons $P_{0,j}(t) = p_j(t)$.

Les équations de Kolmogorov avant $P' = PG$ pour la première ligne sont

$$p_j'(t) = \sum_{k \neq j} p_k(t)\ g_{k,j} - p_j(t) \sum_{k \neq j} g_{j,k}$$

Note : En ecrivant ces équations comme $p_j(t+h) = \sum_{k \neq j} p_k(t)\ g_{k,j}\ h + p_j(t)(1 - h\ \sum_{k \neq j} g_{j,k})$ on voit que c'est encore des équations de conditionnement. Pour le processus de Poisson, ces équations sont :

$$\begin{cases} p_0^{'}(t) = -\lambda p_0(t) \\ p_j^{'}(t) = \lambda \left(p_{j-1}(t) - p_j(t)\right) \text{ si } j \neq 0 \end{cases}$$

On sait aussi que $p_j(0) = 0$ si $j \neq 0$ et $p_0(0) = 1$. On a donc un système différentiel pour déterminer les p_j, qui peut être resolue **recursivement** : $\rightarrow$ Pour $j = 0$:

$$\begin{cases} p_0^{'}(t) = -\lambda p_0(t) \\ p_0(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{p_0(t) = e^{-\lambda t}}$$

$\rightarrow$ Pour $j = 1$:

$$\begin{cases} p_1^{'}(t) = \lambda \left(p_0(t) - p_1(t)\right) \\ p_1(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1^{'}(t) + \lambda p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} & (*) \\ p_1(0) = 0 \end{cases}$$

$t \mapsto \lambda t e^{-\lambda t}$ est une solution particulière de $(*)$ et $t \mapsto Ce^{-\lambda t}$ (où $C \in \mathbb{R}$) est la solution générale de $p_1^{'}(t) + \lambda p_1(t) = 0$ donc $t \mapsto (C + \lambda t)\, e^{-\lambda t}$ est la solution générale de $(*)$. De plus, on doit avoir $p_1(0) = 0$ donc $C = 0$ et on a $\underline{p_1(t) = e^{-\lambda t} \lambda t}$. $\rightarrow$ Raisonnons alors par récurrence. Supposons que pour j dans $\mathbb{N}$, $p_j(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$ et déterminons p_{j+1}. On a :

$$\begin{cases} p_{j+1}^{'}(t) = \lambda \left(p_j(t) - p_{j+1}(t)\right) \\ p_{j+1}(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{j+1}^{'}(t) + \lambda p_{j+1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{t^j \lambda^{j+1}}{j!} & (**) \\ p_{j+1}(0) = 0 \end{cases}$$

$t \mapsto Ke^{-\lambda t}$ (où $K \in \mathbb{R}$) est la solution générale de $p'_{j+1}(t) + \lambda p_{j+1}(t) = 0$ et $t \mapsto \frac{\lambda^{j+1}t^{j+1}}{(j+1)!}e^{-\lambda t}$ est une solution particulière de $(**)$ donc $t \mapsto \left(K + \frac{\lambda^{j+1}t^{j+1}}{(j+1)!}\right)e^{-\lambda t}$ est la solution générale de $(**)$. Or $p_{j+1}(0) = 0$ d'où $K = 0$ et on obtient : $\underline{p_{j+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{j+1}}{(j+1)!}e^{-\lambda t}}$ ce qui recupère la loi de Poisson (en eclaircissant la provenance de la terminologie "processsus de Poisson"). Nous venons de redémontrer que pour un processus de Poisson $(X_t)_{t\geq 0}$ d'intensité $\lambda > 0$, la variable aléatoire X_t suit pour tout $t > 0$ une loi de Poisson de paramètre λt.

Exercice 9.14. *Recalculez les probabilités de transition du processus de Poisson par la méthode des fonctions génératrices.*

Remarque : 1) La solution recursive ci-dessus s'appuie sur la structure triangulaire du générateur, et peut-etre aussi implementé pour tout processus de "Poisson composé de naissance pure" (permettant la naissance de jumeaux, etc). Le calcul peut-etre simplifié en començant par la substitution $p_k(t) = e^{-\lambda_k t}P_k(t)$, ou λ_k est le taux total de naissance en état k. Il s'avère que $P_j(t)$ sont des polynômes, faciles a obtenir recursivement.

Exercice 9.15. *Recalculez les probabilités de transition du processus de Poisson par cette substitution.*

Solution : Les équations de Kolmogorov pour le processus de Poisson deviennent après la substitution :

$$\begin{cases} P'_0(t) = 0, P_0(0) = 1 \\ P'_j(t) = \lambda P_{j-1}(t), P_j(0) = 0 \text{ si } j \neq 0 \end{cases}$$

Il suit que $P_0(t) = 1$, et integrations succesives donnent $P_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}$.

9.12 Le calcul de l'exponentielle des matrices : developpement limités, la résolvante, et la décomposition spectrale

Exercice 9.16. *Calculer la puissance n, l'exponentielle ainsi que la résolvante pour une matrice de rang* 1,

$$A = \boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta},$$

où $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\beta}$ sont respectivement des vecteurs colonne et ligne de taille n.

Réponse: L'exponentielle est $e^{tA} = I + \frac{e^{kt}-1}{k}\boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta} = I + \frac{e^{kt}-1}{k}A$, où $k = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{b}$.

Exercice 9.17. *a) Calculer la décomposition spectrale pour une matrice de rang* 1,

$$A = \boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta},$$

où $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\beta}$ sont respectivement des vecteurs colonne et ligne de taille n. b) (**) En suite recalculer l'exponentielle en utilisant la décomposition spectrale.

Sol : a) Comme le determinant de A est 0, 0 est une valeur propre de A, avec multiplicité $n-1$ en effet ! Il est aussi facile a verifier que $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des vecteurs propres pour la valeur propre $k = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{b}$. Rappellons la décomposition en matrices de rang 1

$$A = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{d}_i\, \boldsymbol{g}_i$$

où λ_i sont les valeurs propres, qui est valable pour chaque matrice A de dimension n ayant un ensemble de n vecteurs propres à droite independants $\boldsymbol{d}_i$ (et donc aussi un ensemble de n vecteurs propres à gauche independants $\boldsymbol{g}_i'$). Cela suggère que pour une matrice de rang 1, la décomposition spectrale est $A = D\ Diag(k,0,...0)D^{-1} := \begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2...\boldsymbol{b}_n\end{pmatrix} Diag(k,0,...0)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ ...\\ \boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}$ où $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}$, où $\boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n$ pourrait-etre des vecteurs colonne arbitraires, comme ils finiront multipliées par 0. Par contre, en choisissant une base orthogonale dans l'espace perpendiculaire à $\boldsymbol{b}$ simplifiera le calcul des lignes $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, ..., \boldsymbol{\beta}_n$ de la matrice $G = D^{-1}$. Comme elles doivent satisfaire $\boldsymbol{\beta}_i b_j = \delta(i-j)$, le choix d'une base orthogonale pour $\boldsymbol{b}_i$ permet de choisir tout simplement $\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{b}_i, i \geq 2$. Finalement, pour satisfaire $\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{b} = 1$, on est obligé de choisir $\boldsymbol{\beta}_1 = k^{-1}\boldsymbol{\beta}$. b) L'exponentielle est $e^{tA} = \frac{e^{kt}}{k}\boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta} + \sum_{i=2}\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i^t$. Pour recuperer la reponse anterieure, il faut encore utiliser la décomposition spectrale $I = \boldsymbol{b}k^{-1}\boldsymbol{\beta} + \sum_{i=2}\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_i^t$.

Exercice 9.18. *Calculer la puissance k, la "résolvante" $(sI-A)^{-1}$, ainsi que l'exponentielle $P(t) = e^{tA}$, pour une matrice de taille $n \times n$, (par exemple $n = 3$) $A = \mu I + \lambda U$, où $U_{i,j} = 1_{j=i+1}$. En deduire les formules pour*

1. *$\lambda = 1, \mu = 0$; commenter sur la rélation avec le théorème Cayley Hamilton.*
2. *Un bloc de Jordan ($\lambda = 1$)*
3. *la matrice de taux G d'un processus "série" avec n étapes (ou de Poisson absorbé en n), où $\mu = -\lambda$.*

9.13 Exercices

1. a) Obtenez les équations de Chapman-Kolmogorov pour un processus des sauts Markovien, en conditionnant sur le moment de la premiére transition.

   b) Obtenez les équations de Chapman-Kolmogorov, en conditionnant sur la position au moment $t+h$, pour h très petit.

   Ind : Commencez par le cas du processus de Poisson.

2. Obtenez les équations de Dirichlet pour les probabilités et temps esperés d'absorbtion, en conditionnant sur le moment de la premiére transition.

3. Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ un processus de Markov en temps continu, à matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} -\beta_0 & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

   où $\boldsymbol{b} = (-\boldsymbol{B})\mathbf{1}$ et $\beta_0 = \boldsymbol{\beta}\ \mathbf{1}$. Montrez que le **temps de retour** au premier état, en partant du moment qu'on le quitte, a transformée de Laplace : $\widehat{b}[s] = \boldsymbol{\beta}\ (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b}$ et ésperance $\bar{b} = \boldsymbol{b}\ (-\boldsymbol{B})^{-1}\mathbf{1}$, et que la probabilité stationnaire de cet état satisfait $\pi_0^{-1} = 1 + \bar{b}$

   Note : Dans le cas $b_0 = 1$, on retrouve la bien-connue rélation du cas du temps discret $\pi_0^{-1} = \mathrm{E}T_0$, où T_0 est le temps total de retour au premier état.

Solutions :

1. Soit $j \in \mathbb{N}$, on veut calculer $p_j(t) = P[X_t = j]$. Dans ce qui suit on conviendra de noter $p_{-1}(t) = 0$. On a pour tout $h > 0$:

$$\begin{aligned} p_j(t+h) &= P[X_{t+h} = j] = \sum_{i=0}^{j} P[X_{t+h} = j \text{ et } X_t = i] \text{ car } X_t \leq X_{t+h} \text{ d'après (1)} \\ &= \sum_{i=0}^{j} P([X_{t+h} - X_t = j - i] \cap [X_t = i]) \\ &= \sum_{i=0}^{j} P[X_{t+h} - X_t = j - i] P[X_t = i] \text{ car } (X_t)_{t \geq 0} \text{ est un P.A.I.} \\ &= \sum_{i=0}^{j} p_{j-i}(h) p_i(t) \text{ d'après (2)} \\ &= (1 - \lambda h) p_j(t) + \lambda h p_{j-1}(t) + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{p_j(t+h) - p_j(t)}{h} = \lambda(p_{j-1}(t) - p_j(t)) + \varepsilon(h)$$

En passant à la limite ($h \to 0$), on obtient alors :

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ p_j'(t) = \lambda(p_{j-1}(t) - p_j(t)) \text{ si } j \neq 0 \end{cases}$$

Chapitre 10

Les lois de type phase continues et de type exponentielle de matrice

10.1 Aperçu historique

La loi exponentielle, avec fonction de survie $\bar{F}(t) = e^{bt}\mathbb{I}_{\{t\geq 0\}}, b < 0$, est la loi la plus importante parmi les lois concentrées sur $\mathbb{R}_+$. Elle a été du début une grande favorite dans les probas appliquées (files d'attente, actuariat, fiabilité, etc), par exemple pour la modélisation des temps d'atteinte, grace a ses propriétés speciales, comme l'absence de memoire. Mais, comme typiquement il n'est pas possible d'ajuster une distribution exponentielle au données, des alternatives ont été proposé du début.

Serie des "phases" exponentielles. Erlang (1905), a proposé de modéliser les temps d'atteinte par sommes des v.a. exponentielles i.i.d. du même taux λ, qu'il voyait comme des "séries des phases exponentielles" (chaque phase ayant la remarquable propriété de manque de memoire).

Exercice 10.1. *1. Montrer que La transformée de Laplace de la loi d'Erlang $E_{n,\lambda} = \sum_{i=n}^{k} E_\lambda^{(i)}$ est*

$$(\frac{1}{1+s/\lambda})^n.$$

2. Calculer la moyenne, variance et coefficient de variation $c_v^2 = \frac{Var(X)}{(E[X])^2}$ de la loi d'Erlang $E_{n,\lambda}$.

3. Calculer le mode de la densité.

4. Tracer approximativement les graphes des densités $E_{k,\frac{k}{2}}$ pour $k = 3$ et $k = 7$.

5. (*) Montrer que le coefficient de variation d'une convolution de deux lois ayant coefficient de variation plus petit que 1 est plus petit que 1 et plus grand que $\frac{1}{2}$.

Une autre famille trés importante est celle des lois "**hyperexponentielles**", avec densité

$$f(t) = \sum \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \lambda_i > 0, \alpha_i > 0, \sum \alpha_i = 1,$$

qui peuvent-etre vues comme le résultat d'un choix avec probabilités α_i d'une entre plusieurs phases avec taux λ_i.

Exercice 10.2. *Calculer*

1. *les moments d'ordre* $n, n = 1, 2, ...$ *et*
2. *le coefficient de variation* $c_v^2 = \frac{Var(X)}{E(X)^2}$ *d'une variable aléatoire hyperexponentielle, d'ordre* k.

La classe $\mathcal{R}$ des lois avec transformées de Laplace rationnelles. D.R. Cox (1955) étudie les lois series et hyperexponentielles, qu'il regarde comme temps de passage par un réseau des phases parallèles, et aussi des lois obtenues en composant des phases en série et/ou en parallèle. Il identifie comme propriété analytique essentielle le fait que leurs transformées de Laplace sont rationnelles

$$f^*(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} p_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i s^i},\ p_0 = q_0, \tag{10.1}$$

et il introduit dans l'article phare "A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes" la classe des densités $\mathcal{R}$ ayant des transformées de la forme (10.1). En particulier, une densité $f(t)$ de cette classe est facilement obtenable à partir de sa transformée de Laplace $f^*(s)$ (qui est souvent plus facile a trouver), par décomposition en fractions simples, et inversion des transformées simples de la forme $(\frac{1}{1+s/\lambda})^n$. Chaque densité de la classe $\mathcal{R}$ peut-être decomposée ainsi comme une combinaison des densités exponentielles et d'Erlang, sauf que les exposants λ_i peuvent être complexes.

Exercice 10.3. *a) Montrez que si une variable continue X à valeurs en sur $\mathbb{R}_+$ a une densité avec transformée de Laplace rationelle* (10.1)*, alors $m \leq n-1$, et $a_0 = b_0$.*

b) Montrez que si X est continue, sauf un possible atom en 0 *avec masse a_{-1}, alors $a_0/b_0 + a_{-1} = 1 \Longrightarrow a_0 \leq b_0$, et $m \leq n$.*

Réponse: a) $m \leq n-1 \Leftrightarrow \lim_{s \to I} f^*(s) = 0$, qui est une consequence du théorème de convergence dominée.

Remarque 10.1. *La classe $\mathcal{R}$ est incontournable dans des nombreuses applications, apparaissant par exemple comme resultat des approximations de Padé de la transformée de Laplace, ou par la méthode des moments.*

Remarque 10.2. *Il a été longtemps un problème ouvert (sauf les cas $n = 2$ et $n = 3$) de decider quand une combinaison d'exponentielles est nonnegative (ou quand une transformée de Laplace rationelle* (10.1) *a une inverse nonnegative). La commande CheckMEPositive de BUTools offre aujourd'hui cette possibilité, et aussi le programme SOPE, dans le cas des exposants réels (par contre SOPE permet aussi la resolution des problèmes d'optimisation convexe).*

Representations matricielles. En même temps avec Cox, Jensen (1954) etudie les lois des temps d'absorption τ des processus de sauts Markoviens, ou de passage par des réseaux, appellées aujourd'hui lois de type phase ($\mathcal{PH}$). Il trouve qu'elles ont la réprésentation (10.2) ci-dessous – voir Section 10.2 :

Définition 10.1. Densités de type phase et de type exponentielle de matrice. *a) Une densité $f(t), t \in [0, \infty)$ est appelée de type phase si :*

$$f(t) = \vec{\beta} e^{Bt} \boldsymbol{b}, \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \widehat{f}(s) = \vec{\beta}(sI - B)^{-1} \boldsymbol{b}, \tag{10.2}$$

où B est une matrice sous-génératrice satisfaisant $B_{ij} \geq 0$ for $i \neq j$, $B\mathbf{1} \leq \mathbf{0}$, $\vec{\beta}$ est un vecteur ligne, et $\boldsymbol{b} = -B\ \mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ sont des vecteurs colonne. Ces hypothèses impliquent $f(t) \geq 0, \forall t \geq 0, \int_0^\infty f(t)dt = 1$.

b) Une densité qui a une représentation (10.2), mais avec des composantes $\vec{\beta}, B, \boldsymbol{b}$ qui ne sont pas nécessairement comme en part a), est appellée densité de type exponentielle de matrice.

Exemple 10.1. *Une représentation de la densité d'Erlang $E_{n,\lambda}$ est obtenue avec $\vec{\beta} = (1, 0, 0, ...)$ et*

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \lambda \\ \vdots & & \vdots & \ddots & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Remarque 10.3. *La densité et la fonction de survie d'un temps d'arret τ d'un processus de Markov absorbant en temps continu ont toutes les deux des représentations matricielles :*

$$\bar{F}_\tau(t) = \vec{\beta} e^{t\mathbf{B}} \mathbf{1} \Leftrightarrow f(t) = \vec{\beta} e^{t\mathbf{B}} \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b} = -B\mathbf{1}. \tag{10.3}$$

La transformée de Laplace est rationelle, de la forme

$$f^*(s) = \vec{\beta}(sI - B)^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i s^i}$$

Si une telle répresentation est disponible avec B étant une matrice sous-génératrice, et $\vec{\beta}$ nonnegatif, aucun besoin de verifier que $f(t)$ est nonnegative, cela étant automatique.

Des répresentations matricielles sont aussi possibles pour la classe $\mathcal{R}$ de Cox (en utilisant la "matrice compagnon" du polynôme $q(s)$ au denominateur), et donc $\mathcal{PH} \subset \mathcal{R}$ [§] . Les lois de la classe $\mathcal{R}$ avec transformées de Laplace rationnelles sont aussi nommées exponentielles de matrice ou matrice-exponentielle.

Remarque 10.4. *Pour qu'une densité $f(t)$ soit de type matrice-exponentielle, il est nécessaire que :*

1. *Toutes ses valeurs propres satisfont $\Re(\sigma_i) < 0, \forall i$, et il existe une valeur propre réelle σ_1 tq $\max_i \Re(\sigma_i) = \sigma_1$ (ce qui est facile a verifier en calculant les racines du denominateur), et*

---

§. Si la transformée d'une fonction est rationelle :

$$f^*(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i s^i}, \tag{10.4}$$

alors l'inverse peut être representée comme $f(t) = \vec{\beta} e^{tB} \boldsymbol{e}_n$, où $\vec{\beta} = (p_0, ..., p_{n-1})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & 1 \\ -q_0 & ... & ... & ... & -q_{n-1} \end{pmatrix}$ est la "matrice compagnon" du polynôme $q(s)$ au denominateur. En effet, on vérifie d'abord que (10.4) implique $b(D)[f(t)] = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{f}'(t) = B\boldsymbol{f}(t)$, où $f(t)$ est le vecteur formé par $f(t)$ et ses premiéres $n-1$ dérivées. La condition initiale est fourni par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ q_{n-1} & 1 & 0 & ... & \\ q_{n-2} & q_{n-1} & 1 & ... & ... \\ q_1 & q_2 ... & q_{n-1} & 1 & \end{pmatrix} \boldsymbol{f}'(0) = \boldsymbol{b}$. Résolvant le système EDO linéaire avec cette condition produit la representation désirée.

2. $f(t) \geq 0, \forall t$, qui est un problème ouvert pour $n \geq 4$.

Dans le cas des densités de type phase, ces contraintes sont satisfaites automatiquement, mais pour les densités de type matrice-exponentielle elles doivent être verifiées cas par cas, ce qui est tout a fait difficile pour la deuxième propriété.

10.2 Processus de Markov avec un état absorbant

Exercice 10.4. Le serveur sans mémoire. *Pour un processus de Markov en temps continu a deux états $\{1, \partial\}$ avec $G_{\partial,1} = 0$ (∂ est absorbant), $G_{1,\partial} = \lambda$, soit τ temps d'absorbtion.*

1. *Calculer $P_t = e^{tG}$, par exemple par les équations de Kolmogorov $P_t' = P_t G$, et remarquez que*
$$e^{tG} = \begin{pmatrix} \bar{F}_\tau(t) & F_\tau(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. *Calculer la résolvante/transformée de Laplace du semigroupe $\int_0^\infty e^{-st} e^{tG} dt = (sI - G)^{-1}, \forall s > 0$.*
3. *(*) Calculer l'espérance de τ, et la transformée de Laplace $E[e^{-s\tau}]$, en conditionnant sur toutes les possibilités après un intervalle infinitesimal dt ("conditionnement sur le premier pas"). Rederiver $E[\tau]$, en utilisant $Ee^{-s\tau} = \int_0^\infty e^{-st} f_\tau(t) dt = 1 - sE[\tau] + ...$*

Remarque 10.5. *La transformée de Laplace $\widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ est très importante en probabilités, par exemple pour calculer les moments (pour cela, il est plus convenable d'utiliser la fonction génératice des moments $\phi(s) = \int (e^{st} f(t) dt = \widehat{f}(-s)$. Il est facile de verifier que les transformées des fonctions de répartition $F(t)$ et survie $\bar{F}(t)$ sont respectivement*

$$\widehat{F}(s) = \frac{f(s)}{s}, \quad \widehat{\bar{F}}(s) = \frac{1 - f(s)}{s}$$

L'exercice ci-dessus illustre le fait que la densité exponentielle peut être vue comme le temps d'absorbtion d'un processus de Markov avec matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par : $G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$. La possibilité de donner ce genre de représentation défini la classe des densités de type phase.

Motivés par cette relation, considèrons le problème de charactériser la distribution du temps de passage τ par un réseau Markovien général, jusqu'à l'absorbtion dans un état "cimetier" absorbant.

Soit G la matrice génératrice (de taux de transitions) d'un processus ayant un état absorbant :

$$G = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = (-\boldsymbol{B})\mathbf{1},$$

et soit $B = \widetilde{G}$ la matrice sous-stochastique obtenue en effaçant la ligne et colonne de l'état absorbant dans la matrice stochastique G du semigroupe stochastique initial. B est une matrice sous-stochastique (ayant la somme de chaque ligne ≤ 1, avec au moins une ligne où l'inegalité est stricte). Réciproquement, chaque matrice sous stochastique a une extension unique a une matrice stochastique, obtenue par l'ajout d'une ligne de 0 et d'une colonne qui complete la somme de chaque ligne à 1.

Le prochaine théorème fournit la relation entre les semigroupes (sous)stochastiques e^{tG}, e^{tB}, et le temps d'arrêt τ obtenu en arretant le processus au moment de son arrivée dans l'état absorbant (qui peut être choisi arbitrairement).

Théorème 10.1. *Soit τ le temps d'absorbtion d'un processus de Markov avec un état absorbant, à matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par :*

$$G = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = (-\boldsymbol{B})\mathbf{1}$$

a) Alors,

$$e^{tG} = \begin{pmatrix} e^{t\mathbf{B}} & \mathbf{1} - e^{t\mathbf{B}}\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\mathbf{B}} & (P_i(\tau \leq t), i \in \mathcal{T}) \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{cases} P_i(\tau \leq t) = (e^{tG})_{i,n+1} \\ P_i(\tau > t) = \vec{e}_i\, e^{t\mathbf{B}}\, \mathbf{1} = (e^{t\mathbf{B}}\, \mathbf{1})_i \end{cases}$$

En forme vectorielle, les fonction de survies des temps d'absorbtion sont :

$$\bar{\boldsymbol{F}} = (\bar{F}_i(t) = \mathbb{P}_i[\tau > t], i \in \mathcal{T}) = e^{t\mathbf{B}}\mathbf{1}$$

et les densités sont

$$\boldsymbol{f} = e^{t\mathbf{B}}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} = (-\boldsymbol{B})\mathbf{1} \tag{10.5}$$

Avec une distribution initiale $\vec{\beta}$ concentré sur les états transitoires, on a

$$P_{\vec{\beta}}(\tau > t) = \vec{\beta}\, e^{t\mathbf{B}}\, \mathbf{1}$$

b) La relation entre les résolvantes est :

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G})^{-1} = \begin{pmatrix} (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1} & s^{-1}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & s^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dem : a) Un moment de reflexion nous montre qu'en effet la matrice

$$\boldsymbol{P}_t = (P_t(i,j) = \mathbb{P}_i[t < \tau, X_t = j], i, j \in \mathcal{T}) = e^{t\mathbf{B}}$$

contienne les **probabilités de survie jusqu'au temps t, jointes avec la position finale j, et conditionnées par les positions de départ** i. Les **probabilités de survie jusqu'au temps t, conditionnées par les positions de départ** i, sont donc

$$\vec{e}_i e^{t\mathbf{B}}\mathbf{1}$$

En tenant compte des probabilités de départ, on trouve :

$$\bar{F}_\tau(t) = \vec{\beta} e^{t\mathbf{B}}\mathbf{1}$$

b) Par définition, la dernière colonne de e^{tG} est $F_\tau(t)$ et sa transformée $\widehat{F}_\tau(s) = s^{-1}Hf_\tau(s) = s^{-1}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b}$ où on a utilisé la rémarque 10.5 et (10.5).

Corollaire 10.1. Les caractéristiques fondamentales des distributions de type phase (ou matrice-exponentielle). *a) La matrice des transformées de Laplace $P^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_t dt$ des probabilités de survie conditionnées par les positions de départ et jointes avec la position d'arrivée au temps t vaut*

$$\boldsymbol{P}^*(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}$$

Soit

$$\boldsymbol{l} = (l_i(s) = E_i e^{-s\tau} = \int_0^\infty e^{-st} f_i(t) dt = \widehat{f}_i(s), i \in \mathcal{T})$$

les transformés de Laplace du temps d'absorbtion, conditionné par la position de départ. Alors

$$\boldsymbol{l} = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b}.$$

b) Avec une distribution initiale $\vec{\beta}$ concentré sur les états transitoires, on trouve

$$\mathrm{E}_{\tilde{\beta}} \mathrm{e}^{-s\tau} = \tilde{\beta}(\mathrm{s}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b}.$$

c) le vecteur $\boldsymbol{t}$ d'espérances de τ, à partir de tous les états transients, est

$$\boldsymbol{t} = E[\tau] = (-\boldsymbol{B})^{-1}\mathbf{1},$$

et le vecteur des moments d'ordre k est

$$E[\tau^k] = k!(-\boldsymbol{B})^{-k}\mathbf{1}$$

Dem : a) Soit

$$\widetilde{G} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

la matrice rectangulaire obtenu en effaçant la ligne de lélement absorbant. On peut appliquer le conditionnement sur la position après un intervalle infinitesimal. Posant $\widetilde{\boldsymbol{l}} = (\boldsymbol{l}, 1)$, les équations sont

$$\begin{cases} l_\partial = 1 \\ \widetilde{\boldsymbol{G}}\widetilde{\boldsymbol{l}} - s\boldsymbol{l} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{B}\boldsymbol{l} + \boldsymbol{b} - s\boldsymbol{l} = 0, \quad \boldsymbol{l} = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b}$$

c) Pour $k = 1$, le resultat suit directement de l'équation $\boldsymbol{B}\boldsymbol{t} + \mathbf{1} = 0$ ∎

Remarque 10.6. *En utilisant la décomposition de Jordan, on voit que dans le cas "générique" des distributions de type phase diagonalisable, ces distributions peuvent-etre décomposées comme combinaisons (possiblement nonconvexes) des exponentielles.*

Exercice 10.5. *Pour les processus absorbants "serie" en temps continu a trois états $1, 2, \partial$ definis respectivement par*

$$a) G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b) G = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et distribution initiale $(1, 0, 0)$, calculer :

1. la "résolvante"

$$(sI - G)^{-1} = \begin{pmatrix} (sI - B)^{-1} & \frac{1}{s}\boldsymbol{f}^*(s) \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (sI - B)^{-1} & \boldsymbol{F}^*(s) \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix},$$

2. *le vecteur des transformées de Laplace* $\boldsymbol{l}(s) = (sI - B)^{-1}\boldsymbol{b}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{f}(t) = e^{tB}\boldsymbol{b}$ *des densités du temps d'absorbtion* τ.
3. *Le vecteur d'espérances de* τ $\boldsymbol{t} = (-B)^{-1}\mathbf{1}$.

Sol : a)

$$(sI - B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+\lambda} & \frac{\lambda}{(s+\lambda)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+\lambda} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{l}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2} \\ \frac{\lambda}{s+\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} f_{E_{2,\lambda}}(t) \\ f_{E_{1,\lambda}}(t) \end{pmatrix}, (1,0)\boldsymbol{f}(t) = f_{E_{2,\lambda}}(t)$$

b)

$$(sI - B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+\lambda_1} & \frac{\lambda_1}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} \\ 0 & \frac{1}{s+\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{l}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1\lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} \\ \frac{\lambda_2}{s+\lambda_2} \end{pmatrix}$$

On obtient une distribution "hypoexponentielle/Erlang generalisé/série/convolution d'exponentielles", aussi exprimable comme melange nonconvexe d'exponentielles

$$f(t) = (1,0)\boldsymbol{f}(t) = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Remarque 10.7. Les transformées de Laplace des réseaux serie. *Rémarquons que les transformées de Laplace ci-dessus peuvent être obtenues sans calcul, en prenant les produits des transformées pour les phases qui restent jusqu'à l'absorbtion. Cette rémarque reste evidemment vrai pour les réseaux serie de dimension arbitraire. Pour un réseau série avec matrice sous-génératrice*

$$B = Bidiag(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -\lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\lambda_n \end{pmatrix},$$

le vecteur des transformées de Laplace est

$$\boldsymbol{l}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1\lambda_2...\lambda_n}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)...(s+\lambda_n)} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_{n-1}\lambda_n}{(s+\lambda_{n-1})(s+\lambda_n)} \\ \frac{\lambda_n}{s+\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Les moments sont aussi explicits. Pour $n = 3$, *on trouve :*

$$\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} \\ 2\left(\frac{1}{\mu_1\mu_3} + \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_3^2} + \frac{1}{\mu_1\mu_2} + \frac{1}{\mu_3\mu_2} + \frac{1}{\mu_2^2}\right) \\ 3!\left(\frac{1}{\mu_1^3} + \frac{1}{\mu_2^3} + \frac{1}{\mu_3^3} + \frac{1}{\mu_2\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_3\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2\mu_3} + \frac{1}{\mu_2\mu_3^2} + \frac{1}{\mu_2^2\mu_1} + \frac{1}{\mu_3^2\mu_1} + \frac{1}{\mu_2\mu_3\mu_1}\right) \end{pmatrix} \text{Avec } \mu_i = \mu, \forall i$$

les formules simplifient : $m_1 = n\mu^{-1}, m_2 = n(n+1)\mu^{-2}, m_2 = n(n+1)(n+2)\mu^{-3}, ...$

Les réseaux série sont trés importants dans la modélisation des temps d'atteinte.

Exercice 10.6. Les réseaux parallel. *Pour le processus absorbant en temps continu defini par*

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calculer :

1. *la "résolvante transiente"* $(sI - B)^{-1}$,
2. *la transformée de Laplace du temps d'absorbtion* τ, *avec distribution initiale* $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$
3. *la densité de* τ
4. *le vecteur* $\boldsymbol{t}$ *d'espérances de* τ, *à partir de tous les états transients.*
5. *Calculez la transformée de Laplace du temps d'absorbtion* τ *pour un processus avec un état absorbant, ayant une diagramme paralléle arbitraire.*

Conclusion : Les lois des temps de passage par des réseaux markoviennnes sont des mélanges d'exponentielles et des lois d'Erlang avec des exposants possiblement complexes. Dans le cas des réseaux sans cycles – voir exercices ci-dessus – les exposants sont réels.

10.3 Sous-classes importantes des distributions exponentielle de matrice (*)

Rapellons que pour qu'une densité soit de type matrice-exponentielle il est nécessaire que toutes ses valeurs propres satisfont $\Re(\sigma_i) < 0, \forall i$, et il existe une valeur propre réelle σ_1 tq $\max_i \Re(\sigma_i) = \sigma_1$. La possibilité la plus simple est que toutes les valeurs propres soient réelles negatives.

Théorème 10.2. *Supposons que* $f(x)$ *est une fonction de type exponentielle de matrice, avec toutes les valeurs propres satisfaisant* $\sigma_i < 0, \forall i$, *et que* $f(x) > 0, \forall x > 0$. *Alors,* $f(x)$ *admet une representation comme temps d'absorbtion d'un processus de Markov avec graphe de communication serie (ce qui est équivalent au fait qu'un peut ordonner les états tq la matrice de transition soit bidiagonale)*[§] *. Une telle densité avec valeurs propres réelles negatives s'appellent acyclique/Coxienne/serie/Erlang généralisé.*

Au cas où on a aussi des racines complexes, on est obliger d'utiliser des graphes qui contiennent aussi des cycles. L'idée la plus simple serait d'utiliser des matrices circulantes $B = Circ(-\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_n), \lambda > \sum_i \lambda_i$, mais il se trouve que ces matrices representent seulements la loi exponentielle (en particulier, leurs moments sont $m_k = k!(-\boldsymbol{B})^{-k}\mathbf{1} = k!(\lambda - \sum_i \lambda_i)^{-k}$).

Exercice 10.7. *Verifier cette affirmation en BUTools, avec* $n = 2, \lambda_1 = \lambda_1 =, \lambda = 3$.

Remarque 10.8. *Mocanu et Commault ont montré qu'on peut toujours trouver des representations de forme "series des blocs", avec chaque bloc representant separament une valeur propre réele, ou une pair des valeurs propres complexes, par des lois d'"Erlang généralisé avec de feedback" (representation monocyclique).*

Exercice 10.8. *a) Montrez que les statistiques d'ordes de* n *variables exponentielles i.i.d. ont des distributions d'Erlang généralisés, et determiner leurs paramétres. b) (*) Investiguez le cas des statistiques d'ordes de* n *variables exponentielles independants, mais avec des paramétres différents.*

Ind : a) Utilisez la propriété de manque de memoire. b) Considerez le cas $n = 2$.

§. Ce théorème est déjà interessant avec un graphe de communication acyclique (ce qui est équivalent au fait qu'un peut ordonner les états tq la matrice de transition soit triangulaire). Dans ce cas, il assure qu'on peut trouver une autre representation bidiagonale, de dimension plus grande.

10.4 La positivité des combinaisons linéaires d'exponentielles

Définition 10.2. *Une densité (c.-à-d. une fonction nonnegative et intégrable, avec intégrale* 1*) de la forme :*

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{K} w_k e^{-c_k t} \geq 0, & \forall t \geq 0 \\ 0, & \forall t < 0, \end{cases} \tag{10.6}$$

sera appelée hyperexponentielle généralisée (GHE). Si tous les coefficients ω_k sont positifs, $f(t)$ sera appelée hyperexponentielle.

Exercice 10.9. *Est-ce que la fonction*

$$f(t) = 2(e^{-t}) - 6(2e^{-2t}) + 5(3e^{-3t}) = 2e^{-t} g(t)$$

est positive sur $t \in [0, \infty)$, et donc une densité ?

Réponse: Non, car la valeur minimale $g(t) = 2 - 12e^{-t} + 15e^{-2t}$ obtained when $e^{-t^*} = \frac{2}{5}$, is $g(t^*) = -\frac{2}{5} < 0$.

Remarque 10.9. *Cette approche marche toujours pour trois termes. Pour quatre et cinq termes, déjà dans le cas des exposants en progression arithmétique, on arrive au pb. de positivité sur* $[0, 1]$ *des polynômes de degré* 3 *et* 4*, qui ne sont pas faciles. Le cas général des progressions arithmétiques est abordable numériquement en utilisant des représentations matricielles et la programmation semi-définie.*

Exercice 10.10. *Est-ce que la fonction*

$$f(t) = \frac{1}{4} e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t}$$

est non-négative sur $t \in [0, \infty)$?

Exercice 10.11. *Montrer que pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la fonction*

$$f(t) = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

est une densité, en calculant sa transformée de Laplace $f^*(s)$.

Réponse:

$$f^*(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\frac{1}{\lambda_1 + s} - \frac{1}{\lambda_2 + s}) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)} = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + s)} \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 + s)}.$$

Il suit que $f(t)$ est la densité d'une somme de deux variable aléatoire exponentielles, indépendantes.

Remarque 10.10. *La transformée de Laplace, ainsi que la densité, sont des différences divisées de Newton.*

$$f^*(s) = -\lambda_1 \lambda_2 (\frac{1}{\lambda + s})_{[\lambda_1, \lambda_2]} \Longrightarrow f(t) = -\lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda t})_{[\lambda_1, \lambda_2]} =$$

$$-\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 t})$$

Cela continue d'etre vrai (démo par récurrence) pour des sommes de n variable aléatoire exponentielles, indépendantes, et nous fournie des exemples des densités qui ne sont pas hyperexponentielles, mais avec positivité évidente dans le «monde de Laplace».

Définition 10.3. *La loi d'une somme indépendante des n variables exponentielles avec taux $\lambda_i, i = 1, ..., n$ est appelée Erlang généralisée. Sa transformée de Laplace est $\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{s+\lambda_i}$.*

Exercice 10.12. *Écrivez la fonction*

$$f(t) = \frac{5}{6}e^{-t} - \frac{2}{6}e^{-2t} + e^{-3t}$$

avec transformée de Laplace

$$f^*(s) = \frac{9s^2 + 35s + 36}{6(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{5}{3(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{4}{3(s+2)(s+3)} + \frac{3}{2(s+3)} \quad (10.7)$$

comme une combinaison d'Erlang généralisé $E(1,2,3), E(2,3)$ et $E(3)$. Est-ce que cette fonction est une densité ?

Réponse: $f(t) = \frac{5}{18}E(1,2,3) + \frac{4}{18}E(2,3) + \frac{1}{2}E(3)$ est un mélange convexe d'Erlang généralisé, donc une densité.

Définition 10.4. *Nous appelerons une decomposition de type* (**??**) *d'une transformée de Laplace rationelle avec singularités réelles decomposition de Cumani/Coxienne.*

Exercice 10.13. *a) Écrivez comme combinaison d'exponentielles la fonction $b(t)$ avec transformée*

$$b^*(s) = \frac{6}{13} \frac{2s^2 + 10s + 13}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

b) Est-ce une densité ?

Réponse: a) La décomposition en fractions simples donne $b(t) = \frac{15}{13}e^{-t} - \frac{3}{13}(2e^{-2t}) + \frac{1}{13}(3e^{-3t}) \Leftrightarrow \bar{B}(t) = \frac{15}{13}e^{-t} - \frac{3}{13}e^{-2t} + \frac{1}{13}e^{-3t}$ et montre que ce n'est pas une densité hyper-exponentielle. b) Oui, car les coefficients $\alpha_i = \frac{\beta_i}{\prod_{j=i}^{n} \lambda_j}$ de la décomposition Coxienne sont $\boldsymbol{\alpha} = \left\{\frac{5}{13}, \frac{4}{13}, \frac{4}{13}\right\}$, donc positifs. Vérifier la réponse avec le package BUTools, en utilisant la commande : $APHRepresentation([\frac{15}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{1}{13}], diag([-1, -2, -3]))$

Remarque 10.11. *L' exercice antérieur suggère que les lois d'Erlang généralisées fournissent une meilleure base pour démontrer la positivité que les hyper-exponentielles.*

Exercice 10.14. *Montrer que la fonction*

$$f(t) = 3(e^{-t}) - 3(2e^{-2t}) + 3e^{-3t}$$

est une densité, en calculant la transformée de Laplace et sa décomposition Coxienne. Donner le vecteur initial et la matrice bidiagonale A dans la représentation Coxienne de $f(t)$.

Exercice 10.15. *a) Montrer que la fonction*

$$2e^{-t} - 6e^{-2t} + 6e^{-3t} = 2e^{-t} - 3(2e^{-2t}) + 2(3e^{-3t}) = 2e^{-t}g(t)$$

est une densité.

b) La transformée de Laplace est

$$f^*(s) = \frac{2(s^2 + 2s + 3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{2}{3}\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} - \frac{1}{3}\frac{6}{(s+2)(s+3)} + \frac{2}{3}\frac{3}{s+3}$$

Donner des bornes inferieures et superieures pour l'ordre d de la représentation Coxienne minimale, en utilisant $BuToolsVerbose = 1 \quad CheckMEPositive[\alpha, A]$ de BUTools.

Réponse: a) $g(t) = e^t f(t)/2 = 1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t}$. $g'(t) = 3e^{-t} - 6e^{-2t} = 3e^{-t}(1 - 2e^{-t}) = 0 \Leftrightarrow t_* = Ln[2] > 0$. $g(t_*) = \frac{1}{8} > 0$ donc $g(t) > 0$ et $f(t)$ est une densité. b) $4 \leq d \leq 5$ (BUTools ne détermine pas l'ordre de la représentation minimale, qui est 4).

Exercice 10.16. *Est-ce que la fonction*

$$f(t) = 4(e^{-t}) - 6(2e^{-2t}) + 3(3e^{-3t})$$

est une densité ? Est-ce une densité de type phase ? Verifier la reponse en BUTools avec $CheckMEPositive[\alpha, A]$.

Exercice 10.17 (*). *Est-ce que la fonction*

$$\bar{F}[t] = \frac{21}{5}e^{-2x} - \frac{35}{4}e^{-3x} + \frac{77}{12}e^{-4x} - \frac{13}{15}e^{-7x}$$

est une fonction de survie ? S'agit-il d'une loi Coxienne, et si oui, de quel ordre ?

Réponse: En tentant notre chance avec la décomposition Coxienne, on découvre que l'ordre est 4.

Exercice 10.18 (*). *Ecrivez des équations déterminant les coefficients β_i dans la décomposition Coxienne*

$$\frac{N[s]}{[s-\gamma_1][s-\gamma_2][s-\gamma_3][s-\gamma_4]} =$$
$$\frac{\beta_1}{[s-\gamma_1][s-\gamma_2][s-\gamma_3][s-\gamma_4]} + \frac{\beta_2}{[s-\gamma_2][s-\gamma_3][s-\gamma_4]} + \frac{\beta_3}{[s-\gamma_3][s-\gamma_4]} + \frac{\beta_4}{s-\gamma_4}$$

[utilisée pour décomposer la transformée de Laplace].Donner des formules pour les β_i.

Réponse: $N(s) = \beta_1 + \beta_2(s-\gamma_1) + \beta_3(s-\gamma_1)(s-\gamma_2) + \beta_2(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)(s-\gamma_3)$. Cette expansion est appelée le développement de «différences divisées» de Newton http ://fr.wikipedia.org/wiki/Interpolation_new
En posant $s = \gamma_1, \gamma_2, ...,$ on obtient :

$$\begin{cases} \beta_1 = N[\gamma_1] \\ \beta_1 + \beta_2[\gamma_2 - \gamma_1] = N[\gamma_2] \\ \beta_1 + \beta_2[\gamma_3 - \gamma_1] + \beta_3[\gamma_3 - \gamma_2][\gamma_3 - \gamma_1] = N[\gamma_3] \\ \beta_1 + \beta_2[\gamma_4 - \gamma_1] + \beta_3[\gamma_4 - \gamma_2][\gamma_4 - \gamma_1] + \beta_4[\gamma_4 - \gamma_3][\gamma_4 - \gamma_2][\gamma_4 - \gamma_1] = N[\gamma_4] \end{cases}$$

$$\beta_1 = N[\gamma_1], \beta_2 := N[\gamma_1, \gamma_2] = \frac{N[\gamma_2] - N[\gamma_1]}{\gamma_2 - \gamma_1}, \beta_3 := N[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \frac{N[\gamma_1, \gamma_3] - N[\gamma_1, \gamma_2]}{\gamma_3 - \gamma_2},$$
$$\beta_4 := N[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4] = \frac{N[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4] - N[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]}{\gamma_4 - \gamma_3}.$$

β_i sont les «différences divisées» de Newton.

10.5 Les distributions acycliques $\mathcal{A}PH$ (Coxiennes) et la positivité des combinaisons d'exponentielles negatives

Exercice 10.19. *a) Est-ce que la fonction*

$$\bar{F}(t) = 2e^{-t} - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

avec transformée de Laplace

$$\bar{F}^*(s) = \frac{s^2+4s+7}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{4}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{1}{(s+2)(s+3)} + \frac{1}{s+3}$$

est une fonction de survie ?

b) Ecrivez la fonction comme combinaison d'exponentielles et calculer la densité associée.

c) Ecrivez des équations determinant α_i dans la "decomposition de Newton"

$$\frac{N(s)}{(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)(s-\gamma_3)(s-\gamma_4)} =$$
$$\frac{\alpha_1}{(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)(s-\gamma_3)(s-\gamma_4)} + \frac{\alpha_2}{(s-\gamma_2)(s-\gamma_3)(s-\gamma_4)} + \frac{\alpha_3}{(s-\gamma_3)(s-\gamma_4)} + \frac{\alpha_4}{s-\gamma_4}$$

(utilisée pour decomposer la transformée).

Donner des formules pour les α_i.

Réponse: a) Oui, c'est un melange convexe d'Erlang généralisées.
b) $f(t) = 2e^{-t} - 3(2e^{-2t}) + 2(3e^{-3t}) = 2e^{-t} - 6e^{-2t} + 6e^{-3t}$
c)

$$\begin{cases} \alpha_1 = N[\gamma_1] \\ \alpha_1 + \alpha_2(\gamma_2-\gamma_1) = N[\gamma_2] \\ \alpha_1 + \alpha_2(\gamma_3-\gamma_1) + \alpha_3(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_1) = N[\gamma_3] \\ \alpha_1 + \alpha_2(\gamma_4-\gamma_1) + \alpha_3(\gamma_4-\gamma_2)(\gamma_4-\gamma_1) + \alpha_4(\gamma_4-\gamma_3)(\gamma_4-\gamma_2)(\gamma_4-\gamma_1) = N[\gamma_4] \end{cases}$$

$$\alpha_1 = N[\gamma_1], \alpha_2 := N[\gamma_1,\gamma_2] = \frac{N[\gamma_2]-N[\gamma_1]}{\gamma_2-\gamma_1}, \alpha_3 := N[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3] = \frac{N[\gamma_1,\gamma_3]-N[\gamma_1,\gamma_2]}{\gamma_3-\gamma_2},$$
$$\alpha_4 := N[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4] = \frac{N[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4]-N[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]}{\gamma_4-\gamma_3}, ...$$

α_i sont les "differences divisées" de Newton.

Exercice 10.20. *a) Ecrivez comme combinaison d'exponentielles la fonction $b(t)$ avec transformée*

$$b^*(s) = \frac{6}{13}\frac{2s^2+10s+13}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

b) Est-ce une densité ?

Réponse: a)$b(t) = \frac{15}{13}e^{-t} - \frac{6}{13}e^{-2t} + \frac{3}{13}e^{-3t} \Leftrightarrow \bar{B}(t) = \frac{15}{13}e^{-t} - \frac{3}{13}e^{-2t} + \frac{1}{13}e^{-3t}$
b) Oui, car les coefficients de la decomposition de Newton $\left\{\frac{30}{13}, \frac{24}{13}, \frac{12}{13}\right\}$ sont positives.

10.6 Une relation entre les distributions de type phase en temps discret et en temps continu

Considerons les formules

$$\begin{aligned} \phi_Q(z) &= \mathrm{Ez^N} = \boldsymbol{\alpha}(\mathrm{z}^{-1}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\mathbf{1} \\ f_B^*(s) &= \mathrm{Ee^{-sN}} = \boldsymbol{\alpha}(\mathrm{s}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} = (-\boldsymbol{B})\mathbf{1} \end{aligned} \tag{10.8}$$

des fonctions génératrices de moments des distributions de type phase en temps discret, et des transformées de Laplace des distributions de type phase en temps continu.

Remarque 10.12. *Si on choisit comme variable z^{-1} dans le premier cas, les deux définitions coincident, sauf la formule du vecteur $\boldsymbol{a}$.*

Lemme 10.1. *Pour chaque distribution de type phase en temps discret associé a une matrice sous-stochastique $\boldsymbol{Q}$, il est possible de definir une famille des distributions de type phase en temps continu, avec matrices génératrices :*

$$\boldsymbol{B}_c = c(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{I}), \quad c > 0 \tag{10.9}$$

Les fonction generatices correspondants satisfont

$$\phi_Q(\frac{c}{c+s}) = f_{B_c}(s).$$

Exemple 10.2. *Pour la loi géomètrique de paramétre p, $\phi_G(z) = z(1-pz)^{-1}(1-p)$, les lois continues associées sont exponentielles de paramétre $\mu_c = c(1-p), c > 0$. Reciproquement, à la loi exponentielle de paramétre μ, $f_X^*(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$, on peut associer des lois géomètriques de paramétre $p = 1 - \frac{\mu}{c}, c > \mu$.*

Chapitre 11

Problèmes de premier passage des marches aléatoires et relations de récurrence

11.1 La marche symmétrique par la méthode du conditionnement sur le premier pas, et par les chaînes de Markov

Exercice 11.1. La marche aléatoire symétrique. *On cherche a trouver la probabilité d'un joueur qui s'engage dans une série de parties (indépendantes) à un jeu où à l'issue de chaque partie il gagne 1F avec une probabilité* $1/2$ *et perd 1F avec une probabilité* $1/2$*, et qui décide de s'arrêter de jouer dès qu'il aura B francs en poche, ou dès qu'il n'a plus d'argent. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on note* X_n *la fortune du joueur au bout de n parties, et* $X_0 = i$ *sa fortune à l'entrée dans le Casino. Ça revient à étudier la marche aléatoire symétrique*

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, X_n \in \mathbb{Z}$$

avec $P[Z_n = 1] = P[Z_n = -1] = 1/2$*, jusqu'au «temps d'arret/sortie»* $N = \min[N(0), N(B)]$ *quand le processus sort de l'intervalle* $[0, B]$ *(en prenant* 0 *et* B *comme états absorbants). On dénotera par* $\mathrm{E_i}$ *l'espérance en commençant de i (conditionnant sur* $X_0 = i$*), et on désigne par E l'événement que le joueur gagne, c.-à-d.* $E = \{x_N = B\} = [\exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $X_n = B, X_k > 0, k = 1, ..., n-1]$. *Pour tout i de* $\{0, ..., B\}$*, on pose :*

$$b_i = P(E \mid X_{t_0} = i) = P(E \mid \text{ en partant de } i)$$

(la probabilité du «bonheur»).

1. *En supposant* $B = 3$*, énumérer et esquisser* **l'espace de tous les chemins** *du bonheur/ruine qui commencent avec* $X_0 = 1$*, en développant «l'arbre de toutes les possibilités». Calculer la probabilité du chaque chemin, et vérifier que leur somme vaut* 1*.*
2. *Expliquer graphiquement sur «l'arbre de toutes les possibilités» les équations* $b_1 = 1/2b_2, b_2 = 1/2b_1 + 1/2$*. Déduisez* b_0, b_3*, et en suite* b_1, b_2*.*
3. *En supposant* $B = 4$*, calculer* b_1, b_2 *et* b_3*.*
4. *Calculer* $b_i, i = 0, ..., B$ *pour B quelconque.*
5. *Calculez les espérances* $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, ..., t_{B-1}), t_i = E_i[N]$ *du nombre des pas du jeu, pour B quelconque.*

Réponse: On pourrait essayer de calculer b_i en ajoutant les probabilités de tous les chemins du bonheur qui commencent avec $X_0 = 1$ (en regardant l'arbre de toutes les possibilités). Mais comme cet arbre est (typiquement) infini et très compliqué, cette analyse n'est pas facile. Par contre, une approche «diviser pour conquérir» de décomposition de l'arbre dans ses branches obtenues en conditionnant sur le premier pas ramène à des'équations linéaires faciles à résoudre.

Cet exercice illustre de nouveau la puissance de la **méthode du conditionnement sur le premier pas** Durrett [1999] ("first step analysis", et il constitue aussi une deuxième rencontre avec les chaînes de Markov.

Exercice 11.2. *a) Ecrivez les équations pour* $\boldsymbol{b} = (b_0, ..., b_4)$ *dans la forme* $\boldsymbol{b} = P\boldsymbol{b}$*. Donnez une interpretation probabiliste pour les elements de la matrice* P*.*

b) Ecrivez les équations pour $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3), t_i = E_i[N]$ *dans la forme* $\boldsymbol{t} = Q\boldsymbol{t} + \mathbf{1}$*. Donnez des interpretation probabilistes pour les elements de* Q

R : La matrice P de la marche symétrique absorbante sur $[0, 4]$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 11.1. *Pour les marches sur* $\mathbb{Z}$*, les elements de la matrice* P*,*

$$(p_{ij} = \mathbb{P}\{X_n = j / X_{n-1} = i\} = \mathbb{P}\{Z_n = j - i\})_{i,j \in \mathbb{N}},$$

representent des probabilités de transition de i *a* j*. Les elements* $0, 4$ *sont appellés absorbants, et les autres elements* $1, 2, 3$ *sont appellés transients.* Q *est la matrice de transition entre les elements transients, et* $\mathbf{p}$ *sont les probabilités d'absorbtion dans un pas.*

Il s'avère que les mêmes systèmes linéaires, avec la même structure matricielle, décrivent la solution des problèmes analogues pour toutes les chaînes de Markov à espace d'états comptable, et avec des états absorbants.

Par contre, dans le cas des matrices Q *à «diagonales»' constantes comme dans notre exemple, appellées matrices de Toeplitz, il est plus efficace d'aborder les systèmes linéaires correspondantes par la méthode des recurrences à coefficients constants.*

Dans les chapitres suivants, nous continuerons a regarder des problèmes Markoviennes de premier passage, résolubles par le conditionnement sur le premier pas.

11.2 La ruine du joueur pour la marche aléatoire simple

Nous généralisons maintenant les résultats du chapitre précédant pour la marche unidimensionnelle symétrique au cas des marches simples asymétriques. En même temps, nous étudierons d'autres problèmes concernant l'absorption de la marche aléatoire simple unidimensionnelle (des équations similaires peuvent être obtenues dans toute dimension, mais les solutions sont disponibles explicitement seulement dans le cas unidimensionnel).

Exemple 11.1. La ruine du joueur et autres «problèmes de Dirichlet» pour la marche aléatoire simple. *Considérons la marche aléatoire simple*

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, X_n \in \mathbb{Z}$$

avec (Z_n) *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi* $P[Z_n = \pm 1] = p, q$*. Nous étudierons la marche jusqu'au «temps d'arret/sortie»* $N = \min[N(0), N(B)]$ *quand le processus sort de l'intervalle* $[0, B]$ *pour* B *donné, c.-à-d. on prend* 0 *et* B *comme états absorbants. On appelle ce problème* **la ruine du joueur***, à cause de l'interprétation d'un joueur* *qui s'engage dans une série de parties (indépendantes) à un jeu où à l'issue de chaque partie il gagne 1F avec une probabilité p et perd 1F avec une probabilité $q = 1 - p$, et qui décide de s'arrêter de jouer dès qu'il aura B francs en poche, ou dès qu'il n'a plus d'argent. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la fortune du joueur au bout de n parties, et $X_0 = i$ représente sa fortune à l'entrée dans le Casino. On dénotera par $\mathrm{E_i}$ l'espérance en commençant de i (conditionnant sur $X_0 = i$), et on désigne par E l'événement que le joueur gagne, c.-à-d. $E = \{x_N = B\} = [\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = B, X_i > 0, i = 1, ..., n-1]$. Pour tout i de $\{0, ..., B\}$, on pose :*

$$b_i = P\left(E \mid \text{ en partant de } i\right).$$

1. *Quelles sont les valeurs de b_0 et b_B ?*
2. *Montrer que :*

$$\forall\, i \in \{1, ..., B-1\}\ ,\ b_i = p\, b_{i+1} + q\, b_{i-1} \text{ (on rappelle que } q = 1-p\text{).}$$

3. *Obtener une expression explicite de b_i pour tout i de $\{1, ..., B\}$.*
4. *Pour tout i de $\{0, ..., B\}$, on pose $r_i = P(F \mid\mid$ en partant de $i)$ où F est l'événement »'le joueur repart ruiné»' . En procédant comme auparavant, montrer que :*

$$r_i = \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^B}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^B} \text{ si } p \neq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{B-i}{B} \text{ si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Pour tout i de $\{0, ..., B\}$, calculer $r_i + b_i$. Que peut-on en déduire ?
5. *Calculez les probabilités de ruine quand $\Psi_i = \lim_{B\to\infty} r_i$, pour $p > q$ et pour $p \leq q$. Expliquez la relation avec le comportement de $X(t), t \to \infty$.*
6. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du gain final $f_i = \mathrm{E_i X_N}$. Calculez cette fonction pour $p = q$.*
7. **Probléme homogène/de gain final arbitraire**. *Obtenez les équations de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $f_x = \mathrm{E_x g(X_N), g : \{0, b\} \to \mathbb{R}}$.*

---

8. *Obtenez un système d'équations pour le temps de jeu espéré : $t_i = \mathrm{E_i[N]}$. Calculez cette fonction, pour $p = q$, et pour $p < q$, quand $B \to \infty$.*
9. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du «coùt cumulé d'inventaire» $c_i = \mathrm{E_i \sum_{t=0}^{N-1} X(t)}$. Calculez cette fonction, pour $p = q$, et pour $p < q$, quand $B \to \infty$.*
10. **Probléme non-homogène/de coût total arbitraire**. *Obtenez les équations de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $c_x = E[\sum_{t=0}^{N-1} h(X(t))]$.*

---

11. **Gain final actualisé/fonction génératrice des probabilités de** *N. Montrer par conditionnement que $\phi_x = \phi_x(a) = \mathrm{E_x a^N g(X_N), a \in (0, 1]}$ satisfait :*

$$\begin{aligned} \phi_x &= \mathrm{E_x[a^N g(X_N)] = a(p\phi_{x+1} + q\phi_{x-1})}, \qquad (11.1) \\ \phi_x &= g(x) \text{ pour } x \in \{0, B\}. \end{aligned}$$

   Par exemple, dans le cas $g(x) = 1$, nous calculons la fonction génératrice des probabilités de N, $\phi_x(a) = \mathrm{E_x a^N = \sum_{k=0}^{\infty} a^k P[N = k]}$. Rémarquons que la loi de N, $P[N = k]$ est plus difficile a obtenir – voir Section 11.4. Par contre, la fonction génératrice des probabilités n'est pas difficile a obtenir, et nous allons pouvoir en suite obtenir la loi par extraction des coefficients Taylor de $\phi_x(a)$.

   Généralisation : *Obtenez les équations de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $v_x = \mathrm{E_x[a^N g(X_N) + \sum_{t=0}^{N-1} a^t h(X(t))], a \in (0, 1)}$.*

---

12. **Temps de jeu espéré et "fin désiré"**. *Avec* $B = \infty, N = N_0$*, déduire, en differentiant* (11.1) *par rapport à a, et en passant à la limite* $a \to 1$*, que* $t_x := E_x[N; N < \infty]$ *satisfait* $Pt_x + \Psi_x = t_x, t_0 = 0$.
13. **Coût total et "fin désiré"**. *Avec* $B = \infty, N = N_0$*, déduire que* $c_x = E[\sum_{t=0}^{N-1} h(X(t)); N < \infty]$ *satisfait* $Pc_x + h(x)\Psi_x = c_x, c_0 = 0$.

Nous allons résoudre cet exercice en utilisant la méthode du **conditionnement sur le premier pas** Z_1, l'idée de laquelle est d'obtenir des relations de récurrence qui lient les valeurs de l'espérance conditionnée à partir de tous les points de départ possibles. Nous verrons, en examinant les questions de cet exercice, qu'ils utilisent toutes le même opérateur

$$(Gf)_n := (P - I)(f)_n = p\, f_{n+1} + q\, f_{n-1} - f_n \tag{11.2}$$

la seule différence étant dans les conditions frontière et dans la partie nonhomogène.

Solution :

1. $b_0 = 0, b_B = 1$
2. Gain final espéré, $g(x) = 1_{x=B}$. En conditionnant, on trouve :

$$\begin{aligned} b_n &= \mathbb{P}_n[X(N) = B] \\ &= p\, \mathbb{P}_n[X(N) = B \mid \text{ en partant de n+1}] + q\, \mathbb{P}_n[X(N) = B \mid \text{ en partant de n-1}] \\ &= p\, b_{n+1} + q\, b_{n-1} \quad 1 \le n \le B - 1 \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[X(N) = B / X(0) = n, X(1) = n \pm 1] = \\ &\mathbb{P}[X(N) = B / X(1) = n \pm 1] = \mathbb{P}[X(N) = B / X(0) = n \pm 1] = b_{n\pm1} \end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov et l'homogénéité en temps (le fait que "changement d'heure" après un pas ne change pas le résultat).

3. Quand $p = q = 1/2$, $b_x = P_x[X(N) = B]$ satisfait :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{b_{n-1}}{2} \quad \text{for any } 1 \le n \le B - 1 \\ b_B &= 1 \\ b_0 &= 0 \end{aligned}$$

La méthode de résolution des équations de récurrence homogènes à coefficients constants commence en cherchant des solutions de la forme $b_n = r^n$. Si les racines de l'équation auxiliaire sont distinctes, la solution générale est :

$$b_n = k_1 \rho_1^n + k_2 \rho_2^n$$

où k_1, k_2 sont déterminées en utilisant les conditions frontière. Ici, cherchant des solutions puissances ρ^x ramène à l'équation $\rho^2 - 2\rho + 1 = 0$ à deux racines identiques $\rho_{1,2} = 1$. La solution générale est $b_x = A + Bx$. Les conditions frontière donnent $b_x = \frac{x}{B}$.

Solution finale si $p \neq q$: $b_n = \frac{1-(q/p)^n}{1-(q/p)^B}$.
Pour aller plus vite, remarquez que la solution satisfaisante $b_0 = 0$ est de la forme :

$$b_i = \begin{cases} k\ (1 - (\frac{q}{p})^i) & \text{quand } p \neq q \\ k\ i & \text{quand } p = q \end{cases}$$

et déterminer k tel que la condition frontière de b_B soit satisfaite.

4. $r_i + b_i = 1$, et donc la marche sera finalement absorbée dans une des deux frontières (elle ne peut pas rester à l'intérieur indéfiniment).
5. Pour $p = q$, $\lim_{B\to\infty} r_n = \lim_{B\to\infty} \frac{B-n}{B} = 1$.
En conclusion,

$$\Psi_n := \lim_{B\to\infty} r_{n,B} = \lim_{B\to\infty} \frac{(q/p)^n - (q/p)^B}{1-(q/p)^B} = \begin{cases} (q/p)^n, & q < p \\ 1, q > p. \end{cases}$$

Remarque 11.2. *Le fait que $\Psi_n = \rho_i^n$, où ρ_i satisfait l'équation charactéristique, a une interpretation probabiliste evidente, car $\Psi_n = \Psi_1 \Psi_{n-1} \Longrightarrow \Psi_n = (\Psi_1)^n$. Par contre, pour pour decider si $\Psi_1 = 1$ ou si $\Psi_1 = \frac{q}{p}$, on a besoin d'utiliser l'esperance de Z_1 est la loi des nombres forts.*

6. $f_x = E_x[X(N)]$ (valeur finale espérée) satisfait $Gf(x) = 0, f(0) = 0, f(B) = B$.
Pour $p = q$, la solution $f_x = x$ est obtenue comme ci-dessus :

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{f_{x+1}}{2} + \frac{f_{x-1}}{2} \quad \text{for any } 1 \le x \le B-1 \\ f_B &= B \\ f_0 &= 0 \end{aligned}$$

(C'est aussi une fonction «harmonique», mais avec conditions frontière différentes.)

7. $t_x = E_x[N]$ (temps de sortie espéré) est un coùt total accumulé espéré (obtenu en prenant $h(x) = 1$), qui satisfait le système inhomogène

$$t_x = p(1+E_{x+1}[N]) + q(1+E_{x-1}[N]) = pt_{x+1} + qt_{x-1} + 1 \Longleftrightarrow Gt(x) + 1 = 0, t(0) = 0, t(B) = 0.$$

Pour $p = q$

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + 1 \quad \text{for any } 1 \le x \le B-1 \\ t_B &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution d'une équation nonhomogène est donnée par

$$t_x = t_p(x) + h(x)$$

où $t_p(x)$ est une solution particulière et $h(x)$ est la solution générale de l'équation homogène. Commençons par l'équation homogène. La solution générale homogène («fonction harmonique») $h(x) = A + Bx$ pour cet opérateur a été déjà obtenue ci-dessus. Nous aimerions maintenant trouver une solution particulière $t_p(x)$ de l'équation $Gt_p(x) = -1$ de la même forme que la partie nonhomogène -1 de l'équation, donc , $t_p(x) = C$; mais comme les constantes, et puis aussi les fonctions linéaires vérifient l'équation homogène $Gt_p(x) = 0$, nous devrons modifier deux fois cette forme en multipliant par x, en arrivant donc à $t_(x) = Cx^2$. Comme $Gx^2 = 2x(p-q)+1 = 1$, on trouve $C = -1$ et finalement la solution particulière $t_p(x) = -x^2$. La solution générale est donc $t(x) = -x^2 + A + Bx$ et les conditions frontière ramènent à $t_x = x(B-x)$. Pour $p \neq q$

$$\begin{aligned} t_x &= pt_{x+1} + qt_{x-1} + 1 \quad \text{for any } 1 \leq x \leq B-1 \\ t_B &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution générale homogène avec $p \neq q$ est $h(x) = k_1(q/p)^n + k_2$ et le terme nonhomogène 1 suggère une solution particulière constante , k, mais comme ça satisfait l'équation homogène, on modifie à kn. Finalement, $k = \frac{1}{q-p}$. La solution particulière est $t_p(x) = \frac{x}{q-p}$; elle satisfait déjà $t_p(0) = 0$. La partie homogène $h(x) = t_x - t_p(x)$ devra aussi satisfaire $h(0) = 0$ et donc elle sera de la forme $h(x) = A\widetilde{h}(x)$ où $\widetilde{h}(x) = ((q/p)^x - 1)$. En demandant que $t_n = \frac{n}{q-p} + A(q/p)^n - 1)$ satisfait la condition frontière $t_B = 0$ on trouve :

$$t_n = t_p(n) - t_p(B)\frac{\widetilde{h}(n)}{\widetilde{h}(B)} = \frac{n}{q-p} - \frac{B}{q-p}\frac{(q/p)^n - 1}{(q/p)^B - 1}.$$

La limite quand $B \to \infty$ est $t_n = \begin{cases} \infty & \text{si } p > q \\ t_p(n) = \frac{n}{q-p} & \text{si } p < q \end{cases}$; on peut aussi obtenir ce résultat en utilisant l'approximation détérmiste $X_n - X_0 \sim nE(Z_1)$, appelée aussi limite fluide.

8. $c_x = E_x[\sum_0^{N-1} X(t)]$ (coùt total d'inventaire espéré) satisfait le système inhomogène $Gc(x) + x = 0, c(0) = 0, c(B) = 0$. Pour $p = q$:

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{c_{x+1}}{2} + \frac{c_{x-1}}{2} + x \quad \text{for any } 1 \leq x \leq B-1 \\ c_B &= 0 \\ c_0 &= 0 \end{aligned}$$

Une solution particulière est $c_p(x) = \frac{-x^3}{3}$. Finalement, on arrive à $c(x) = \frac{x(B^2-x^2)}{3}$. Pour $p \neq q$, une solution particulière est $c_p(x) = \frac{x^2}{2(q-p)}$ (elle satisfait déjà $c_p(0) = 0$). La partie homogène satisfaisant $h(0) = 0$ sera toujours $h(x) = A\widetilde{h}(x)$ où $\widetilde{h}(x) = ((q/p)^x - 1)$. En demandant que $c_n = c_p(n) + A(q/p)^n - 1)$ satisfait la condition frontière $c_B = 0$ on trouve :

$$c_n = c_p(n) - c_p(B)\frac{\widetilde{h}(n)}{\widetilde{h}(B)}$$

La limite quand $B \to \infty$ est $c_n = \begin{cases} \infty \text{ si } p > q \\ c_p(n) \text{ si } p < q \end{cases}$.

9. $Gf(x) = 0, f(0) = g(0), f(B) = g(b)$

10. $Gc(x) + h(x) = 0, c(0) = 0, c(B) = 0$
11. Soit $T_x = T;$ on part de x. Remarquer que

$$T_x|\{Z_1 = \pm 1\} = 1 + T_{x\pm 1}, \text{ i.e. } \mathcal{L}[N_x|\{Z_1 = \pm 1\}] = \mathcal{L}[1 + T_{x\pm 1}].$$

On a

$$\phi_x = E[a^{N_x}] = pE[a^{1+T_{x+1}}|Z_1 = 1] + qE[a^{1+T_{x-1}}|Z_1 = -1] = a(p\phi_{x+1} + q\phi_{x-1}).$$

On a $v_x = g(x)$, pour $x \in \{0, B\}$, et le conditionnement donne la relation : $v_x = a(pv_{x+1} + qv_{x-1}) + h(x)$.

Remarque 11.3. *Les questions qui nous intéressent se regroupent en quatre types :*

1. *"Gain final espéré"* $f_n = \mathrm{E_n[g(X_N)]}$ *induit par* $g : \{0, B\} -> \mathbb{R}$ *(pb. Dirichlet), satisfaisant :*
$$f_n = pf_{n+1} + qf_{n-1} \Longleftrightarrow (Gf)_n = 0, \quad f(0) = g(0), f(B) = g(B)$$
Voir questions 3.-7.
2. *"Coùt total accumulé espéré"* $c_n = \mathrm{E_n}[\sum_0^{\mathrm{N}-1} \mathrm{h(X_i)}]$*, induit par* $h : \{1, 2, ..., n-1\} -> \mathbb{R}$ *(pb. de Poisson), satisfaisant :*
$$c_n = h(n) + pc_{n+1} + qc_{n-1} \Longleftrightarrow (Gc)_n + h(n) = 0, \quad c(0) = 0, c(B) = 0$$
Voir questions 8.-10.
3. *"Gain final espéré actualisé "* $\phi_n = \mathrm{E_n[a^N g(X_N)], a} \in (0, 1]$*, induit par* $g : \{0, B\} -> \mathbb{R}$*, satisfaisant :*
$$\phi_n = a(p\phi_{n+1} + q\phi_{n-1}) \quad \phi(0) = g(0), \phi(B) = g(B)$$
Voir question 11.
4. *"Coùt total accumulé espéré, multiplié par une fonction de la position finale"* $c_n = \mathrm{E_n}[\mathrm{g(X_N)} \sum_0^{\mathrm{N}-1} \mathrm{h(X_i)}]$*, induit par* $h : \{1, 2, ..., n-1\} -> \mathbb{R}, g : \{0, B\} -> \mathbb{R}$*, satisfaisant :*
$$c_n = f(n) + pc_{n+1} + qc_{n-1} \Longleftrightarrow (Gb)_n + f(n)h(n) = 0, \quad c(0) = 0, c(B) = 0, \tag{11.3}$$
où $f(n)$ *est la solution du pb. Dirichlet 1 avec gain final* g.
Voir question 13.
Au cas particulier $h(n) = 1$*, on trouve le "temps total espéré, multiplié par une fonction de la position finale"* $t_n = \mathrm{E_n[Ng(X_N)]}$*, induit par* $g : \{0, B\} -> \mathbb{R}$*. Celui satisfait :*
$$t_n = f(n) + pt_{n+1} + qt_{n-1} \Longleftrightarrow (Gb)_n + f(n) = 0, \quad t(0) = 0, t(B) = 0, \tag{11.4}$$
où $f(n)$ *est la solution du pb. Dirichlet 1.*
Voir question 12.

Conclusion : Nous avons rencontré ici quelques idées très importantes, appliquables en toute généralité à la modélisation Markovienne :

1. Les espérances liées aux temps de premier passage aux états transitoires, vues comme fonctions de l'état initial, satisfont certaines systèmes linéaires d'équations exprimant des "relations entre voisins transients", avec **une inconnue pour chaque état initial possible**.

2. Les équations s'obtiennent facilement par la méthode de conditionnement sur le premier pas (en utilisant essentiellement la propriété de l'oubli du passé des processus de Markov).
3. Les systèmes associés avec un processus fixe impliquent toujours la même partie homogène appelée «**opérateur**» G ou encore **générateur du processus**. C'est le premier MIRACLE des processus de Markov, d être charactérisé entièrement par un seul operateur. Par contre, les termes non homogènes et les conditions frontière varient (et certains incluent ces conditions dans l'operateur).

Remarque 11.4. *Les problèmes de cette section ont aussi des versions à espace d'états continu, obtenu en considérant des marches avec incréments infinitésimaux* ϵ*, et en prenant la limite* $\mathbb{E} \to 0$*. La marche aléatoire devient ainsi un processus avec chemins continus, appelé mouvement Brownien. L'opérateur associé est un opérateur différentiel, le Laplacien.*

Remarque 11.5. *(*) Les marches aléatoires sont des cas particuliers des chaînes de Markov.* [§] *Il s'avère que les mêmes équations décrivent la solution des problèmes analogues pour toutes les chaînes de Markov à espace d'états comptable, et avec des états absorbants.*

Dans le cas des chaînes de Markov en temps discret et à espace d'états fini ou dénombrable, l' opérateur est la matrice $P - I$*, où* P *est la "matrice de transitions". Par exemple, la matrice* P *de la marche symétrique absorbante sur* $[0, 4]$ *est*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'opérateur $G = P - I$ *agit sur un vecteur* $\vec{v} = (v_0, ..., v_4)$ *par la formule* $(P - I)\vec{v} = (0, \frac{v_0+v_2}{2} - v_1, \frac{v_1+v_3}{2} - v_2, ..., \frac{v_{n-1}+v_{n+1}}{2} - v_n, ..., 0)$.

Pour le cas d'une marche aléatoire $X(t) = \sum_{i=1}^{t} Z_i$ *avec des pas bornés* $p_k = P[Z_i = k], k \in [-c, d]$ *on a encore* $G = P - I$*, où* $P = \sum_k p_k T^k$ *et* T *est l'opérateur de translation* $(Tf)_k = f_{k+1}, k \in \mathbb{Z}$.

Finalement, nous pourrions obtenir les équations correspondantes pour les problèmes respectifs, juste en remplaçant l'ancien opérateur par le nouveau.

Cela reste vrai pour toute la classe des processus de Markov, $X(t)$*, différents qu'elles soient, vivant sur des espaces* S *considérablement plus compliqués, la seule différence étant que l'opérateur* $G_X : F(S)- > F(S)$ *associé a ces processus sera plus compliquée !*

En conclusions, il existe une correspondance un á un entre les processus de Markov et une certaine classe des opérateurs déterministes associés ; nous l'appellerons «Le Dictionnaire».

11.3 Problèmes de premier passage sur un intervalle semi-infini

Soit $\psi_n := P[T_0 < \infty] = \lim_{B\to\infty} \psi_{n,B}, \psi_{n,B} := P[T_0 < T_B]$ (il s'agit d'une suite croissante des événements) la probabilité de ruine sur $[0, \infty)$, pour la marche simple. On vérifie facilement,

§. Pour une preuve que ces processus sont Markoviens au cas $Z_i \in \mathbb{Z}$, voir Exe 5,6 en poly Philippe-Viano, qui démontre que chaque processus définit par une récurrence

$$X_{n+1} = f(X_n, Z_n)$$

où Z_n sont i.i.d. est Markovien. Pour les marches sur $\mathbb{Z}$, la matrice de transition $P = (p_{ij} = \mathbb{P}\{X_n = j/X_{n-1} = i\} = \mathbb{P}\{Z_n = j - i\})_{i,j\in\mathbb{N}}$ a aussi la propriété que $P_{i,j} = p_{i-j}$, où $p_k = \mathbb{P}\{Z_n = k\}$; les matrices de cette forme, c.-à-d. à «'diagonales»' constantes, s'appellent matrices Toeplitz.

en partant des récurrences sur un domaine borné $[0, B]$, et en passant à la limite, que :

$$\psi_n = \lim_{B\to\infty} \psi_{n,B} = \begin{cases} (q/p)^n, & q < p \\ 1, & q \geq p. \end{cases}$$

Pour la marche simple, ou pour toute marche qui n'a pas des sauts en bas strictement plus grands que 1, cette solution peut être trouvée aussi directement, sans passer par la probabilité de ruine $r_n(B)$ sur $[0, B]$. On remarque d'abord que l'absence des sauts en bas plus grands que 1 impose une récurrence

$$\psi_n = \rho\psi_{n-1}, \quad \rho = P_n[T_{n-1} < \infty].$$

La fonction ψ_n est donc multiplicative en n, c.-à-d. $\psi_n = \rho^n$, avec un ρ determiné par l'èquation caractéristique ; par "miracle", il y aura toujours exactement une solution satisfaisant $\rho \in (0, 1)$. On choisira en suite $\rho = 1$ ou $\rho < 1$, selon l'espérance des sauts (qui determine la limite de X_n quand $n \to \infty$).

Mais, cette approche ne resout pas le cas des marches "qui sautent" parfois en bas. Dans ce cas, la solution n'est plus simplement une puissance, mais une combinaison linéaire des puissances. Le "miracle" se repete : il y aura toujours exactement autant des solutions satisfaisant $|\rho| \in (0, 1)$ qu'on aura besoin pour satisfaire toutes les conditions frontiére (en bas) nécessaires.

Exercice 11.3. *Calculer les probabilités de ruine pour une marche avec* $\left\{p_2 = \frac{3}{8}, p_1 = \frac{1}{8}, p_{-1} = \frac{1}{2}\right\}$

Une autre approche possible est par le théorème d'arret des martingales.

Examinons maintenant la méthode de fonctions génératrices (analogues à la transformée de Laplace), qui n'est pas réellement nécessaire pour la marche simple, mais qui est la méthode la plus puissante pour la resolution des èquations de differences (différentielles).

On ajoute les équations $\overline{\psi}_n = p\overline{\psi}_{n+1} + q\overline{\psi}_{n-1}$ multipliées respectivement par $z^n, n = 1, 2, ..$ On obtient ainsi une èquation pour la fonction $\overline{\psi}^*(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z^n \overline{\psi}_n$:

$$\overline{\psi}^*(z) = \frac{p\overline{\psi}_1}{\Phi(z) - 1}$$

où $\Phi(z) = Ez^{Z_1} = pz^{-1} + qz$

De lors,

$$\psi^*(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{zp\overline{\psi}_1}{p + qz^2 - z} = \frac{p - qz - pz\overline{\psi}_1}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p - qz - z(p-q)}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p}{p-qz}$$

car le numerator s'annule en 1 ("méthode du noyau") et donc $p\overline{\psi}_1 = p - q$.

De lors, $\psi_n = (q/p)^n$.

11.4 La loi du temps de ruine d'une marche aléatoire simple sur l'interval semi-infini $[0, \infty)$ (*)

Nous avons deja calculeé la probabilité de ruine pour une marche aléatoire simple sur $[0, \infty)$

$$\Psi_n := P[N(0) < \infty] = \lim_{B\to\infty} \Psi_{n,B} = \begin{cases} (q/p)^n, & q < p \\ 1, & q \geq p \end{cases},$$

en partant de la récurrence sur un domaine borné $[0, B]$ pour $\Psi_{n,B} := P[N(0) < N(B)]$, et en passant à la limite (la limite existe, car il s'agit d'une suite croissante des événements) la probabilité de ruine sur $[0, \infty)$ pour une marche aléatoire. Nous allons considerer maintenant une question plus difficile :

Question 2. *Soit $N = N(0)$. Quelles sont les probabilités $p(t) = P[N = t \mid$ en partant de 1] ?*

On a $p(1) = q, p(2) = 0 = p(4) + ..., p(3) = pq^3, p(5) =?$ (on rentre dans l'analyse combinatoire, ce qui presage l'usage des fonctions génératrices).

Dans un cadre Markovien, il est naturel d' "upgrader" (monter en gamme/grade ?) la question et trouver des équations pour $p_n(t) = P[N = t \mid$ en partant de $n], n \geq 1$.

Avant de repondre a cette question, remarquons que les calculs ci-dessous avec le passage à la limite $B \to \infty$ deviennent assez assomants pour les marches aléatoires non-simples. Alors, pour faire plus vite, nous admettront des résultats faciles a croire comme

$$E[Z_1] > 0 \Longrightarrow \lim_{x \to \infty} \Psi(x) = 0,$$

(que nous appellerons le "théorème de Bill Gates", officieusement, bien-sûr). Cela implique qu'il faut retenir seulement les racines ρ_i de l'équation charactèristique avec $|\rho_i| < 1$ quand on calcule les probas de ruine, et cela continue d'être vrai (même que moins evident) pour le calcul des espérances de temps de ruine.

Exercice 11.4. 1. *Pour une marche aléatoire simple sur l'interval $[0, B]$, obtenir des équations pour $p_n(t) = P[N = t/X_0 = n], n \in [1, B-1], t \geq 1$.*

2. *Obtenir un système d'équations pour*

$$\phi_i = \mathrm{E_i z^N} = \sum_{\mathrm{k=0}} \mathbb{P}_{\mathrm{i}}[\mathrm{N = k}]\mathrm{z^k}$$

(qui est la fonction génératrice des probabilités $\mathbb{P}[N = k|X_0 = i]$) pour la marche simple sur $[0, B]$, et résoudre, pour $z < \min(1, \frac{1}{\sqrt{4pq}})$.

3. *Avec $B = \infty, |z| < 1$, montrer que*

$$\phi_i = E_i[z^{N(0)}; N(0) < \infty] = E_i[z^{N(0)}] = \rho(z)^i,$$

avec $\rho(z)$ a determiner.

4. *Avec $B = \infty$ calculer les probabilités de ruine $P_1[N(0) = k], k = 1, 2, 3, ...$*

5. *Obtenir a) les probabilités de ruine et b) l'espérance*

$$t_n = E_n[N(0); N(0) < \infty]$$

à partir du résultat 3. précedent.

6. *Calculer la la fonction génératrice des probabilités $P_k = \mathbb{P}[N \leq k|X_0 = i]$.*

R :

1. $p_n(t) = pp_{n+1}(t-1) + qp_{n-1}(t-1), t, n \in \{1, 2, ...\}, p_0(t) = p_B(t) = 0, \forall t$. Résoudre une recursion double est rarement possible. Pour se debarasser d'une variable, passons à la fonction génératrice $\phi_n = \sum_{t=1}^{\infty} z^t p_n(t) = E_n[z^N]$.

2. $\phi_x(z) = z(p\phi_{x+1} + q\phi_{x-1}), \phi_0 = \phi_b = 1$.

   Remarque 11.6. *Pour $z \in (0, 1)$, c'est comme si avant chaque pas, on tuait le processus avec proba $1 - z$, et on cherchait la probabilité d'arriver en B ou 0 avant d'être tué !*

On arrive a $\phi_x(z) = A_1 z_1^x + A_2 z_2^x$, où $z_i = \frac{1\pm\sqrt{1-4pqz^2}}{2pz}$, $z^2 \leq \frac{1}{4pq}$ sont les racines de $ap\zeta^2 - \zeta + aq = 0$, et A_i satisfont $A_1 z_1^B + A_2 z_2^B = 1$, $A_1 + A_2 = 1$. Pour $z \to 0$, on a une "petite racine" (analytique en z autour de 0) $z_2 \sim qz \to 0$, et une "grande racine" $z_1 \sim \frac{1-pqz^2}{pz} \to \infty$.

Pour $z^2 < \frac{1}{4pq}$, on a $z_1 > z_2 \in \mathbb{R}$, et $\phi_x(z) = \frac{z_1^x - z_2^x + (z_1^B z_2^x - z_2^B z_1^x)}{z_1^B - z_2^B} = \frac{z_1^x(1-z_2^B)}{z_1^B - z_2^B} - \frac{z_2^x(1-z_1^B)}{z_1^B - z_2^B}$

3. Quand $B \to \infty$, la grande racine disparait et

$$\boxed{\phi_x(z) = (\rho(z))^x},$$

où $\rho(z) = z_2(z) = \frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2pz}$ est la petite racine (analytique autour de $z = 0$).

4. Les probas $p_1(t)$ de premier passage de 1 a 0 peuvent être recupèrées par le developpement limité binomial de la racine carré

$$\rho(z) = qz + pq^2z^3 + 2p^2q^3z^5 + 5p^3q^4z^7 + 14p^4q^5z^9 + 42p^5q^6z^{11} + O\left(z^{12}\right). \tag{11.5}$$

Ceci s'accomplit aussi par inversion de Lagrange de l'équation $z = \frac{\rho}{q+p\rho^2}$, qui donne $[z^n]\rho(z) = n^{-1}[\rho^{n-1}]\left((q+p\rho^2)^n\right)$. Finalement

$$p_1(2n-1) = [z^{2n-1}]\rho(z) = 2^{2n-1}\binom{1/2}{n}p^{n-1}q^n. \tag{11.6}$$

En particulier, si $p = q$, $\rho = z^{-1}(1-\sqrt{1-z^2}) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{8}z + \frac{2}{32}z^5 + ...$ donne les probabilités $P_1[N(0) = 1] = \frac{1}{2}$, $P_1[N(0) = 3] = \frac{1}{8}$, ...

5. a) En particulier,

$$\boxed{\Psi_n = P_n\left[N(0) < \infty\right] = \rho(1)^n}.$$

La racine $\rho := \rho(1)$ satisfait

$$\rho = \frac{1-|p-q|}{2p} = \begin{cases} 1 & q > p \\ \frac{q}{p} & p > q \end{cases} = \Psi(1).$$

Remarque 11.7. *Le resultat $\Psi_n = \rho^n$ peut aussi être obtenu par un raisonnement basée sur une decomposition en morceaux independants -voir Remarque 11.2 et Chapitre 12.5– ou en utilisant la martingale de Wald $\rho(z)^{X_n}, \rho \in (0,1)$– voir ci-dessous.*

b) Pour $t_n = E_n[N(0); N(0) < \infty]$, vérifions d'abord que $\phi_1'(z) = \rho'(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-4pqz^2}} - 1}{2pz^2}$

$$\Longrightarrow t_1 = \rho'(z)|_{z=1} = \rho\frac{1}{|q-p|} = \begin{cases} \frac{1}{q-p} & q > p \\ \rho\frac{1}{p-q} = \frac{q/p}{p-q} & p > q \\ \infty & p = q \end{cases},$$

et

$$t_x = \left[(\rho(z))^x\right]'|_{z=1} = \boxed{\begin{cases} \frac{x}{q-p} & q > p \\ \rho^x\frac{x}{p-q} & p > q \end{cases}}.$$

Remarque 11.8. *Nous pouvons aussi vérifier l'équation de récurrence* (11.4) *satisfaite par t_x, au cas $p > q$. En calculant Gt_x, on trouve*

$$Gt_x = \frac{1}{p-q}\Big(p(x+1)\rho^{x+1} + q(x-1)\rho^{x-1} - x\rho^x\Big)$$
$$= \frac{1}{p-q}\Big(q(x+1)\rho^x + p(x-1)\rho^x - x\rho^x\Big) = -\rho^x \Longrightarrow Gt_x + \Psi_x = 0.$$

La dernière egalité est vrai en effet pour toutes les marches aléatoires, et peut-être demontré aussi en utilisant les martingales et l'identité de Wald.

Remarque 11.9. *On s'aperçoit que pour $p > q$, on a*

$$E_x[N(0)|N(0) < \infty] = \frac{x}{p-q} := x\tilde{t}_1,$$

qui est exactement le temps esperé pour descendre x unités de la marche renversée $\widetilde{X}_n$ avec

$$\tilde{Z}_n = -Z_n = \begin{cases} 1 & a.p.q \\ -1 & a.p.p \end{cases}.$$

On peut generaliser le cas particulier ci-dessus pour des marches arbitraires avec tendance positive ; les espérance $E_x[N(0)|N(0) < \infty]$ coincident avec celles des certaines marches avec tendance positive, obtenues par une certaine "conjugaison" qui change la direction.

Exercice 11.5. *(*) Pour la marche sur $[0, B]$ avec $B = 2$, soit $t_i = E_i[N; X(N) = B]$. Montrer que $t_2 = \sum_{k=1}^\infty (2k-1)p^k q^{k-1} = \frac{p+p^2q}{(1-pq)^2}, t_1 = \sum_{k=1}^\infty (2k)p^{k+1}q^{k-1} = \frac{2p^2}{(1-pq)^2}$, en utilisant une somme sur tous les chemins possibles.*

En conclusion, le calcul de la fgp (**fonction géneratrice des probabilités de ruine**) $\phi_n(z) = E_n\left[z^{N(0)} \mathbb{1}_{N(0)<\infty}\right] = E_n\left[z^{N(0)}\right], |z| < 1$ est une question de grand intêret. Cela permet de retrouver $\Psi_n = \phi_n(1) = P_n\left[\mathbb{1}_{N(0)<\infty}\right]$, et l'espérance $t_n = E_n[N(0); N(0) < \infty] = \phi_n'(1)$. Finalement, le calcul de l'espérance du temps de ruine $t_n = E_n[N(0)|N(0) < \infty]$ dans le cas où $EZ_1 > 0$ semble suggérer que le conditionnement change le mechanisme de la marche.

Nous examinerons ci-dessous la généralisation de ces questions pour des marches "non-simples" d'un coté, mais "simples" de l'autre.

Chapitre 12

Temps continu et espace d'états continu. Le modéle de Cramér-Lundberg

12.1 Introduction

Un exemple très important historiquement de processus de Lévy et de Markov est le processus de réserves (ou de risque) d'une compagnie d'assurance.

Définition 12.1. *Le processus de risque de Cramér Lundberg est défini par*

$$X(t) = u + c\,t - S(t), \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i, \tag{12.1}$$

où C_i sont des variables aléatoires i.i.d. **nonnégatives***, et $N_\lambda(t)$ est un processus de Poisson independant de C_i.*

La figure 12.1 montre une évolution de $X(t)$ dans le temps.

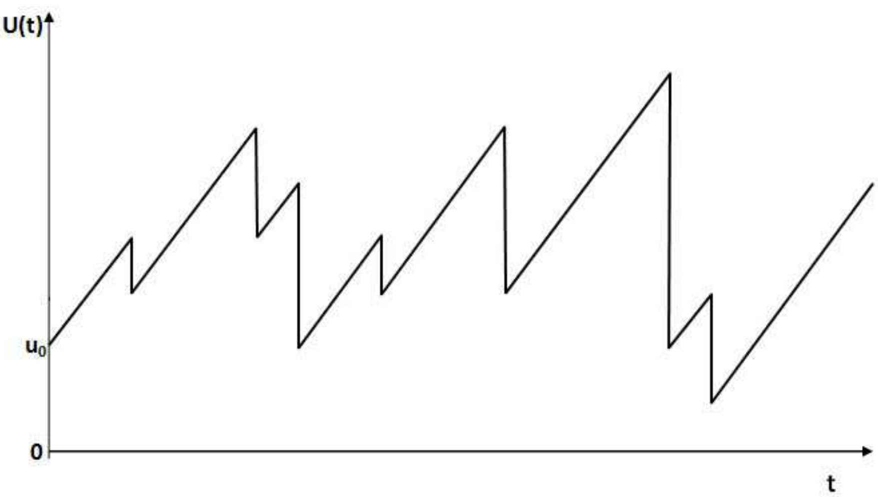


Figure 12.1 – Processus de Cramér-Lundberg

Le processus (15.1) modélise le capital d'une compagnie d'assurance en tenant compte des cotisations des assurés $c\ t$, du montant global $S(t)$ des sinistres C_i à couvrir, et du capital initial de la compagnie $X(0) = u$. Si on permet des cotisations nonlinéaires $c(t,x)$ au lieu de $c(t,x) = c\ t$, on arrive á un processus $X(t) = c(t,x) - S(t)$ qui est une difference de deux sous processus : les cotisations des assurés et le processus des sinistres à couvrir.

12.2 Temps de premier passage et probabilités de ruine

On s'interessera aux temps

$$\tau_b^+ = \inf\{t \geq 0, X(t) \geq b, \quad \tau_b^- = \inf\{t \geq 0, X(t) \leq b\}$$

Le temps

$$\tau = \tau_0^- = \inf\{t \geq 0 : X(t) \leq 0\}$$

de premier passage du processus $X(t)$ en dessous de 0 est appelé temps de ruine.

Remarque 12.1. *Si $X(t) > 0, \forall t \geq 0$ alors $\tau = \infty$.*

On dénote la loi du temps de ruine conditionnée par $X(0) = u$ par

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0, X(t) < 0 | X(0) = u\} = \inf\{t \geq 0 | \mathcal{D}(t) \geq u\} = \tau_{\mathcal{D}}^+(u),$$

où $\mathcal{D}(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i - ct = u - X(t)$ est le processus des déficits cumulés (pertes ajustées par les cotisations). C'est un processus de Lévy spectralement positif.

Nous sommes intéressés par :

— La probabilité de ruine sur un horizon fini c'est à dire avant un instant donné t, défini par

$$\Psi(t|u) = \mathbb{P}[\tau < t | X(0) = u] = \mathbb{P}[\overline{\mathcal{D}}(t) \geq u], \quad \overline{\mathcal{D}}(t) := Max_{\{0 \leq s \leq t\}} \mathcal{D}(s) \tag{12.2}$$

Alternativement, on peut étudier les probabilités de survie sur un horizon fini :

$$\overline{\Psi}(t|u) = \mathbb{P}[\tau \geq t | X(0) = u] = 1 - \Psi(t|u)$$

$$\overline{\Psi}(u) = \mathbb{P}[\tau = \infty | X(0) = u] = 1 - \Psi(u) \tag{12.3}$$

— La probabilité de ruine "éventuelle" (sur un horizon infini) définie par :

$$\Psi(u) = \mathbb{P}[\tau < \infty | X(0) = u] = P[\overline{\mathcal{D}} \geq u], \quad \text{où} \tag{12.4}$$

Définition 12.2.

$$\overline{\mathcal{D}} = Max_{\{0 \leq t \leq \infty\}} \Big[\sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i - ct \Big]$$

sera appellé le déficit maximal (aggregated loss).

Remarque 12.2. *Cette variable est d'importance fondamentale dans la théorie de la ruine, car on a*

$$\{\tau < \infty\} = \{\overline{\mathcal{D}} \geq u\}.$$

Corollaire 12.1. *a) La probabilité de survie "perpétuelle" (à horizon infini)* (12.3) *et la probabilité de ruine éventuelle* (12.4) *représentent respectivement la fonction de répartition cumulative (c.d.f.) et la fonction de survie (c.c.d.f.) de la perte aggrégée/déficit maximal* $\overline{\mathcal{D}} = \sup_{0 \le s < \infty} \mathcal{D}(s)$ *:*

$$\overline{\Psi}(u) = P[\overline{\mathcal{D}} \le u] = F_{\overline{\mathcal{D}}}(u), \quad \Psi(u) = P[\overline{\mathcal{D}} > u] = \overline{F}_{\overline{\mathcal{D}}}(u)$$

b) $\Psi(t|u)$ *est une fonction de survie en* u*, et une fonction de répartition (c.d.f.) en* t*.*

Remarque 12.3. *La probabilité de ruine d'une compagnie d'assurance est importante, par exemple en tant que objectif a minimiser pour déterminer une bonne stratégie de reassurance.*

Remarque 12.4. *Le processus* (15.1) *vit naturellement en temps continu. Mais, il peut aussi etre consideré en temps discret, en l'observant que pour* $t \in \mathbb{N}$*, et aussi avec un espace d'états discret, si* $C_i \in \mathbb{N}$ *et* c *est un entier, par exemple* $c = 1$*. En combinant les deux on arrive à*

$$X(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{t} C_i = u + \sum_{i=1}^{t} Z_i, \quad u, t \in \mathbb{N}, \tag{12.5}$$

c.a.d. à une marche al'eatoire avec $Z_i = c - C_i \in \{1, 0, -1, -2, ...\}$*.*

Pour ce processus, les probabilités de ruine satisfont

$$\Psi(u) = \sum_{k=0}^{u+c} \Psi(u + c - k) p_C(k) + \overline{P}_C(u + c).$$

En revenant au processus de Cramér Lundberg en temps continu avec arrivées exponentielles, notre processus vit forcement sur R. En conditionant aprés dt, et en mesurant C_i *avec unité de mesure dy on a*

$$\Psi(u) = (1 - \lambda dt)\Psi(u + cdt) + \lambda dt \left(\sum_{kdy=dy}^{\lfloor u \rfloor} \Psi(u + cdt - kdy) f_C(kdy) dy + \overline{F}_C(u) \right).$$

Pour $y = kdy$ *et* $dt \to 0$*, on trouve finalement que les probabilités de ruine du processus de Cramér Lundberg satisfont*

$$\lim_{dt \to 0} \left[\frac{\Psi(u + cdt) - \Psi(u + cdt)}{c} - \lambda \Psi(u + cdt) \right] + \lambda \left[\int_0^u \Psi(u - y) f_C(y) dy + \overline{F}_C(u) \right] =$$
$$\boxed{c\Psi'(u) - \lambda \Psi(u) + \lambda \left[\int_0^u \Psi(u - y) f_C(y) dy + \overline{F}_C(u) \right] = 0}.$$

Définition 12.3. *La variable* $Y = X_\tau | \{\tau < \infty, X_0 = u\}$ *est appelée* **severité de ruine***.*

Remarque 12.5. *La loi de la severité de ruine est très simple au cas des sinistres exponentiels :* $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(C_.), \forall u$*. La probabilité de ruine est aussi très simple dans ce cas :*

$$\Psi(u) = \rho e^{-u \frac{1-\rho}{m_1}}, m_1 = E[C_.], \rho = \frac{\lambda m_1}{c}$$

(une démonstration possible utilise la martingale de Wald $e^{-\gamma X_t}, \gamma = \frac{1-\rho}{m_1}$*).*

12.3 Processus de Poisson, processus de Poisson composé, processus de comptage

Remarque 12.6. *Le processus $S(t)$ représentant le montant global des sinistres est un cas particulier des processus de Poisson composé. Comme les sauts sont positifs, c'est aussi un cas particulier de subordinateur (c'est à dire de processus de Lévy non décroissant). Le processus Cramér Lundberg est un processus de Poisson composé avec increments $-C_i \leq 0$ et dérive.*

Exercice 12.1. *Calculer les fonction génératrice des moments des processus* (12.5)*, et du processus de Poisson composé $S(t)$.*

Réponse: $E[e^{sS(t)} = e^{\lambda t(\widehat{f}(-s)-1)}$.

Remarque 12.7. *Le processus $N_\lambda(t)$ de Poisson de taux λ est le choix le plus simple de processus de comptage. En le remplaceant avec un processus de comptage général avec espérance des temps entre deux arrivées de $\frac{1}{\lambda}$, on arrive au modèle de Sparre-Andersen. Dans les deux cas, on a $EN_\lambda(t) = \lambda t$.*

12.4 Taux de profit

L'espérance du processus $X(t) - X(0)$ est linéaire en t :

$$E[X(t) - X(0)] = E_0[X(t)] = c\,t - E[N(t)] \cdot E[C_.] = (c - \lambda m_1)t := pt \tag{12.6}$$

Par la loi des grands nombres, si le taux de profit $p = c - ES(1)$ est negatif, alors la ruine de la compagnie est certaine. Le cas d'intéret pratique est donc quand le taux de profit $p = c - ES(1)$ est positif, quand la probailité de ruine de la compagnie $\in (0, 1)$. La charge (coefficient) relative de sécurité est le rapport du profit est du risque, par unité de temps :

$$\theta = \frac{c - ES(1)}{ES(1)} = \frac{c - \lambda m_1}{\lambda m_1} = \frac{p}{\lambda m_1}.$$

Le taux des cotisations pourrait etre décomposé de la manière suivante :

$$c = ES(1) + p = (1 + \theta)\,ES(1).$$

La valeur du coefficient relatif de sécurité est un secret de chaque companie ; normalement, on peut le supposer plus grand que 10%.

12.5 Problème de ruine pour les marches aléatoires continues en bas, avec un nombre fini des sauts possibles en haut

Définition 12.4. *Nous appelerons une marche sans des sauts strictement plus grands que* 1 *en haut/bas continue en haut/bas.*

Pour les marches continues en bas avec $Z_i \in \{-1, 0, 1, ...\}$, le problème de la ruine peut être abordé par un argument probabiliste. On remarque d'abord que l'absence des sauts en bas plus grands que 1 impose une récurrence

$$\Psi_n = \rho \Psi_{n-1}, \quad \rho = P_n[N_{n-1} < \infty], \Psi_0 = 1.$$

La fonction Ψ_n est donc multiplicative en n, c.-à-d. $\Psi_n = \rho^n$. Soit

$$p_Z(z) = Ez^{Z_1} = \sum_{i=-1}^{\infty} p_i z^i.$$

En conditionnant sur le premier pas, on trouve que ρ doit satisfaire l'équation caractéristique

$$\boxed{1 = p_Z(\rho)} \tag{12.7}$$

Remarque 12.8. *L'équation* (12.7) *est importante aussi pour les marches arbitraires sur $\mathbb{Z}$, mais en général ρ n'a pas d'interpretation comme probabilité. En général, il aparaît dans la recherche des martingales de Wald, ou en cherchant des solutions puissances de l'équation $Gf_n = 0$.*

Par «miracle», pour les marches continues en bas il y aura toujours exactement une solution unique de (12.7) satisfaisant $\rho \in (0, 1]$, ce qui détermine ρ uniquement. En plus, si l'espérance des sauts $EZ_i \leq 0$, alors $\rho = 1$ (on demontre ça en examinant la limite de X_n quand $n \to \infty$), et si $Z_i > 0$, alors $\rho < 1$.

Exercice 12.2. *1. Calculer l'espérance du temps de ruine $E_x[N(0)]$ et la probabilité de ruine $\Psi(x)$ pour une marche avec $\left\{p_2 = \frac{3}{8}, p_1 = \frac{1}{8}, p_{-1} = \frac{1}{2}\right\}$. 2. Calculer l'espérance du temps de ruine $E_x[\widetilde{N}(0)]$ et la probabilité de ruine pour la marche renversée $\widetilde{X}_i$ avec increments $\widetilde{Z}_i = -Z_i$. 3. Calculer l'espérance du coût total de stockage $\widetilde{c}_x = E_x[\sum_{i=0}^{\widetilde{N}(0)-1} \widetilde{X}_i]$ pour la marche renversée. 4. Calculer la loi stationnaire de la marche renversée réfléchie, avec $P_{1,0} = P_{0,0} = 1/2$. 5. Calculer $t_x = E_x[N(0); N(0) < \infty]$, pour la marche initiale, en utilisant les équations de récurrence*

$$Pt_x + \Psi_x = t_x, t_0 = 0.$$

R : 1. $E[Z_1] = \frac{3}{8} > 0 \Longrightarrow E_x[N(0)] = \infty$. Les racines charactéristiques sont $2/3, -2, 1$. La continuité en bas + $E[Z_1] > 0$ impliquent $\Psi_x = \rho^x, \rho = \frac{2}{3}$.

2. La marche renversée a $\left\{p_{-2} = \frac{3}{8}, p_{-1} = \frac{1}{8}, p_1 = \frac{1}{2}\right\}$ a racines charactéristiques **réciproques** $3/2, -1/2, 1$, et $E[\widetilde{Z}_1] = -\frac{3}{8} \Longrightarrow \widetilde{\Psi}_x = 1$ (remarquer que les racines sont les réciproques des racines de la marche initiale). La solution de la récurrence $G\widetilde{t}_x + 1 = 0, \widetilde{t}_0 = 0, \widetilde{t}_{-1} = 0$ est de la forme

$$\widetilde{t}_x = A_1(\frac{3}{2})^x + A_2(\frac{-1}{2})^x + A_3 + Ax, A = \frac{8}{3}. \tag{12.8}$$

Avec trois inconnues et deux conditions frontière, une est de trop et doit être eliminé par un théorème limite (rémarquer aussi que les premières équations donnent $\widetilde{t}_2 = 2(\widetilde{t}_1 - 1), \widetilde{t}_3 = 3(\frac{5}{4}t_1 - 2), ...\widetilde{t}_n = f(\widetilde{t}_1)$, et t_0 ne peut pas être déterminé sans connaitre le comportement limite de $t_n, n \to \infty$).

On peut resoudre la récurrence en supposant $A_1 = 0$ (i.e. l'impossibilité d'une augmentation exponentielle), ce qui donne

$$\widetilde{t}_x = E_x[\widetilde{N}(0)] = \frac{8}{3}x + \frac{8}{9}(1 - (\frac{1}{-2})^x) \Longrightarrow \widetilde{t}_1 = 4, \widetilde{t}_2 = 6, \widetilde{t}_3 = 9, ...$$

Rémarquer que $\lim_{x\to\infty} \frac{\widetilde{t}_x}{x} = \frac{8}{3} = \frac{1}{E[\widetilde{Z}_1]}$.

L'impossibilité d'une augmentation exponentielle est justifiable par un théorème de limite "fluide" (a admettre), qui stipule qu'au premier ordre asymptotique, une marche aléatoire se comporte comme son espérance linéaire, c.-à-d.

$$E[\widetilde{Z}_1] < 0 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\widetilde{t}_x}{x} = \frac{1}{-E[\widetilde{Z}_1]}. \tag{12.9}$$

3. Admettons qu'ici aussi $A_1 = 0$ (par un théorème de limite "fluide" qui stipule qu'au premier ordre asymptotique $\lim_{x\to\infty} \frac{\widetilde{c}_x}{x\widetilde{t}_x/2} = 1$).

4. En resolvant les équations d'équilibre général, on trouve $\pi_0 = \frac{1}{3}, \pi_k = \frac{2}{3}\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}, k \geq 1$.

5. La solution particulière est $p_x = Ax\rho^x, A = 3$.

On a une seule condition frontière $t_0 = 0$, donc forcement deux racines charactéristiques inacceptables -2 et 1. En admettant cela, $t_0 = 0 \Longrightarrow t_x = p_x = Ax\rho^x$. Rémarquez que $E_x[N(0)/N(0) < \infty] = Ax$, donc le premier moment du temps T_x de la marche conditionné par ruine est linéaire, ce qui suggère une evolution approximativement linéaire.

Rémarquez aussi que $\lim_{x\to\infty} t_x = 0$ et réciproquement,

$$t_x = p_x \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} t_x = 0.$$

Donc, pour justifier l'absence des racines -2 et 1, il suffit de démontrer ou d'accepter que

$$E[Z_1] > 0 \implies \lim_{x\to\infty} E_x[N(0); N(0) < \infty] = 0$$

("deuxième théorème Bill Gates").

Remarque 12.9. *Une autre marche interessante et la marche "conjuguée", obtenue en multipliant les probas de Z_i par $\rho^i \Longrightarrow \left\{p_2 = \frac{3}{8}\frac{4}{9} = \frac{1}{6}, p_1 = \frac{1}{8}\frac{2}{3} = \frac{1}{12}, p_{-1} = \frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{4}\right\}$*

Remarque 12.10. *Pour d'autre exercices des marches continue en bas, prenez $(p_2, p_1, p_{-1}) \sim (1, b-1-a, ab)$, avec $0 < a < 1, b > 1$. L'équation charactéristique factorise alors comme $(\rho-1)(\rho-a)(\rho+b)$. Par exemple $a = \frac{1}{3}, b = 2 \Longrightarrow b - a + ab = \frac{7}{3}, (p_2, p_1, p_{-1}) = (\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}), \frac{3}{7}\rho_3 + \frac{2}{7}\rho^2 + \frac{2}{7}\rho^{-1} - 1 = \frac{(\rho-1)(\rho+2)(3\rho-1)}{7\rho}$. Pour la marche renversée on a $\widetilde{t}_x = \frac{7x}{6} + \frac{7}{18}(1 - (\frac{-1}{2})^x)$.*

12.6 Problème de ruine pour les marches aléatoires continues en haut avec un nombre fini des sauts possibles en bas

Pour les marches qui sautent parfois plus de un en bas, la probabilité de ruine n'est plus simplement une puissance, mais une combinaison linéaire des puissances. Le «miracle» se répète : il y aura toujours exactement autant des "bonnes racines" satisfaisant $|\rho| \in (0, 1]$ qu'on aura besoin pour satisfaire toutes les conditions frontière en bas nécessaires.

Exercice 12.3. *a) Calculer l'espérance du temps de ruine $E_x[N(0)]$ et les probabilités de ruine $\Psi_x, x \in \mathbb{N}$, pour une marche sur les nombres naturels, avec la distribution de chaque pas donné par : $\left\{p_1 = \frac{8}{10}, p_{-1} = \frac{1}{10}, p_{-2} = \frac{1}{10}\right\}$. Montrer que les probabilités de ruine Ψ_x sont positives.*

b) Calculer aussi les probabilités de ruine $\Psi_x^{(-1)} = p_x[\tau < \infty, X_\tau = -1], x \in \mathbb{N}$, et $\Psi_x^{(-2)} = p_x[\tau < \infty, X_\tau = -2], x \in \mathbb{N}$. Ind : Utiliser les martingales de Wald.

c) Calculer les probabilités de ruine et l'espérance du temps de ruine pour la marche renversée.

d) (*) Calculer l'esperance $E_x[N(0); N(0) < \infty]$, en resolvant les équations de récurrence $Pt_x + \Psi_x = t_x, t_0 = 0$.

R : a) La moyenne est $m_1 = 1/2 > 0 \Longrightarrow E_x[N(0)] = \infty$. Les probabilités de ruine satisfont $\Psi_x = \frac{8}{10}\Psi_{x+1} + \frac{1}{10}\Psi_{x-1} + \frac{1}{10}\Psi_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine de

$$\frac{8}{10}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{10}\rho + \frac{1}{10} = (\rho-1)(\frac{8}{10}\rho^2 - \frac{2}{10}\rho - \frac{1}{10}) = \frac{8}{10}(\rho-1)(\rho-1/2)(\rho+1/4)$$

$\Psi_x = A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(\frac{-1}{4})^x$ satisfait $\Psi_0 = \Psi_{-1} = 1$ ssi $A_1 = 5/6, A_2 = 1/6$. Les probabilités de ruine sont :

$$\Psi_x = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}\right)^x \approx \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

b) ... c) $\widetilde{\Psi}_x = 1, \widetilde{t}_x = \frac{x}{m_1} = 2x$. d) Cherchons une solution particulière de $Gp_x + \Psi_x = 0$ de la forme $p_x = x[A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(\frac{-1}{4})^x]$. Il suffit de calculer $G[x(\frac{1}{2})^x]$ et $G[x(\frac{-1}{4})^x]$.

$$G[x(\frac{1}{2})^x] = \frac{8}{10}[(x+1)(\frac{1}{2})^{x+1} - x(\frac{1}{2})^x] + \frac{1}{10}[(x-1)(\frac{1}{2})^{x-1} - x(\frac{1}{2})^x] + \frac{1}{10}[(x-2)(\frac{1}{2})^{x-2} - x(\frac{1}{2})^x] = -\frac{3}{5}(\frac{1}{2})^x.$$

Plus généralement, nous avons besoin de $GD_x[z^x] = G[xz^{x-1}]$, où $G = \sum_i p_i(T^i - 1)$. On vérifie que T et D_x commutent, et donc

$$GD_x[z^x] = D_x G[z^x] = xz^{x-1}(\phi(z) - 1) + z^x \phi'(z).$$

En particulier, pour z racine charactéristique, on a

$$G[xz^{x-1}] = z^x \phi'(z) \Longrightarrow G[xz^x] = z^x z \phi'(z),$$

et $G[x(\frac{-1}{4})^x] = -3(\frac{-1}{4})^x$. La solution particulière est $\frac{25}{18}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{4}\right)^x$ et finalement

$$t_x = \frac{1}{27}2^{-x-2}\left(150x - 35(-1)^{2x} + 81\right) + \frac{1}{27}2^{-2x-2}\left(6(-1)^x x - 86(-1)^x + 40(-1)^{3x}\right)$$

Remarque 12.11. *Une méthode alternative pour les probas de ruine des marches avec un nombre fini des sauts possibles en bas et en haut est fournie par le théorème d'arrêt des martingales de Doob, et la recherche des martingales de Wald* ρ^{X_t}.

On trouvera toujours que $E[Z_1] > 0$ *assure que le nombre des racines* ρ_i *de* $\phi_Z(\rho) = 1$ *qui sont plus petites que* 1 *en valeur absolue est égal au nombre des sauts possibles en bas.* §

12.7 (*) Fonction génératrice des probabilités de ruine pour les marches continues en haut

Les relations de recurrence de sections précédentes peuvent-être remplacée par des équations algébriques pour la fonction génératrice des probas. En fait, pour les marches continues en haut, on a [Willmot, 1993, Eq. (3.5)]

$$\tilde{\bar{\Psi}}(z) := \sum_{x=0}^{\infty} z^x \bar{\Psi}(x) = \lim_{v\uparrow 1}(1-v)\tilde{\bar{\Psi}}_v(z) = \frac{(1-E[C_1]) \vee 0}{\tilde{p}(z) - z}, \quad z \in (0,1), \tag{12.10}$$

$$\tilde{\Psi}(z) := \sum_{x=0}^{\infty} z^x \Psi(x) = \frac{1}{1-z} - \frac{(1-E[C_1]) \vee 0}{\tilde{p}(z) - z}, \quad z \in (0,1), \tag{12.11}$$

qui sont similaires aux formules Pollaczek-Khinchine du model Cramér Lundberg. On a aussi [Shiu, 1989, 2.14]

$$\bar{\Psi}(0) = \lim_{z\downarrow 0} \tilde{\bar{\Psi}}(z) = \frac{(1-EC_1) \vee 0}{p_0}.$$

§.

Théorème 12.1. *Supposons que la marche aléatoire discrète* $X_t = x + \sum_{i=1}^t Z_i$, *avec* Z_i *i.i.d. et* $E[Z_1] > 0$ *est tel que* $\phi_Z(\theta) = p_+(\theta) + p_-(\frac{1}{\theta})$, *where* $p_\pm(\theta)$ *sont des polynômes des degrés* $n_\pm$. *Alors*

a) L'équation $p_Z(\theta) = 1$ *a* $n_- + n_+$ *racines, dont exactement* n_- *racines plus petites que* 1 *en valeur absolue et* $n_+ - 1$ *racines plus grandes que* 1 *en valeur absolue.*

b) Les probabilités de ruine sur $[0, \infty)$, $\Psi_x, x \in \mathbb{N}$ *sont des combinaisons de* n_- *racines plus petites que* 1 *en valeur absolue.*

Exercice 12.4. *a) Montrer par la méthode de fonctions génératrices que pour une marche $X(t) = x+\sum_i Z_i$ continue en haut, la fonction génératrice des probabilités de survie $\bar{\Psi}_n = 1-\Psi_n$ satisfait*

$$\bar{\Psi}^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Psi}_n z^n = \frac{p_{-1}\bar{\Psi}_1}{p_Z(z)-1} \tag{12.12}$$

b) Recalculer les probabilités de ruine pour la marche aléatoire simple.

Sol : a) Soit $q = p_{-1}$. On ajoute les équations $\bar{\Psi}_n = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \bar{\Psi}_{n+i} + q\bar{\Psi}_{n-1}$, multipliées respectivement par $z^n, n = 1, 2, ..$ On obtient ainsi l'équation : ...

b)

$$\Psi^*(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{zp\bar{\Psi}_1}{p+qz^2-z} = \frac{p-qz-pz\bar{\Psi}_1}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p-qz-z(p-q)}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p}{p-qz}$$

car le numerator s'annule en 1 («méthode du noyau») et donc $p\bar{\Psi}_1 = p-q$. De lors, $\Psi_n = (q/p)^n$.

12.8 (*) Processus de Markov en temps continu

Remarque 12.12. *(*) Au lieu de la matrice de transition P, on peut aussi baser l'étude des chaînes de Markov sur la matrice "des taux de transition" $G = P - I \Leftrightarrow P = I + G$ où G est une matrice de taux. Si on étudie un processus après des intervalles très courtes dt, la matrice de transition après dt s'écrit*

$$P(dt) \approx I + dtG_{dt} \Longrightarrow P(t) \approx (I + dtG_{dt})^{t/dt} \to e^{tG}$$

où $G = \lim_{dt\to 0} G_{dt}$ est la matrice des taux de transition du processus en temps continu.

Finalement, pour considerer des processus de Markov en temps continu, on garde le graphe de communication du temps discret, mais on remplaçe les probabilités de transition ("jetées de dé") en chaque sommet par par des taux de transition. Le prochaîne sommet a visiter, ainsi que la loi du temps de passage sont déterminées par une "competition des exponentielles" du type illustré dans l'exercice 9.6.

Exercice 12.5. *Quels sont les taux associés au processus de l'exercice 9.6 ? Arranger ces taux dans une matrice de taux G (ayant somme 0 sur chaque ligne).*

Définition 12.5. *Une densité $E(\lambda_1, \lambda_2, ...)$ d'une somme indépendante des variables exponentielles avec taux $\lambda_1, \lambda_2, ...$ s'apelle densité d'Erlang généralisée.*

Sa transformée de Laplace est $\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{s+\lambda_i}$.

L'étude des chaînes et processus de Markov en temps discret et en temps continu comporte trois types des problèmes. En ordre de difficulté, il s'agît de :

1. loi d'équilibre : $\lim_{n\to\infty} P^n$ et $\lim_{t\to\infty} e^{tG}$
2. lois de premier passage, concernant le temps et la position au temps du premier passage d'une frontière
3. lois transitoires P^n et e^{tG}

Pour le deuxième problème, on vera que la fonction de survie ainsi que la densité d'un temps d'arret τ d'un processus de Markov absorbant en temps continu ont des réprésentations matricielles :

$$\bar{F}_\tau(t) = \vec{\beta} e^{t\mathbf{B}} \mathbf{1} \Leftrightarrow f(t) = \vec{\beta} e^{t\mathbf{B}} \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b} = -B\mathbf{1}, \tag{12.13}$$

où B est la matrice sous-génératrice des transitions sur la partie transitoire, et $\vec{\beta}, \mathbf{1}$ dénotent des vecteurs ligne et colonne.

La transformée de Laplace est rationelle, de la forme

$$f^*(s) = \vec{\beta}(sI - B)^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i s^i}$$

Remarque 12.13. *Les lois ayant une transformée de Laplace rationelle sont appelées aujourd'hui lois de type matrice-exponentielle. Si en plus la matrice B est sous-génératrice et le vecteur $\vec{\beta}$ est non-négatif, on utilise le nom de loi de type phase.*

Exercice 12.6. *Trouver une formule pour la densité du temps de la dernière des n ampoules identiques a s'éteindre (exercice 9.6.8), en utilisant :*

a) la réprésentation matricielle associée à l'ordre $\{n, n-1, ..., 1\}$.

b) la réprésentation matricielle associée à l'ordre $\{1, ..., n-1, n\}$.

Remarque 12.14. *Les processus de Markov etendent au domaine aléatoire le concept d'evolution controlée par une équation différentielle. Ils sont specifiés par un mechanisme de transition, ils ont des conditions initiales, et possiblement des limites asymptotiques. La classe des processus Markoviens est extremêment riche, avec une complexité qui depend des ensembles $\mathcal{E}, \mathcal{I}$.*

Deux méthodes de base sont fondamentales pour l'étude des processus de Markov : a) la méthode du conditionnement, qui permet de deriver des équations pour les espérances conditionnés par létat initial, et la resolution des équations en utilisant des transformées (de Laplace, Fourier, fonctions génératrices, ...). Parfois les reponses demandent seulement le calcul des exponentielles des matrices.

12.9 Exercices

1. **La marche paresseuse :** Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = 1]$ =p, $P[Z_n = -1]$ =q et $P[Z_n = 0]$ =1- p-q, avec $0 < p + q < 1$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par $\mathrm{E_x}$ l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés.
   (a) Classifiez les pbs suivantes $p_x = \mathbb{P}_x\{X_N = K\}$, $f_x = E_x[X_N]$, $g_x = E_x[X_N^2]$, $t_x = \mathrm{E_x[N]}$, $c_x = E_x[\sum_0^{N-1} X(t)]$, et $d_x = E_x[\sum_0^{N-1} X_t^2]$ comme des pbs de prix final ou de coût accumulé. Quelles sont les équations de récurrence et les conditions frontière correspondant à chaque pb ?
   (b) (*) Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $\phi_x = \mathrm{E_x a^N}$.
   (c) Rappeler les étapes principales de la résolution des équations de récurrence avec coefficients constants qui en résultent pour a) p_x, b) f_x, c) t_x, et d) c_x, dans les deux cas possibles $p < q$ et $p = q < 1/2$. Donner les réponses finales dans le cas $p = q < 1/2$.

R :

1. (a,b) Soit $(Gf)_x = p\ (f_{x+1} - f_x) + q\ (f_{x-1} - f_x)$ (formellement, la même expression comme dans le cas «non paresseux», sauf que maintenant $p+q < 1$. Les équations sont respectivement :

$$(Gp)(x) = 0, p_K = 1, p_0 = 0$$
$$(Gf)(x) = 0, f_K = K, f_0 = 0$$
$$(Gg)(x) = 0, g_K = K^2, d_0 = 0$$
$$(Gt)(x) + 1 = 0, t_K = 0, t_0 = 0$$
$$(Gc)(x) + x = 0, c_K = 0, c_0 = 0$$
$$(G\phi)x + [1 - a^{-1}]\phi_x, \phi_K = 1, \phi_0 = 1$$

Ces sont exactement les mêmes équations comme pour une marche non paresseuse, sauf que l'opérateur est différent.

[c] Pour p_x et f_x on obtient donc les mêmes équations comme pour une marche symétrique avec $p = 1/2$, par exemple :

$$\begin{aligned} 2pp_x &= pp_{x+1} + pp_{x-1} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ p_K &= 1, \quad p_0 = 00 \end{aligned}$$

et donc les mêmes réponses $p_x = \frac{x}{K}$, $\quad f_x = K^2 \frac{x}{K} = xK$.

[d] Pour $t_x = E_x[N]$ [temps de sortie espéré] on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= pt_{x+1} - [p+q]t_x + qt_{x-1} + 1 \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ t_K &= 0, \quad t_0 = 0 \end{aligned}$$

Soit $t_0(x) = \frac{x}{q-p}$ une solution particulière qui satisfait $t_0(0) = 0$. La solution est $t_x = t_0(x) - t_0(K)\frac{h(x)}{h(K)}$ où $h(x) = 1-(q/p)^x$ est une solution homogène satisfaisante $h(0) = 0$. Pour $K = \infty, q > p$ on obtient $t(x) = t_0(x)$. Pour c_x on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= pc_{x+1} - [p+q]c_x + qc_{x-1} + x \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ c_K &= 0, \quad c_0 = 0 \end{aligned}$$

Soit $c_0(x) = \frac{x^2}{2(q-p)} + \frac{x(q+p)}{2(q-p)^2}$ une solution particulière qui satisfait $c_0(0) = 0$. La solution est $c_x = c_0(x) - c_0(K)\frac{h(x)}{h(K)}$ où $h(x) = 1 - (q/p)^x$ est une solution homogène satisfaisant $h(0) = 0$. Pour $K = \infty, q > p$ on obtient $c(x) = c_0(x)$.

Remarque : Le fait que les équations sont identiques pour ces deux marches [paresseuse et non-paresseuse] n'est pas une coïncidence. En fait, il s'avère que les réponses obtenues sont les mêmes por n'importe quel processus Markovien homogène, si on défini l'opérateur de la façon juste. Donc, la réponse pour tous les problèmes concernant espérances variable aléatoire impliquer un seul opérateur G [seulement les conditions frontière et la partie non homogène changent d'un problème à l'autre]- en fait, la famille des processus aléatoires Markoviens est isomorphe à une famille d'opérateurs déterministes. En plus, la structure des réponses en fonction de G est la même pour tous les processus aléatoires Markoviens, malgré leur diversité ; c'est un fait remarquable, qui démontre la puissance de ce concept.

12.10 La ruine du joueur spectralement negatif, en utilisant les martingales

Exercice 12.7. La ruine du joueur spectralement negatif : quelles chances de gagner et au bout de combien de temps ?
Soient $X_1,\ X_2, \ldots$ des v.a. i.i.d. avec

$$P(X = 1) = p_1, P(X = -k) = p_{-k}, \forall k \geq 1, \quad p_1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{-k} = 1.$$

Supposons que x et b sont deux entiers avec $0 \leq x \leq b$. On définit

$$S_n := x + X_1 + \cdots + X_n, \quad T := \inf\{n,\ S_n \leq 0 \ ou\ S_n = b\}.$$

La fortune initiale du joueur de pile ou face est représentée par x et il compte s'arréter s'il a atteint b ou 0.

Donner une recurrence pour la **probabilité de gagner** $\bar{\Psi}(x) = P_x[X_T = b]$. *En supposant $\bar{\Psi}(1)$ connue, donner $\bar{\Psi}(2)$.*

Exercice 12.8. La ruine du joueur sans depassements ("skip -free"), dans les deux senses. *Reprenons l'exercice 12.7 en supposant $P(X = 1) = p, P(X = -1) = q = 1 - p$ et $0 < p < 1$. C'est le cas classique, où la recurrence est d'ordre 2.*

1. *Resoudre la recurrence.*
2. *Pour quel valeur de p est S_n une martingale ? En supposant cette valeur, quelle sont $\phi(x)$ et l'espérance $t(x) = E_x T$ du temps du jeu ?*
3. *Calculer $\Psi(x) = \mathbb{P}(S_T = 0)$ et $t(x) = E(T)$ pour $p \in (0, 1)$, par le théorême d'arrêt des martingales appliqué aux martingales $M_n = r^{S_n}$ et $N_n = S_n - nm$, avec des valeurs de r, m choisies tel que ce sont des martingales, et en supposant que le théorême d'arrêt est applicable*

R : 3. M_n est un produit de v. a. indépendantes, positives et de moyenne 1 ssi : $E[r^{Z_i}] = pr + qr^{-1} = 1$. Les racines sont $r = 1$ et $r = \frac{q}{p}$. N_n est une somme de v.a. aléatoires indépendantes sommables de moyenne nulle ssi $m = p - q$.

Le théorême d'arrêt donne : $\Psi(x) = \frac{1-r^x}{1-r^b}, t(x) = \frac{x-Kp_x}{q-p}$ □

Dans les exercices suivantes on considèrera le cas $b = \infty$. Les reponses sont plus simples dans ce cas, car une seule des deux martingales intervienne, mais la justification de l'applicabilité du théorème d'arrêt est moins evidente.

Exercice 12.9. *Calculer, en utilisant le théorème d'arrêt des martingales, les probabilités de ruine sur $[0, \infty)$ pour une marche avec $\left\{p_2 = \frac{3}{8}, p_1 = \frac{1}{8}, p_{-1} = \frac{1}{2}\right\}$*

Sol : $\mathrm{EZ}_1 > 0$ et la loi des grandes nombres implique $\mathbb{P}[T = \infty] > 0]$ et donc aucun des cas du théorème d'arrêt ne s'applique pas quand $b = \infty$, car le théorème d'arrêt ne permet pas des temps d'arrêt tq. $\mathbb{P}[T = \infty] > 0$!

Dommage, car on trouve facilement une martingale de Wald $M_t = r^{X(t)}$ satisfaisant $\lim[M_t | X(t) \to \infty] = 0$, en resolvant léquation d'équilibre

$$\widetilde{p}(r) := E[r^{Z_\cdot}] = \sum_i p_i r^i = 1, r \in (0, 1).$$

Par une "application optimiste" du théorème d'arrêt a cette martingale, on trouve une réponse raisonnable $\Psi(x) = r^x$, avec une interprétation claire,

$$r = \mathbb{P}_x[T_{x-1} < \infty].$$

Heureusement, pour une "application correcte", il suffit de remplacer T par le temps d'arrêt borné $T_N = \min(T, N)$, avec $N \to \infty$. On trouve

$$r^x = \mathrm{E}r^{X_{T_N}} = r^{X_N}\mathbb{P}_x[T > N] + r^0\mathbb{P}_x[T \leq N] \to_{N\to\infty} \mathbb{P}_x[T < \infty] = \Psi(x) \tag{12.14}$$

(le premier terme converge vers 0, car $\mathbb{P}[X_N \to \infty] = 1$).

Exercice 12.10. *Calculer la probabilité de ruine $\Psi_x, x \in \mathbb{N}$, pour une marche sur les nombres naturelles, avec la distribution de chaque pas donné par :* $\left\{p_{-1} = \frac{8}{10}, p_1 = \frac{1}{10}, p_2 = \frac{1}{10}\right\}$.

Exercice 12.11. *Soit*

$$X_n = x + \sum_{i=1}^{n} Z_i, \quad Z_i = \begin{cases} 1, \text{ avec probabilité} & p_1 = \frac{8}{10} \\ -1, & p_{-1} = \frac{1}{10} \\ -2, & p_{-2} = \frac{1}{10} \end{cases},$$

avec Z_i i.i.d. Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \leq 0\}$

1. *$E[Z_1] > 0$?*
2. *Calculer par conditionnement les probabilités de ruine $\Psi(x) = P_x[T_0 < \infty], x \in \mathbb{N}$, pour cette marche. Montrer qu'elles sont positives.*
3. *Refaire 2., en utilisant le théorème d'arrêt des martingales.*
4. *Montrer que 1 est toujours une racine de l'équation d'équilibre ,et simplifier cette équation par $r - 1$.*
5. *Calculer*
$$\bar{\Psi}(x) = P_x[\tau_b < \tau_0.$$
6. *(*) Calculer la fonction génératrice des probabilités de ruine.*

Solution

1. $E(Z_1) = 1.\frac{8}{10} + (-1).\frac{1}{10} + (-2).\frac{1}{10} = \frac{1}{2} > 0$

2. Voila une solution directe, par conditionnement sur le premier pas :

$$\begin{aligned}\Psi(x) = P_x[T_0 < \infty] &= \sum_{-2}^{1} P[Z_1 = i].P_x[T_0 < \infty | x + Z_1 = x + i] \\ &= \sum_{-2}^{1} P[Z_1 = i].P_{x+i}[T_0 < \infty] = \sum_{-2}^{1} p_i.\Psi(x + i) \\ &= \frac{8}{10}.\Psi(x + 1) + \frac{1}{10}.\Psi(x - 1) + \frac{1}{10}.\Psi(x - 2), \ x \geq 1.\end{aligned}$$

Les CF sont :

$$\begin{cases} \Psi(\infty) & = 0 \\ \Psi(0) & = 1 \\ \Psi(-1) & = 1. \end{cases}$$

(il est aussi vrai que $\Psi(-2) = 1, ...$ mais -2 ne peut pas être visité à partir de l'espace d'états $\{1, 2, ...\}$). On cherche $\Psi(x) = r^x$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } r^x &= \frac{8}{10}.r^{x+1} + \frac{1}{10}.r^{x-1} + \frac{1}{10}.r^{x-2} \\
\Rightarrow r^2 &= \frac{8}{10}.r^3 + \frac{1}{10}.r + \frac{1}{10} \\
\Rightarrow &(r-1)(2.r-1)(4r+1) = 0 \\
\Rightarrow \Psi(x) &= A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(-\frac{1}{4})^x
\end{aligned}$$

$\Psi(0) = \Psi(-1) = 1$ sont satisfaites ssi $A_1 = \frac{5}{6}, A_2 = \frac{1}{6}$. Les probabilités de ruine sont :

$$\Psi(x) = \frac{5}{6}.(\frac{1}{2})^x + \frac{1}{6}.(-\frac{1}{4})^x$$

3. On decompose $\Psi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x), \phi_i(x) = \mathbb{P}_x[T < \infty, X_T = -i], i = 0, 1$. On applique le théorème d'arrêt appliqué aux deux martingales arrêtées de Wald $M_t = r_i^{X(t)}, i \in \{1, 2\}$ (comme en (12.14)). Les équations d'equilibre $\widetilde{p}(r_i) = 0, i \in \{1, 2\}$ où $\widetilde{p}(\rho) = \widetilde{p}_Z(\rho)$ est la fonction génératrice des probabilités impliquent les équations d'arêt $r_i^x = \sum_{j=0}^{1} \phi_j(x) r_i^{-j}, r_i, i \in \{1, 2\}, x \geq 1$.

On résout le système de type Vandermonde

$$\begin{pmatrix} r_1^x \\ r_2^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_1^{-1} \\ 1 & r_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \end{pmatrix} = (r_2^{-1} - r_1^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} r_2^{-1} & -r_1^{-1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^x \\ r_2^x \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_1^{x+1} - r_2^{x+1}}{r_1 - r_2} \\ \frac{r_1 r_2^{x+1} - r_2 r_1^{x+1}}{r_1 - r_2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \Psi(x) = r_1^{x+1} \frac{1 - r_2}{r_1 - r_2} + r_2^{x+1} \frac{r_1 - 1}{r_1 - r_2}$$

et avec $r_1 = 1/2, r_2 = -1/4$, on retrouve les probabilités de ruine.

4. l'équation d'équilibre simplifié est $p_1 r^2 - (p_{-1} + p_{-2})r - p_{-2} = 0$

Remarque 12.15. *Les équations d'arrêt pour $x = 1$ (analogues aux équations d'équilibre) donnent*

$$\begin{cases} r_1 = \phi_0(1) + \phi_1(1) r_1^{-1} \\ r_2 = \phi_0(1) + \phi_1(1) r_2^{-1} \end{cases}$$

Les quantités

$$\begin{pmatrix} \phi_0(1) \\ \phi_1(1) \end{pmatrix} = (r_2^{-1} - r_1^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} r_2^{-1} & -r_1^{-1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 \\ -r_1 r_2 \end{pmatrix}$$

et leur somme $\Psi(1) = \phi_0(1) + \phi_1(1) = r_1 + r_2 - r_1 r_2 = \frac{E[Z_1; Z_1 < 0]}{P[Z_1 = 1]}$ peuvent être obtenues directement, car elles sont proportionelles aux probabilités des queues : $\{P[Z_1 \leq -1], P[Z_1 \leq -2]\}$!!!

5. $\widetilde{\Psi}(z) = \frac{z^2 + 7z - 8}{10z(1 - \phi_Z(z))}$

L'inégalité de Lundberg : Remarquer que la première égalité implique :

$$r_1^x = \phi_0(x) + \phi_1(x) r_1^{-1} > \phi_0(x) + \phi_1(x) = \Psi(x) \tag{12.15}$$

Cette inegalité est toujours vrai quand l'équation d'equilibre admet une solution $\rho \in (0, 1)$ (une telle solution est unique).

Chapitre 13

Outils mathématiques de base dans la théorie de la ruine

13.1 L'équation intégro-différentielle pour la probabilité de ruine ; une analyse infinitesimale de Laplace

Exercice 13.1. *Let N(t) be a Poisson process with parameter λ, let $p_n(t) = Pr[N(t) = n]$ and $p_{-1}(t) = 0$. Show that $p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), n = 0, 1, 2, ...$, and interpret the formula $p_n(t + dt) = p_n(t) + dtp'_n(t) = (1 - \lambda dt)p_n(t) + \lambda dtp_{n-1}(t)$.*

Nous allons obtenir maintenant des équations intégro-différentielles (EID) pour les probabilités de ruine $\Psi(u)$ et de survie $\bar{\Psi}(u) = 1 - \Psi(u)$ par la méthode de conditionenment après un temps infinitesimal. Les EID fournissent facilement les transformées de Laplace de PK, et aussi, par integration, les équations de renouvellement du chapitre **??** (une approche alternative est fourni par le chemin inverse : obtenir d'abord les équations de renouvellement, et obtenir les EID par différentiation).

Les EID font intervenir un operateur trés important (qui est en effet le "générateur du semigroupe" correspondant au processus markovien de Cramér Lundberg) :

$$\mathcal{G}\, g(x) = c\, \frac{\partial}{\partial x}\, g(x) + \lambda \int_0^\infty g(x - z)F_C(dz) - \lambda g(x).$$

Proposition 13.1. *Les probabilités de ruine et survie sont, respectivement, des solutions de :*

$$\mathcal{G}\, \Psi(x) = 0, \quad \Psi(x) = 1, si\, x < 0, \quad \Psi(\infty) = 0 \tag{13.1}$$

$$\mathcal{G}\, \bar{\Psi}(x) = 0, \quad \bar{\Psi}(x) = 0, si\, x < 0, \quad \bar{\Psi}(\infty) = 1 \tag{13.2}$$

Une forme alternative de la première équation est

$$\tilde{\mathcal{G}}\, \Psi(x) + \lambda \bar{F}_C(x) = 0, \quad \Psi(x) = 1, si\, x < 0, \quad \Psi(\infty) = 0, \tag{13.3}$$

où $\tilde{\mathcal{G}}h(x) = ch'(x) + \lambda \int_0^x h(x - z)f(z)dz - \lambda h(x)$.

Exercice 13.2. *a) Obtenez l'équation intégro-différentielle* (13.1) *pour les probabilités de ruine $\Psi(u)$, en conditionnant après un temps infinitesimal.*

b)(*) Reobtenez cette équation, en conditionnant sur le premier saut.

Sol : Les deux méthodes de conditionnement, après un temps infinitesimal[§], et après le premier saut, donnent respectivement :

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= (1-\lambda dt)\Psi(x+cdt) + \lambda dt \int_0^\infty \Psi(x-z)F_C(dz) \\ &\iff 0 = c\Psi'(x) - \lambda\Psi(x) + \lambda dt \int_0^x \Psi(x-z)F_C(dz) + \lambda \bar{F}_C(x)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(x+ct-z)\lambda e^{-\lambda t} F_C(dz)dt \\ &= \lambda \int_0^\infty \left(\int_0^{x+ct} \Psi(x+ct-z)F_C(dz) + \bar{F}_C(x+ct) \right) e^{-\lambda t} dt\end{aligned}$$

13.2 La resolution de l'EID pour sinistres exponentiels

Dans le cas des sinistres exponentielles d'intensité μ, la probabilité de ruine eventuelle $\Psi(u)$ satisfait

$$c\Psi'(x) + \lambda \left(\int_0^x \Psi(x-z)\mu e^{-\mu z} dz + e^{-\mu x} - \Psi(x) \right) = 0, \quad \Psi(\infty) = 0 \tag{13.4}$$

La solution est :

$$\Psi(x) = \rho e^{-\gamma x} = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta}{1+\theta}\mu x}, \quad \rho = -\frac{\kappa'(0)}{\kappa'(-\gamma)} = \frac{\lambda}{\mu c} < 1, \ \theta = \rho^{-1} - 1, \tag{13.5}$$

où $\gamma = \mu - \lambda/c > 0$ et $-\gamma$ est l'unique racine negative de l'équation Cramér Lundberg (15.1) $\kappa(s) = 0$, où $\kappa(s) = \log\left(E_0 e^{sX(1)}\right) = cs - \lambda s/(\mu+s)$ est le symbole du processus $X(t)$ avec sinistres exponentielles. Finalement, la transformée de Laplace est

$$\widehat{\Psi}(\delta|u) := E_u(e^{-\delta\tau}) = \rho(\delta)e^{-\gamma(\delta)u} = \left(1 - \frac{\gamma_\delta}{\mu}\right) e^{-\gamma_\delta u}, \tag{13.6}$$

où $-\gamma = -\gamma_\delta$ est la solution negative de

$$\widehat{a}(\delta + c\gamma)\widehat{p}(-\gamma) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta+c\gamma}\right)\left(\frac{\mu}{\mu-\gamma}\right) = 1 \tag{13.7}$$

Exercice 13.3. *Obtenir la formule* (13.5) *en appliquant la transformée de Laplace à l'EID* (13.4).

R : Appliquant la transformée de Laplace à l'EID (13.4) donne :

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(s) &= \int_0^\infty e^{-su}\Psi(u)du = \frac{c\Psi(0) - \lambda\frac{1}{s+\mu}}{s(c - \frac{\lambda}{s+\mu})} = \frac{s\Psi(0) + \Psi(0)\mu - \lambda/c}{s(s+\mu-\lambda/c)} \\ &= \frac{A}{s+\mu-\lambda/c} + \frac{B}{s} \Leftrightarrow \Psi(x) = Ae^{-x(\mu-\lambda/c)} + B\end{aligned}$$

§. When Napoleon became 1st consul in 1799, Laplace was appointed Minister of the Interior, a post he managed to keep for only six weeks. Apparently, although Napoleon was very fond of his scientific abilities, these very abilities weren't particularly helpful in politics. In fact, according to Rouse Ball, Napoleon wrote dismissively about Laplace's effort in his memoirs. "Laplace did not consider any question from the right angle : he sought subtleties everywhere, only conceived problems, and finally carried the spirit of "infinitesimals" into the administration. " (346)-http ://hiddenabacus.com/2011/06/the-spirit-of-infinitesimals-laplace-and-napoleon/

Pour obtenir l'inconnue $\Psi(0)$, il faut appliquer l'astuce de "simplification par s", which rests on the known fact that the net profit condition $p = c - \lambda/\mu > 0$ implies that $\Psi(\infty) = 0 \Leftrightarrow B = 0$. Le fait que s doit se simplifier dans la fraction ci-dessus implique la relation

$$\Psi(0) = \frac{\lambda\mu^{-1}}{c} = \frac{\lambda E C_1}{c}.$$

This argument and the last relation turn out to be valid with arbitrary claims distribution having finite mean, et implique la formule de Pollaczek-Khinchine – voir Section 13.3.

Note that $\Psi(0)$ and $\bar{\Psi}(0)$ are proportional respectively to the expected payments and profit per time unit.

Le resultat (13.5) peut être aussi obtenu par d'autres méthodes :

1. En reduisant (13.4) to a ODE with constant coefficients and then to look for combinations of exponentials (or to look directly for combinations of exponentials).
2. By the "ladder decomposition" for the Cramer Lundberg process due to Dubordieu(1952)-Benes(1957)-Kendall(1957).

13.3 La formule de Pollaczek-Khinchin pour la transformée de Laplace, à partir de l'EID

Nous avons déjà vu une formule (13.16) pour les probabilités de ruine $\Psi(u)$ exprimées en fonction de l'exposant de Cramér, et de la loi de la severité de ruine, obtenu par l'arrêt d'une martingale de Wald. Nous allons voir maintenant une dexième formule (13.12), qui exprime la transformée de Laplace $\widehat{\Psi}(s)$ en fonction de la fonction de répartition $F = F_C$ des montants des remboursements des sinistres (les C_i). Cette formule sera obtenue en appliquant et inversant la transformée de Laplace à l'EID (13.1) [§] .

Désignons par $f(u)$ la fonction de densité des sinistres, et par $m_i, i = 1, 2, ...,$ ses moments d'ordre i. La relation entre $F(u)$ et $\Psi(u)$ devient plus simple après avoir pris une transformée de Laplace dans l'équation integro-différentielle (13.1), ce qui ramène à :

$$\widehat{\Psi}(s)(cs - \lambda s\widehat{\bar{F}}(s)) = c\Psi(0) - \lambda\widehat{\bar{F}}(s) \quad \Leftrightarrow \widehat{\Psi}(s) = \frac{\Psi(0) - \widetilde{\lambda}\widehat{\bar{F}}(s)}{s(1 - \widetilde{\lambda}\widehat{\bar{F}}(s))} \tag{13.8}$$

où $\widetilde{\lambda} = \frac{\lambda}{c}$.

L'équation (13.8) pose un pb, car elle contient deux inconnues $\widehat{\Psi}(s)$ et $\Psi(0)$. Son solution est quand même possible par le "truc de la simplication de la singularité" en 0 qui fourni l'inconnue auxiliaire $\Psi(0)$: comme le coefficient $\kappa(s)$ de côté gauche s'annule pour $s = 0$, et comme $\widehat{\Psi}(0)$ prends une valeur finie [§] il suit que le côté droit s'annule aussi. Donc,

$$\Psi(0) = \frac{\lambda \int_0^\infty \bar{F}(x)dx}{c} = \frac{\lambda m_1}{c} := \rho,$$

(si $\lambda m_1 := \nu_1 = \int_0^\infty x\nu(dx) = E(S_1) < \infty$,) ce qui ramène finalement à la formule explicite de **Pollaczek-Khinchin** :

§. Cf. a famous joke, probabilists need not be clever, it is enough for them to be able to invert the Laplace transform.

§. Note that $\lim_{s\to 0} \widehat{\Psi}(s) = \int_0^\infty \Psi(u)du$. Since $\lim_{u\to\infty} \Psi(u) = 0$, it is plausible and indeed true under weak conditions that $\widehat{\Psi}(0)$ is well defined, c.-à-d. that the apparent singularity at 0 of $\widehat{\Psi}(s)$ must "simplify".

Proposition 13.2. *Pour le processus de risque de Cramér Lundberg avec*

$$\nu_1 = \int_0^\infty x\nu(dx) = E(S_1) < \infty,$$

a) Les probabilité de ruine et survie à partir de 0 *sont :*

$$\Psi(0) = \lim_{s\to\infty} s\widehat{\Psi}(s) = \frac{ES(1)}{c} = \frac{\nu_1}{c} = \frac{\lambda m_1}{c} := \rho$$
$$\bar{\Psi}(0) = P_0[\bar{P} = 0] = 1 - \rho = \frac{\kappa'(0)}{c}.$$

b) Les transformées de Laplace des probabilité de ruine et de survie sont :

$$\widehat{\Psi}(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}\Psi(u)du = \lambda\frac{m_1 - \widehat{\bar{F}}(s)}{\kappa(s)} = \rho\frac{\frac{1-\widehat{f}_e(s)}{s}}{1-\rho\widehat{f}_e(s)} = \rho\frac{\widehat{\bar{F}}_e(s)}{1-\rho\widehat{f}_e(s)} = \frac{1}{s} - \frac{\kappa'(0)}{\kappa(s)} \tag{13.9}$$

$$\widehat{\bar{\Psi}}(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}\bar{\Psi}(u)du = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}P[\overline{\mathcal{D}} \leq u]du = \frac{\kappa'(0)}{\kappa(s)} = \frac{1-\rho}{s(1-\rho\widehat{f}_e(s))} = \frac{\bar{\Psi}(0)}{s(1-\rho\widehat{f}_e(s))}, \tag{13.10}$$

où $\rho = (\lambda m_1)/c$*, et* $f_e(x) := \bar{F}(x)/m_1$ *dénote la densité stationnaire des excédents des remboursements, avec transformée de Laplace* $\widehat{f}_e(s) = (1 - b^*(s))/(m_1 s)$ *et moments* $\mu_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}$.

c) La transformée de Laplace de la densité de la perte maximale $\bar{P}$ *est*

$$\phi(s) := E[\mathrm{e}^{-s\bar{P}}] = P[\bar{P} = 0] + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}f_{\bar{P}}(u)du = 1 - \rho + \int_0^\infty e^{-sz}d\bar{\Psi}(z)$$
$$= 1 - \rho + (s\widehat{\bar{\Psi}}(s) - \bar{\Psi}(0)) = s\widehat{\bar{\Psi}}(s) = \frac{\kappa'(0)s}{\kappa(s)} = \frac{1-\rho}{1-\rho\widehat{f}_e(s)}. \tag{13.11}$$

$$\widehat{\bar{\Psi}}(s) = \frac{\phi(s)}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\Psi}(s) = \frac{1-\phi(s)}{s}. \tag{13.12}$$

Remarque 13.1. *Les premières deux formules sont valables pour tout processus de Lévy spectralement negatif, avec* $E(S_1) < \infty$ *pourvu qu'elles soit exprimés entièrement en fonction du symbôle* $\kappa(s)$*, et qu'on remplace* $\lambda\widehat{\bar{F}}(s)$ *par la transformée* $\widehat{\bar{\nu}}(s)$ *de la mesure de Lévy.*

La dernière formule c), plus simple, est aussi importante a cause de plusieurs intrepretations probabilistes : transformée de la densité du supremum d'un processus de Lévy spectralement positif, transformée de la densité du temps d'attente stationnaire dans une file M/G/1, un des deux facteurs de la fameuse Wiener-Hopf décomposition – voir Bertoin et aussi chapitre **??**.

Exercice 13.4. *Obtenir la formule* (13.5) *pour les probabilités de ruine au cas des sinistres exponentiels de taux* μ*, en inversant la formule de Pollaczek-Khinchine.*

Réponse: On a $f_e(s) = \frac{\mu}{\mu+s}, \widehat{\bar{F}}_e(s) = \frac{1}{\mu+s}$. Par Pollaczek-Khinchine ,

$$\widehat{\Psi}(s) = \rho\frac{\widehat{\bar{F}}_e(s)}{1-\rho\widehat{f}_e(s)} = \rho\frac{1}{s+\mu-\rho\mu} \Longrightarrow \Psi(x) = \rho e^{-x\mu(1-\rho)} = \rho e^{-x(\mu-\lambda/c)}.$$

Exercice 13.5. *Appliquer la formule de Pollaczek-Khinchine au cas des sinistres ayant une loi exponentielle de paramètre* μ*, translatée à droite par* a.

R : Par la formule de Pollaczek-Khinchine , transformée de Laplace des probabilités de survie est :

$$\hat{\hat{\Psi}}(s) = \frac{1-\widetilde{\lambda} m_1}{s(1-\widetilde{\lambda}\hat{\hat{F}}(s))} = \frac{1-\widetilde{\lambda} m_1}{s(1-\widetilde{\lambda}(\frac{1}{s}-\frac{\mu e^{-as}}{s(\mu+s)}))} = \frac{(1-\widetilde{\lambda} m_1)(\mu+s)}{s(\mu+s)-\widetilde{\lambda}((\mu+s)-\mu e^{-as}))}$$
$$= \frac{(1-\widetilde{\lambda} m_1)(\mu+s)}{s^2+s(\mu-\widetilde{\lambda})-\widetilde{\lambda}\mu(1-e^{-as})}$$

Remarque 13.2. *Notons que la formule de Pollaczek-Khinchin produit également la distribution stationnaire de la durée d'attente dans une file d'attente M/G/1, et en fait la distribution de toute somme géométrique composée.*

Remarque 13.3. *Les processus qui sont continues (sans "sauts") vers le haut ou vers le bas – voir Figure 13.3– sont plus faciles a étudier. C'est pour cela qu'en actuariat, comme dans la théorie des files d'attente, on arrive souvent a trouver des formules exactes.*

Le modèle de Cramér-Lundberg est un cas particulier de processus de Lévy spectralement negatif, c.-à-d. sa mesure de Lévy est concentré sur $(-\infty, 0)$.

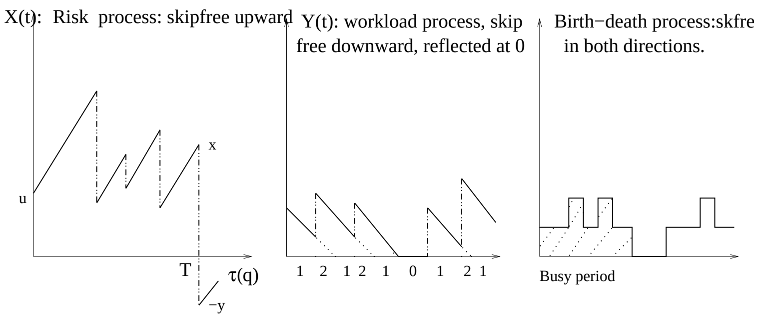


FIGURE 13.1 – Skip-free (spectrally one sided) processes

13.4 Inversion symbolique de la formule de Pollaczek-Khinchine pour exposants de Lévi rationnels

From the Pollaczek-Khinchine formula(13.8), it is clear that if the claims have a rational Laplace transform

$$\bar{B}^*(s) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} a_k s^k}{s^K + \sum_{k=0}^{K-1} b_k s^k}, \tag{13.13}$$

then the same will be true of the Laplace transform of the ultimate ruin probability. Furthermore, the Laplace transform may be inverted symbolically § , by splitting into partial fractions, which

§. Avec un logiciel symbolique comme Mathematica, il suffit de calculer InverseLaplaceTransform[Simplify[$\lambda \frac{m_1 - \hat{\hat{F}}(s)}{s(c-\lambda\hat{\hat{F}}(s))}$]].

For non-rational symbols, the task of Laplace inversion is more challenging ; for example, the case of lognormal claims is not so straightforward.

yields mixtures of exponentials involving the (possibly complex) roots of the Cramer-Lundberg equation. Le résultat final est explicit.

Si les racines du denominateur sont en plus réeles, la décomposition en fractions simples et l'inversion sont faciles même à la main, sans logiciels symboliques (si jamais on est perdu sur une ile deserte).

Exercice 13.6. *Retrouver les probabilités de ruine avec sinistres exponentiels en inversant la formule Pollaczek-Khinchine .*

Exercice 13.7. *Soit $Y(t)$ un processus de Cramér-Lundberg*

$$Y(t) \quad = \quad u + c\,t - S(t), \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i, \tag{13.14}$$

où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}_C(x) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{5}{6}\mathrm{e}^{-6x}$. a) Calculez l'espérance des sinistres $m_1 = \mathrm{EC}_1$. Calculez le taux de profit $p = c - \lambda m_1$ et la probabilité de ruine avec reserves initiales $u = 0$ $\rho = \Psi(0) = \frac{\lambda m_1}{c}$, si le taux de cotisation est $c = 3m_1/2$.

b) Calculez l'exposant de Lévy et le coefficient d'ajustement de Lundberg.

c) Calculez la probabilité de ruine $\Psi(u)$, en utilisant la formule de Pollaczek-Khinchin pour sa transformée de Laplace

$$\widehat{\Psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{p}{\kappa(s)} = \frac{1}{s} - \frac{1-\rho}{s\,(1-\rho f_e^*(s))},$$

où l'exposant de Lévy est $\kappa(s) = s\left(c - \lambda \bar{F}_C^*(s)\right) = cs\,(1-\rho f_e^*(s))$, et la transformée de la severité de ruine est $f_e^*(s) = \bar{F}_C^*(s)/m_1$.

d) Calculer l'approximation de Cramér Lundberg .

e) Calculer l'exposant de l'approximation de De Vylder $R_d = \frac{6\theta m_1 m_2}{2\theta m_1 m_3 + 3m_2^2}$, et l'approximation de De Vylder optimisée.

f) (*) On decompose $\Psi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x), \phi_I(x) = \mathbb{P}_x[T < \infty, J_T = i], i = 1, 2$, où J_T est la phase des sinistres au moment final. Calculer $\phi_0(x), \phi_1(x)$ en appliquant le théorème d'arrêt aux deux martingales arrêtées de Wald $M_t = e^{-\gamma_i X(t)}, \gamma_i > 0, i = 1, 2$.

R : a) L'espérance des sinistres est $m_1 = \frac{1}{6\times 2} + \frac{5}{6\times 6} = \frac{2}{9}$ et le taux de profit $p = \frac{1}{9}$.

b) l'exposant de Lévy est $s(1/3 - \frac{1}{6(s+2)} - \frac{5}{6(s+6)}) = \frac{s(s+1)(s+4)}{3(s+2)(s+6)}$, avec racines $0, -1, -4$.

c) La transformée de Laplace est

$$\widehat{\Psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1/9}{s(3/9 - \frac{1}{6(s+2)} - \frac{5}{6(s+6)})} = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{(s+2)(s+6)}{3(s+1)(s+4)}\right) = \frac{5}{9(s+1)} + \frac{1}{9(s+4)}$$

et la probabilité de ruine est $\Psi(u) = \frac{5}{9}\mathrm{e}^{-u} + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-4u}$.

Dans les exercices suivantes, calculer la probabilité de ruine en utilisant la formule (13.8), avec coefficients A_i a determiner en utilisant la decomposition en fractions simples.

Exercice 13.8. *Soit $Y(t)$ un processus de Cramér-Lundberg*

$$Y(t) \quad = \quad u + c\,t - S(t), \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i, \tag{13.15}$$

où $N_\lambda(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}_C(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3x} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-5x}$. a) Calculez l'espérance des sinistres $m_1 = \mathrm{EC}_1$, la transformée de la severité de ruine avec reserves initiales $u = 0$ $f_e^*(s) = \bar{F}_C^*(s)/m_1$, et la probabilité de ruine avec reserves initiales $u = 0$, $\rho = \Psi(0) = \lambda m_1/c$, si le taux de cotisation est $c = 15m_1/7$.

b) Calculez la probabilité de ruine $\Psi(u)$, à partir de la formule de Pollaczek-Khinchin pour sa transformée de Laplace

$$\widehat{\Psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{p}{\kappa(s)} = \frac{1}{s} - \frac{1-\rho}{s\,(1-\rho f_e^*(s))}.$$

a) L'espérance des sinistres est $m_1 = \frac{7}{30}$, $\rho = \frac{7}{15}$, et $f_e^*(s) = \frac{45}{14(s+5)} + \frac{15}{14(s+3)}$.

b) La transformée de Laplace est

$$\widehat{\Psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{8/15}{s(1-(\frac{3}{2(s+5)} + \frac{1}{2(s+3)})} = \frac{7s+26}{15\,(s^2+6s+8)}$$
$$= \frac{1}{15(s+4)} + \frac{2}{5(s+2)}$$

et la probabilité de ruine est $\Psi(u) = \frac{1}{15}\mathrm{e}^{-4u} + \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2u}$.

Exercice 13.9. *Calculez la probabilité de ruine $\Psi(x)$ pour un processus de Cramér-Lundberg $Y(t) = u + c\,t - C(t)$, $\quad C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, $c = 8/5m_1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-4x}$.*

Exercice 13.10. *Calculez la probabilité de ruine $\Psi(x)$ pour un processus de Cramér-Lundberg $Y(t) = u + c\,t - C(t)$, $\quad C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, $c = 10/7m_1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}(x) = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{8}{9}\mathrm{e}^{-5x}$.*
R : $\Psi(x) = \frac{6}{10}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-3x}$

Exercice 13.11. *Calculez la probabilité de ruine $\Psi(x)$ pour un processus de Cramér-Lundberg $Y(t) = u + c\,t - C(t)$, $\quad C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, $c = 4/3m_1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}(x) = \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{15}{16}\mathrm{e}^{-6x}$.*
R : $\Psi(x) = \frac{5}{8}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3x}$

Exercice 13.12. *Calculez la probabilité de ruine $\Psi(x)$ pour un processus de Cramér-Lundberg $Y(t) = u + c\,t - C(t)$, $\quad C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, $c = 5/3m_1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-5x}$.* **R :** $\Psi(x) = \frac{8}{15}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{15}\mathrm{e}^{-4x}$

Exercice 13.13. *Calculez la probabilité de ruine $\Psi(x)$ pour un processus de Cramér-Lundberg $Y(t) = u + c\,t - C(t)$, $\quad C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, $\theta = 2/5$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{-7x})$.*

Exercice 13.14. *Comparer numériquement les résultats des exercices précedants avec l'approximation de Cramér-Lundberg, qui retient seulement le terme dominant.*

Exercice 13.15. *(*)*

1. *Montrer que la probabilité de ruine avec des sinistres de loi Erlang(2,μ) est*

$$\Psi(u) = \rho e^{-u\mu(1-\rho/4)} \left(\cosh\left(u\mu\sqrt{\rho(8+\rho)}/4\right) + \frac{2+\rho}{\sqrt{\rho(8+\rho)}} \sinh\left(u\mu\sqrt{\rho(8+\rho)}/4\right) \right).$$

   Tracer sur le même graph la solution exacte, ainsi que le résultat obtenu en inversant la transformée de Laplace, et l'approximation de Cramér Lundberg. Prendre $\mu = 2$ pour Erlang(2,μ) (afin que la moyenne soit 1) et $\rho = \frac{4}{5}$.

2. *Tracer sur le même graph la solution exacte, ainsi que le résultat obtenu en inversant la transformée de Laplace, et l'approximation de Cramér Lundberg pour les probabilités de ruine dans le cas des sinistres C_i avec une distribution hyperexponentielle $\bar{F}(x) = \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{15}{16}\mathrm{e}^{-6x}$ (**R :** $\Psi(x) = \frac{5}{8}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3x}$).*

13.5 L'identité de Gerber

Proposition 13.3. La formule de Gerber. *Si l'équation de Cramér-Lundberg $\kappa(\theta) = 0$ admet une racine negative $\theta = -\gamma$, alors*

$$\Psi(u) = \frac{e^{-\gamma u}}{E_u[e^{-\gamma X(\tau)} | \tau < \infty]} < e^{-\gamma u} \tag{13.16}$$

Dem : Arretons la martingale de Wald $M_t = e^{-\gamma X(t)}$, où $-\gamma$ est la solution négative de l'équation de Cramér-Lundberg $\kappa(-\gamma) = 0$, au temps d'arrêt τ. Comme cette variable aléatoire n'est pas bornée, nous travaillerons plutôt avec le temps borné $\tau_n = \min(n; \tau)$, avec $n \to \infty$. Le théorème d'arrêt, et le conditionnement sur le moment de la ruine (avant ou après n), donnent :

$$e^{-\gamma u} = E_u e^{-\gamma X(\tau_n)} = E_u[e^{-\gamma X(\tau)}; \tau \leq n] + E_u[e^{-\gamma X(n)}; \tau > n].$$

Par le théorème de la convergence dominée, le deuxième terme converge vers

$E_u \lim_{n\to\infty}[e^{-\gamma X(n)}; \tau > n] = E_u[e^{-\gamma \lim_{n\to\infty} X(n)}; \tau = \infty] = 0$, et le premier terme converge vers $E_u[e^{-\gamma X(\tau)}; \tau \leq \infty]$, par le théorème de la convergence monotone. Dés lors, on a le resultat :

$$e^{-\gamma u} = E_u[e^{-\gamma X(\tau)}] = P_u[\tau < \infty] E_u[e^{-\gamma X(\tau)} | \tau < \infty]. \tag{13.17}$$

Remarque 13.4. *La formule* (13.17) *est valable pas seulement dans la théorie classique de la ruine avec données i.i.d., mais aussi dans le cas des données ARMA – voir Gerber, Ruin theory in the linear model(1982), et Yang, Hailiang and Zhang, Lihong RUIN PROBABILITY IN THE LINEAR TIME SERIES MODELS, et aussi pour des temps d'arrêt arbitraires (voir Promislow The probability of ruin in a process with dependent increments(1991)).*

Par contre, a l'exception du temps de ruine et du cas des sinistres exponentielles, quand cette formule devient (**??**)*, le denominateur en* (13.17) *depend toujours de u. Par conséquent,* (13.17) *est une identité liant deux inconnues : la severité de ruine et les probabilités de ruine, plutot qu'une formule pour les calculer.*

13.6 Exercices

Exercice 13.16. *a) Démontrer que R défini par $m_X(R) - 1 = (1+\theta)m_1 R = \frac{m_1}{\rho}$ satisfait $R < 2\theta\frac{m_1}{m_2}$. Ind : Use $e^{rx} > 1 + rx + \frac{1}{2}(rx)^2$ for $r > 0, x > 0$.*

b) Donner l'expansion de R en sommes des puissances de $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{c}$, en utilisant l'expansion de Lagrange $\frac{R}{\phi(R)} = \tilde{\lambda} \implies R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[R^{n-1}](\phi^n(R))\tilde{\lambda}^n$, où $[R^k]$ est l'operateur de Taylor d'extraction du coefficient de la puissance k.

R : $\frac{m_1 R}{m_X(R)-1} = \frac{1}{1+\theta} \Longrightarrow R \approx \frac{2m_1\theta}{m_2} - \frac{4\left(m_1^2 m_3\right)\theta^2}{3m_2^3} + \frac{2m_1^3\left(8m_3^2-3m_2m_4\right)\theta^3}{9m_2^5} + \frac{4m_1^4\left(-100m_3^3+75m_2m_4m_3-9m_2^2m_5\right)\theta^4}{135m_2^7} +$
et

$$\frac{m_1 R}{m_X(R)-1} = \rho \Longrightarrow R \approx \frac{6(1-\rho)m_1 m_2}{2(1-\rho)m_1 m_3 + 3\rho m_2^2} = \frac{6pm_2}{2pm_3 + 3\lambda m_2^2} = R_{DeV}.$$

Exercice 13.17. *a) Trouver le coefficient d'adjustment R au cas des sinistres ayant*
a) une loi uniforme sur $[0,1]$
b) valeur constante a
c) une loi exponentielle de paramètre μ*, translatée à droite par a, avec mass p en a.*

Exercice 13.18. *Verifier l'identité de Gerber par simulations.*

Remarque 13.5. *On peut montrer que si le coefficient d'ajustement existe, alors le denominateur en* (13.16) *converge vers une constante quand* $u \to \infty$*, donnant naissance á l'***approximation asymptotique de Cramér Lundberg** *:*

$$\Psi(u) \sim C \mathrm{e}^{-\gamma u}, \text{ où} \tag{13.18}$$
$$C = \frac{\kappa'(0)}{-\kappa'(-\gamma)} = \frac{1-\rho}{\rho\,\gamma} \frac{1}{\int_0^\infty x e^{\gamma x} f_e(x)dx} = \frac{\theta}{\gamma} \frac{1}{E_e^{(\gamma)}[C.]},\ f_e(x) = \frac{\bar{F}(x)}{m_1}.$$

Cette approximation est valable ssi l'équation Cramér Lundberg (15.1) admet une solution negative, et $\kappa'(-\gamma) > -\infty$ *(notons que* $\kappa'(0) = E_0 X(1) = c - \lambda m_1 > 0$*, et* $\kappa'(-\gamma) < 0$ *par la convexité de* κ*). Essentiellement, il s'agît de retenir seulement le terme exponentiel dominant (par exemples dans les exercices du chapitre 13.4).*

Les composantes de l'approximation (13.18) *sont les héros principaux de la théorie de la ruine :* $\rho = \Psi(0)$*, le coefficient d'ajustement* γ *(qui est aussi la singularitée dominante de la transformée de Laplace* $\widehat{\Psi}(s)$*, la "densité d'equilibre"* $f_e(x)$ *et la "densité ajustée"* $\widetilde{f_e}(x) = e^{\gamma x} f_e(x)$*, avec transformée de Laplace* $\widehat{\widetilde{f_e}}(s) = \rho \widetilde{f_e}(s-\gamma)$ *avec singularitée dominante en* $s = 0$ *(et masse de probabilité* $\widehat{\widetilde{f_e}}(0) = \widehat{f_e}(-\gamma) = \rho^{-1}$*). Nous le reverrons tous plus tard.*

Exercice 13.19. *a) Calculer* $\phi(b) = E_0[e^{-q\tau_b^+}]$ *en utilisant une martingale de Wald*

$$M(t) = e^{sX(t)-\kappa(s)t},$$

avec s choisi judicieusement.

b) Soit $\bar{X}(t) = \sup_{\{0 \le s \le t\}} X(s)$*, et soit* $\mathcal{E}$ *une v.a. exponentielle de taux q. Montrer que* $\bar{X}_{\mathcal{E}}$ *a une loi exponentielle, avec un taux qu'on determinera.*

Exercice 13.20. Le processus de risque dual. *Soit* $X(t) = u - t + c\sum_{i=1}^{N_\mu(t)} I_i$ *un processus de risque dual, où* I_i *sont i.i.d.,* $\mathcal{L}(I_i) = Expo(\lambda)$*.*

Trouver une martingale de Wald $M_t = e^{-\theta X(t)}$*. Calculer la probabilité de ruine*

R : θ est la solution négative de l'équation de Cramér-Lundberg $\kappa(\theta) = 0$, $\theta = \mu c - \lambda = \mu c(1-\rho)$. $P[T_0 < \infty] = e^{-\theta u}$.

Chapitre 14

TP : R et Sage

[Kaas et al., 2008, Exa 4.3.7] **Simulation des probas de ruine pour le processus Cramér Lundberg avec sinistres** *Gamma*. The following R program counts how often ruin occurs in the first n = 300 claims of a simulated ruin process. This way we get an estimate of $\Psi_n(u)$, the probability of ruin at or before the n-th claim. The claims are $Gamma(\alpha, \alpha)$ distributed with $\alpha = 2$. Because the claims are not very heavy-tailed, it is to be expected that if ruin occurs, it will occur early. This is because the surplus process will drift away from zero. So this program gives a good approximation for $\Psi(u)$:

```
 u = 5; la = 1; m = 1; theta = 0.2;
c = (1+theta)*la*m; n = 300;  alpha = 2; nSim =  100;
N = rep(Inf, nSim) ##Initialisation des indices de ruine
Y = rep(0, nSim) ##Initialisation des deficits de ruine
set.seed(2);
for (k in 1:nSim){
W = rexp(n)/la; T = cumsum(W)
X = rgamma(n, shape=alpha)/alpha ## sinistres de moyenne EC=1
S = cumsum(X); U = u + T*c - S
ruin = !all(U>=0) #ruine=non-survie
if (ruin) {N[k] = min(which(U<0));Y[k]=-U[N[k]];V=U}
}
 #N sont les indices de ruine
Nf = N[N<Inf];#selecte les valeurs True
 length(Nf); mean(Nf); sd(Nf); max(Nf);
## 34 31.2 22.5 119
Yf = Y[Y>0];mean(Yf)
x11()
  par(bg='lightblue')    #plot background color
  plot(V,type='l',main='probabilit\'e de ruine', col='white',lwd=3, xlab='temps')#plot derni
 abline(h=0,col='red',lty=2,lwd=3)
```

Les 34 ruines $N[N < Inf]$ arrive aux temps 31.2 ± 22.5, avec un maximum de 119, donc $n = 300$ sinistres suffisent pour bien approximer $\Psi(u) \sim \Psi_n(u)$. Hence a good estimate of the ultimate ruin probability is $\Psi(u) \sim 34/100$.

Exercice 14.1. *a) Augmenter le nb. des simulations a 10000.*

b) Calculer $\Psi(u)$ en utilisant les approximations de Renyi et de Vylder (les moments sont $m_1 = \frac{\alpha}{\mu}, m_2 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{\mu^2}, m_3 = \frac{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)}{\mu^3}$).

c) Calculer le coefficient d'ajustement R et l' approximation de Cramér Lundberg

d) Calculer la valeur exacte $\Psi(u)$ en utilisant Actuar.

e) Calculer la valeur exacte par l'Exercice (13.15), *où on montre que la probabilité de ruine avec des sinistres de loi Erlang(2,μ) est*

$$\Psi(u) = \rho e^{-u\mu(1-\rho/4)} \left(\cosh\left(u\mu\sqrt{\rho(8+\rho)}/4\right) + \frac{2+\rho}{\sqrt{\rho(8+\rho)}} \sinh\left(u\mu\sqrt{\rho(8+\rho)}/4\right) \right). \quad (14.1)$$

R : a) $\Psi(u) \sim 0.2796$. c) Cramér Lundberg donne $\Psi(u) \sim Ce^{-Ru} = .0715$. d) La probabilité de ruine exacte est .07386.

Exercice 14.2. *Simuler et estimer, pour des sinistres exponetielles, à partir de $u = 0$: a) l'espérance et la loi du deficit de ruine ; b) l'espérance du temps de ruine.*

Simulation des probas de ruine pour le processus Cramér Lundberg avec sinistres exponentielles.

```
 u = 2; la = 1; m = 7; theta = 0.1;
c = (1+theta)*la*m; n = 10000;   nSim =  100;
N = rep(Inf, nSim) ##Initialisation des indices de ruine
Y = rep(0, nSim) ##Initialisation des deficits de ruine
set.seed(2);
for (k in 1:nSim){
W = rexp(n)/la; T = cumsum(W)
X = rexp(n) *m ## sinistres de moyenne 3
S = cumsum(X); U = u + T*c - S
ruin = !all(U>=0) #ruine=non-survie
if (ruin) {N[k] = min(which(U<0));Y[k]=-U[N[k]];V=U}
}
 #N sont les indices de ruine
Nf = N[N<Inf];#selecte les valeurs True
 length(Nf); mean(Nf); sd(Nf); max(Nf);
## 34 31.2 22.5 119
Yf = Y[Y>0];mean(Yf)
```

Exercice 14.3. *Repeter les deux dernières exos pour des sinistres Pareto avec la même moyenne et variance. Est-ce que la ruine arrive aussi vite ?*

Exercice 14.4. *Example 4.6.1 (MAT).* $\lambda = 1, p(1) = p(2) = 1, c = (1+\theta)m_1 = 1.8$. *Find the adjustment coefficient R for the total claims S.*

Using R's numerical routine uniroot for one-dimensional root (zero) finding, we find the adjustment coefficient

```
f <- function (r) exp(r)/2 + exp(2*r)/2 - 1 - 1.8*r
R <- uniroot(f, low=0.00001, up=1)$root ## 0.2105433
```

The first parameter of uniroot is the function f of which the zero R is sought. The lower and upper parameter give an interval in which the root of the equation f (R)=0 is known to lie ; the signs of the function f must be opposite at both ends of that interval. Note that the function is computed at both endpoints first, so the upper bound must be chosen with some care in this case. Of course one can use the upper bound $R \leq 2\theta m_1/m_2$ see Exercise 4.3.2.

Voir aussi **R Package Actuar**

```
 vignette("risk", package = "actuar", lib.loc = NULL, all = TRUE)
demo("risk", package = "actuar")
```

Pour calculer des probas de ruine exactes, en inversant la transformée de Laplace, on a besoin des logiciels symbolyques comme Maple, Sage, etc.

1. Sage utilise = pour les affectations. Il utilise $==, <=, >=, <, >$ pour les comparaisons.
2. L'execution des commandes se fait avec shift-enter $sage$: $sin(pi/3)$. Comme le montre cet exemple, certaines expressions mathématiques renvoient des valeurs 'exactes' plutôt que des approximations numériques. Pour obtenir une approximation numérique, on utilise au choix la fonction n ou la méthode n (chacun de ces noms possède le nom plus long numerical_approx, qu'on peut apprendre en tapant n-Tab). L'abbreviation N est identique à n. Cette commande accepte, en argument optionnel prec (par défaut), qui indique le nombre de (bits ?) de précision requis ; par défaut, il y a 53 bits de précision (approx. 15 chiffres). On peut aussi specifier les digits, qui indique le nombre de décimales demandées.

   sage : exp(2) e^2 sage : n(exp(2)) 7.38905609893065 sage : sqrt(pi).numerical_approx() 1.77245385090552 sage : sin(10).n(digits=5) -0.54402 sage : N(sin(10),digits=10) -0.5440211109 sage : numerical_approx(pi, prec=10)
3. Obtenir de l'aide : sage : ?sudoku

   EXAMPLE : sage : A = matrix(ZZ,9,[5,0,0, 0,8,0, 0,4,9, 0,0,0, 5,0,0, 0,3,0, 0,6,7, 3,0,0, 0,0,1, 1,5,0, 0,0,0, 0,0,0, 0,0,0, 2,0,8, 0,0,0, 0,0,0, 0,0,0, 0,1,8, 7,0,0, 0,0,4, 1,5,0, 0,3,0, 0,0,2, 0,0,0, 4,9,0, 0,5,0, 0,0,3])

   sage : sudoku(A)
4. Les définitions de fonctions en Sage sont introduites par la commande def, et la liste des noms des paramètres est suivie de deux points, comme dans :

   sage : def iseven(n) : return n%2 == 0

   Voir les tutoriels SAGE, les démos et l'aide pour les concepts de base : listes, dictionnaires, programmation, fonctions,
5. Pourquoi utiliser des logiciels symboliques (c'est sûr que Scilab/Matlab sont plus facile à maitriser, et plus transparents dans leur fonctionnement) ? C'est parce qu'ils peuvent répondre vite à certaines de nos questions. Essayez les questions suggérées, et/où proposez d'autres :

   (a) int$(1/sqrt(x^2 + 2 * x - 1), x)$

   (b) int$(1/sqrt(x^3 + 2 * x - 1), x)$

   (c) int$(1/sqrt(x^4 + 2 * x - 1), x)$

   Les réponses à ces deux dernières questions sont un peu bizarres ; maxima et mathematica sont plus claires : ils répétent la question quand ils ne peuvent pas répondre.

   (d) desolve(y" + y' + y=0) donne encore une fois une réponse un peu bizarre

   (e) desolve(x* y'+ y=0,y)

   (f) desolve(y" + x* y' + y=0,y) ne réussit pas ; pendant que maxima y arrive avec : 'diff(y,x,2) + x* 'diff(y,x) +y ; ode2(a,y,x) ;

   (g) desolve(x * y" + y'+ y=0,y) ne réussit pas ; cette fois maxima, a :x* 'diff(y,x,2) + 'diff(y,x) +y ; ode2(a,y,x) ; ne réussit non plus, pendant que mathematica y arrive...
6. Le comportement transient et asymptotique d'une marche cyclique, (ou les puissances des matrices circulantes) :

A :=matrix(3,3,[[1-b-c,b,c],[c,1-c-b,b],[b,c,1-c-b]])
simplify(A^3)
limit(A^n,n,+infinity) //Trop dur pour xcas... et aussi pour Maxima

Exercice 14.5. *Traduire en Sage le programme de [Kaas et al., 2008, Exa 4.3.7].*

Inversion symbolique avec Sage

```
x,t=var('x','t')
# compute ruin probability given the survival function of claim size,
#using Pollaczek-Khinchin identity
# Fs is the survival function, m1 the first moment, c the increase slope,
#_lambda the Poisson process rate,
# x the input variable, t the ouput variable
def ruin(Fs, rho, x, u):
    var('s')

    L_F=laplace(Fs,x,s)
    m1=L_F(s=0)
    fe=L_F/m1
    Fe=factor((1-fe)/s)
    L_rui=factor(rho*Fe/(1-rho*fe))
    rui=inverse_laplace(L_rui,s,u)

    return rui, Fe, L_rui


# hyper exponential distribution
Fs = (1/6*exp(-2*x)+5/6*exp(-6*x))
print('Hyperexponential claims:',Fs)

# should be 5/9*e^(-t) + 1/9*e^(-4*t)
var('u')
rui, Fe, L_rui = ruin(Fs, 2/3, x,u)
print('LT of ruin by PK:',L_rui)
L_rui.show()
print('ruin prob:',rui)
('Hyperexponential claims:', 1/6*e^(-2*x) + 5/6*e^(-6*x))
('LT of ruin:', 1/3*(2*s + 7)/((s + 4)*(s + 1)))
2s+73(s+4)(s+1)
2s+73(s+4)(s+1)

('ruin prob:', 5/9*e^(-u) + 1/9*e^(-4*u))
In [9]:
A=[1/6,2/6,3/6];ex=[2,6,4];F=sum(A[i]* exp(-x *ex[i]) for i in [0..2]);
F.show()
rui, Fe, L_rui = ruin(F, 2/3, x,u)
rui.show()
rui #doesn't work with non-integer roots

#roots seem complex
FL(s)=sum(A[i]/(s+ex[i]) for i in [0..2]);
fe=FL(s)/FL(0);r=2/3;Fe=factor((1-fe)/s);PK=factor(r* Fe/(1-r* fe));PK.show()
den=denominator(PK);rt=den.roots(multiplicities=False);rt
2(19s2+156s+284)3(19s3+180s2+468s+304)
2(19s2+156s+284)3(19s3+180s2+468s+304)

Out[11]:
[-1/2*(8/361*I*sqrt(10403) - 4112/6859)^(1/3)*(I*sqrt(3) + 1) + 1/361*(318*I*sqrt(3) - 318)
 -1/2*(8/361*I*sqrt(10403) - 4112/6859)^(1/3)*(-I*sqrt(3) + 1) + 1/361*(-318*I*sqrt(3) - 31
 (8/361*I*sqrt(10403) - 4112/6859)^(1/3) + 636/361/(8/361*I*sqrt(10403) - 4112/6859)^(1/3)
```

```
In [14]:
#roots are actually real
C=ComplexField(53);dec=Frac(C['s'])(PK).partial_fraction_decomposition();
dec
Out[14]:
(0,
 [0.586757639348049/(s + 0.982058798728045),
  0.0678213275792160/(s + 2.92876219913591),
  0.0120876997394015/(s + 5.56286321266236)])
In [15]:
par=[inverse_laplace(dec[1][i],s,u) for i in [0..2]];
ruin=sum(par);ruin
Out[15]:
13837621/23583197*e^(-32539385/33133846*u) + 40466576/596664463*e^(-15175724/5181617*u) + 19
```

```
#Renyi approximation
var('u,s');A=[1/6,2/6,3/6];ex=[2,6,4];
F(s)=sum(A[i] /(s+ ex[i]) for i in [0..2]);m1=F(0);
m2=sum(2 *A[i] /(ex[i]^2) for i in [0..2]);
m3=sum(6* A[i] /(ex[i]^3) for i in [0..2]);
r=2/3;Ren= r*exp(-u*2*m1* (1-r)/m2);
```

```
er=abs(ruin-Ren);ers(u)=er.function(u);plot(ers(u),u,0,4)
integral_numerical(ers(u),0,+Infinity)
```

Chapitre 15

Examens d'entraînement

15.1 Examen 1

1. Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ un processus de Markov en temps continu sur l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$. Supposons que la matrice infinitésimale (de taux de transitions) de X est donnée par

$$G = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

   (a) Quelles sont les probabilités de transition de la chaîne incluse associée aux temps de saut ?

   (b) Quelle est la loi conditionelle de $T^{(3)} = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 3\}$, en sachant que $X_0 = 3$?

   (c) Soit $T(3) = \inf\{t \geq 0 : X_t = 3\}$. Donnez un système des équations pour $t_1 = \mathrm{E[T(3)|X_0 = 1]}$ et $t_2 = \mathrm{E[T(3)|X_0 = 2]}$. Résolvez les équations.

   (d) Calculez l' espérance du temps de retour $\mathrm{E[\widetilde{T}(3)|X_0 = 3]}$, où $\widetilde{T}(3) = \inf\{t > T^{(3)} : X_t = 3\}$.

   (e) Combien d'**équations d'équilibre detaillé**

$$\pi_i G(i, j) = \pi_j G(j, i), \qquad \text{avec } i \neq j,$$

   y a t'il ? Est-ce qu'ils admettent des solutions strictement positives ? Le cas échéant, trouvez la distribution stationnaire.

   (f) Calculez, pour le processus absorbé en 3, la fonction de survie matricielle de $T(3)$

$$P_{i,j}(t) = \mathbb{P}[t \leq T(3), X(t) = j | X_0 = i], i = 1, 2.$$

   (g) Calculez la fonction de survie $\bar{P}_1(t) = \mathbb{P}[T(3) \geq t | X_0 = 1]$ et $\bar{P}_2(t) = \mathbb{P}[T(3) \geq t | X_0 = 2]$ à partir de la réponse précedente.

2. Soit $S(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i$ un processus de Poisson composé, avec C_i i.i.d, $EC_1 = m_1, \operatorname{Var} C_1 = \sigma^2$, et $N_\lambda(t)$ un processus de Poisson d'intensité λ.

   (a) Calculer la fonction génératrice des moments

$$\phi(\theta) = E\mathrm{e}^{\theta S(t)}$$

   (b) Calculer $ES(t)$ et $E[S(t)]^2$, et $E[S(s)S(t)], t \leq s$.

3. Soit $Y(t)$ un processus de Cramér-Lundberg

$$Y(t) \quad = \quad u + c\,t - S(t), \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i, \tag{15.1}$$

où $N_\lambda(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}_C(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3x} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-5x}$.

a) Calculez l'espérance des sinistres $m_1 = \mathrm{E}C_1$, la transformée de la severité de ruine $f_e^*(s) = \bar{F}_C^*(s)/m_1$, et la probabilité de ruine avec 0 reserves $\rho = \lambda m_1/c$, si le taux de cotisation est $c = 15m_1/7$.

b) Calculez la probabilité de ruine $\psi(u)$, à partir de la formule de Pollaczek-Khinchin pour sa transformée de Laplace

$$\psi^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{p}{\kappa(s)} = \frac{1}{s} - \frac{1-\rho}{s\,(1-\rho f_e^*(s))}.$$

4. Qu'effectue d'après-vous la fonction suivante ?

```
function sortie=mca(n)
j=0
for i=1:n
rand('uniform')// les variables aleatoires suivront une loi uniforme sur [0,1]
a=rand()
b=rand()
if a < sqrt(1-b^2) then
j=j+1
end
sortie=j/n
```

Donner une prevision pour mca(1000).

Solutions

1. (a) Les probabilités de transition au moment du premier saut sont :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3/9 & 6/9 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 4/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) La loi conditionelle de $T_3 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 3\}$, en sachant que $X_0 = 3$, est la loi exponentielle à paramètre 5 (et moyenne 1/5).

(c)

2. (a)

$$\phi(\theta) = E\mathrm{e}^{\theta S(t)} = \mathrm{e}^{\lambda t(\int_0^\infty e^{\theta u} f(u)du} - 1)$$

(b) $ES(t) = \lambda t m_1$ et $E[S(t)]^2 = (\lambda t m_1)^2 + \lambda t \sigma^2$.

(c) $E[S(s)S(t)] = E[S(t)]^2$.

3. a) L'espérance des sinistres est $m_1 = \frac{7}{30}$, $\rho = \frac{7}{15}$, et $f_s^*(s) = \frac{45}{14(s+5)} + \frac{15}{14(s+3)}$.

b) La transformée de Laplace est

$$\psi^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{8/15}{s(1-(\frac{3}{2(s+5)} + \frac{1}{2(s+3)})} = \frac{7s+26}{15\,(s^2+6s+8)}$$
$$= \frac{1}{15(s+4)} + \frac{2}{5(s+2)}$$

et la probabilité de ruine est $\psi(u) = \frac{1}{15}\mathrm{e}^{-4u} + \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2u}$.

15.2 Examen 2

1. Soit $X_t = x + \sum_{i=1}^{t} Z_t$ une marche sur les nombres naturels, avec la distribution de chaque pas Z_t donnée par $p_k = P[Z_t = k]$, avec : $\left\{p_1 = \frac{6}{7}, p_{-1} = 0, p_{-2} = \frac{1}{7}\right\}$. a) Verifier si $E[Z_t] > 0$. b) Calculer les probabilités de ruine $\psi_x, x \in \mathbb{N}$. c) Vérifier la positivité du résultat.
   d) Calculer l'espérance du temps de ruine pour la marche sur les nombres naturels, avec la distribution de chaque pas Z_t donnée par : $\left\{p_{-1} = \frac{6}{7}, p_1 = 0, p_2 = \frac{1}{7}\right\}$
   e) Calculer l'espérance du temps de ruine pour la marche avec la distribution de chaque pas Z_t donnée par : $\left\{p_1 = \frac{6}{7}, p_{-1} = 0, p_{-2} = \frac{1}{7}\right\}$, en supposant que ce temps est fini (en conditionnant sur le cas où la ruine arrive).
2. Soit X_t une chaîne de Markov représentant le nombre de clients en attente dans un arrêt de bus, dans le quel à chaque instant $t = 1, 2, ..$ (en temps discret !) une seule personne arrive (ou pas) avec probabilité $p < 1$, et en suite le bus arrive (ou pas) avec probabilité $q < 1$, et prend tous les voyageurs (le dernier arrivé inclu).
   a) Dessinez le graph de transitions de ce processus, en indiquant les probabilités λ et μ pour que le nombre de voyageurs augmente et diminue respectivement, ainsi que la probabilité z pour que ce nombre reste inchangé. Donnez la matrice des probabilités de transition pour la chaîne X_t.
   b) Calculez la distribution stationnaire de X_t.
   c) Calculez, en utilisant un système de conditionnement, l'ésperance en sortant de 0 du nombre des pas $\widetilde{T}_0$ jusqu'au premier retour en 0.
   d) Reprenez les question précédentes pour une file d'attente M(λ)/M(μ)/1, dans la quelle le serveur **sert chaque fois simultanément tous les clients** qu'il trouve en attente dans le tampon (arrivés dans la file après le début de son dernier service). Plus précisément, donnez la matrice génératrice pour le processus X_t. Indiquer les valeurs des probabilités $\widetilde{\lambda}$ et $\widetilde{\mu}$ pour que le nombre de clients augmente/diminue, au moment du premier saut à partir d'un état $n \geq 0$. Reprenez ensuite les questions b), c).
3. On lance une pièce de monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à q et celle de sortir pile égale à $p = 1 - q$, jusqu'à ce qu'on obtient une suite pile-face-pile (arrivèes consécutivement). Trouvez l'espérance n du nombre de pas N jusqu'à l'arrêt, (ou le nombre de jets, en incluant le dernier). *Indication :* On peut utiliser un processus de Markov qui retient l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu (et qui contient dans ce cas quatre états).
4. Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ un processus de Markov en temps continu sur l'ensemble $\mathbb{N}$, avec générateur infinitésimal $Gf(x) = \mu_1(f(x+1) - f(x)) + \mu_{-1}(f(x-1) - f(x)) + \mu_{-2}(f(x-2) - f(x)), x \geq 2$ avec $\mu_1 = 1/2, \mu_{-1} = 1/8, \mu_{-2} = 3/8$, et avec les passages impossibles en 1 et 0 étant anulés (i.e. $Gf(1) = \mu_1(f(2) - f(1)) + \mu_{-1}(f(0) - f(1))$ et $Gf(0) = \mu_1(f(1) - f(0))$). Resolvez les équation de récurrence $Gc(x) + h(x) = 0, x \geq 1, c(0) = 0$ satisfaites par le temps de vidage $T = T_0 = \inf\{t : X(t) \leq 0\}$ et le coût de vidage $c(x) = \mathrm{E_x} \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{X_s ds}$, obtenues respectivement pour $h(x) = 1$ et $h(x) = x$. Montrez que
$$c(x) = t(x)(\frac{x+1}{2} + \gamma)$$
   ou $\gamma = \mathrm{E_{ss} X_t}$ est le côut moyen stationnaire de ce processus. Donnez une explication probabiliste de la partie $w(x) = t(x)\frac{x+1}{2} = c(x) - \gamma t(x)$.

5. On lance une monnaie biaisée jusqu'à la premiére fois quand une pile arrive après un nombre impaire de faces. Trouvez l'espérance n du nombre de pas de ce jeu, tenant compte aussi de la dernière pile.

Solutions :

1. Les probabilités de ruine satisfont $\psi_x = \frac{6}{7}\psi_{x+1} + \frac{1}{7}\psi_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine de

$$\frac{6}{7}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{7} = (\rho - 1)(\frac{6}{7}\rho^2 - \frac{1}{7}\rho - \frac{1}{7}) = \frac{6}{7}(\rho - 1)(\rho - 1/2)(\rho + 1/3)$$

$\psi_x = A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(\frac{-1}{3})^x$ satisfait $\psi_0 = \psi_{-1} = 1$ ssi $A_1 = 4/5, A_2 = 1/5$.

2. a) Soit$\lambda = p(1-q)$ la pb. que la file augmente, et $\mu = q$ la pb. que la file se vide. La pb. que la file reste inchangé est $z_0 = 1 - \lambda$, et $\forall n \geq 1, z_n = z = 1 - \lambda - \mu = (1-p)(1-q)$. Le graph de communication est :

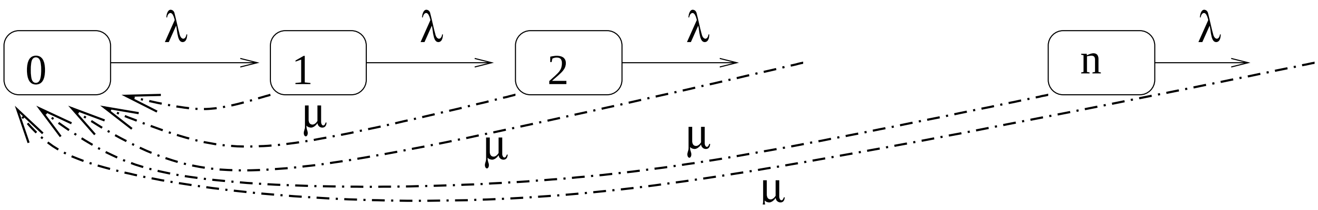


FIGURE 15.1 – **Exe 2 : Le serveur sert tous les clients**

b) On trouve $\pi_i = \lambda\pi_{i-1} + z\pi_i \Longleftrightarrow \pi_i = \widetilde{\lambda}\pi_{i-1}, i = 1, 3, ...,$ avec $\widetilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, et donc $\pi_i = \widetilde{\lambda}^i\pi_0$, où la constante de normalisation est $\pi_0 = 1 - \widetilde{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

c) $t_0 = t^{(0)} + t_1$ où $t^{(0)} = \lambda^{-1}$ et $t_1 = t_2 = ... = \mu^{-1}$. Remarquez l'identité $t_0 = \pi_0^{-1}/P_0[X_1 \neq 0$, valable pour toutes les chaînes ergodiques.

d)

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \\ \mu & 0 & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}$$

3. Le processus de Markov qui retient l'information minimale est donné par le "mot" d'arrêt désiré, et par tous ses prefixes. On peut aussi considerer le processus de Markov sur des états specifiant les deux dernièrs résultats posibles : $\{PF\}, \{*P\}, \{P^cF\}, \emptyset$. Les deux inconnues $x_1 = x_{\{*P\}}, x_2 = x_{\{P^cF\}}$ satisfont :

$$x_1 = 1 + px_1 + q * 0, x_2 = 1 + px_1 + q * x_2\ q \Longleftrightarrow x_1 = q^{-1}, x_2 = x_1 + p^{-1} = q^{-1} + p^{-1}$$

4. Pour $c(x) = E_x[\int_0^T X(t)dt]$ (coût totale de stockage) on trouve

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{G}c)(x) + x & = & 0 \\ c(0) & = & 0 \\ c(x) & & \text{accroit non-exponentiellement quand } x \to \infty \end{array}$$

Comme $\mathcal{G}x = \lambda - \mu$ et $\mathcal{G}x^2 = 2x(\lambda-\mu)+\lambda+\mu$, on trouve par la methode des coefficients indeterminés que la solution est $c(x) = \frac{x^2}{2(\mu-\lambda)} + \frac{x(\mu+\lambda)}{2(\mu-\lambda)^2}$

On trouve que $c(x) = c_r(x)+\gamma t(x)$. **Interpretation :** La première partie, $c_r(x) = t(x)(\frac{x+1}{2})$ est la solution "fluide", qui utilise precisement la moyenne arithmetique des valeurs $(x, x-1, ..., 1)$, comme si avant le vidage on aurait visité seulement ces valeurs, pour des durées de temps egaux. La deuxième partie sugère un "remplacement de la valeur moyenne a long terme 0 ("vue de loin") dans la solution fluide par la valeur moyenne réelle a long terme γ.

5. Considerons le processus de Markov sur les états : $\{FiP\}, \{P\}, \{Fi\}, \{Fp\}$, où le dernier état inclu le cas $\emptyset$. Soit N le nombre de pas jusqu'à la premiére fois quand une pile arrive après un nombre impaire de faces, et $x_i, i = 1, 2, 3$ son espérance, à partir des états transients : $x_1 = x_{\{P\}}, x_2 = x_{\{Fi\}}, x_3 = x_{\{Fp\}}$. Les trois inconnues satisfont :

$$x_1 = 1 + px_1 + q * x_2, x_2 = 1 + q * x_3, x_3 = 1 + px_1 + q * x_2 \Longrightarrow$$
$$x_3 = x_1, qx_1 = 1 + qx_2 = 1 + q(1 + qx_1) \Longrightarrow x_1 = \frac{1+q}{q(1-q)}$$

Note : Le conditionnement sur le premier pas ne marche pas. Examinons l'espace d'états :

$$E = \{P, FP, FFP, FFFP, FFFFP, ..\}$$

en essayant de trouver une decomposition en cas (ou un temps d'arrêt T) qui permet une approche recursive.

Dans le premier, troisième, ...cas, on recommence. Dans le dexième, quatrième, ..., on conclut $N = 2, 4, ...$ Le temps d'arrêt permettant une solution est donc le temps T de la premiére pile. En conditionnant sur T, on trouve :

$$\begin{aligned} n &= E[N] = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-1}p(2k) + \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k}p((2k+1)+n) \\ &= \frac{2pq}{(1-q^2)^2} + \frac{p(1+q^2)}{(1-q^2)^2} + n\frac{1}{1+q} = \frac{p}{(1-q)^2} + n\frac{1}{1+q} \end{aligned}$$

où on a utilisé $\sum_{k=1}^{\infty} 2kq^{2k-1} = (\frac{1}{1-q^2})' = \frac{2q}{(1-q^2)^2}, \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^{2k} = \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{2q}{(1-q^2)^2} = \frac{(1+q^2)}{(1-q^2)^2}$.
On retrouve finalement : $n = \frac{1+q}{q(1-q)}$

15.3 Examen 3

1. **La marche paresseuse :** Soit X_n une chaîne de Markov sur $\{0, 1, 2, ..., B\}, B \in \mathbb{N}$, avec 0 et B états absorbants, et

$$\begin{aligned} P(i, i+1) &= p\ f_i, \\ P(i, i-1) &= q\ f_i, \\ P(i, i) &= 1 - (p+q)f_i, \\ P(i, i+k) &= 0 \text{ pour} |k| > 2, \forall i \in \{1, 2, ..., B-1\} \end{aligned}$$

(on suppose $0 < p, q, f_i$ et $f_i(p+q) < 1, \forall i \in \{1, 2, ..., B-1\}$). Nous arretons le processus au temps d'arrêt $T = \inf\{n : X_n \notin [1, B-1]\}$ auquel le processus sort de l'intervalle $[1, B-1]$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par P_x, E_x la mesure et espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$).

(a) Classifiez les pbs suivantes $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = B\}$, $g_x = E_x[X_T]$, $t_x = \mathrm{E_x T}$, $c_x = E_x[\sum_0^{T-1} X_t]$, et $d_x = E_x[\sum_0^{T-1} X_t^2]$ comme des pbs de prix final ou de coùt accumulé. Quelles sont les équations de récurrence et les conditions frontière correspondant a chaque pb ?

(b) Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour p_x et g_x quand $p = q < 1/2, f_i = 1$, et quand $p = q < 1/2, f_i = 1/i$.

(c) Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour t_x et c_x quand $p < q \leq 1/2, f_i = 1$, et $B = \infty$.

2. **Probabilités de ruine .** Soit

$$X_n = x + \sum_{i=1}^{n} Z_i, \quad Z_i = \begin{cases} 1, \text{ avec probabilité} & p_1 = \frac{3}{4} \\ -1, & p_{-1} = \frac{1}{12} \\ -2, & p_{-2} = \frac{1}{6} \end{cases},$$

avec Z_i i.i.d. Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \leq 0\}$

a) Est-ce que $E[Z_1] > 0$?

b) Calculer les probabilités de ruine $\psi(x) = P_x[T_0 < \infty], x \in \mathbb{N}$.

c) Recalculer les probabilités de ruine, en utilisant le théorème d'arret des martingales.

3. **La ruine du joueur en utilisant les martingales.**
Soient $X_1, X_2, \ldots$ des v.a.i.i.d. avec $P(X = 1) = p$, $P(X = -1) = q = 1 - p$ et $0 < p < 1$. Supposons que x et b soient deux entiers avec $0 < x < b$. On définit

$$S_n := x + X_1 + \cdots + X_n, \quad T := \inf\{n, \ S_n = 0 \text{ ou } S_n = b\}.$$

La fortune initiale du joueur de pile ou face est représentée par x et il compte s'arréter s'il a atteint b ou 0. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

(a) Comment choisir les valeurs de ρ, m tel que les processus

$$M_n = \rho^{S_n}, \quad N_n = S_n - nm$$

soient des martingales ?

(b) Calculer $p_x = \mathbb{P}(S_T = 0)$ par le théorême d'arrêt des martingales appliqué à $M_n = \rho^{S_n}$, en supposant que le théorême d'arrêt est applicable.

(c) Calculer $t_x = E(T)$ par le théorême d'arrêt des martingales appliqué à $N_n = S_n - nm$, en supposant que le théorême d'arrêt est applicable.

(d) Donnez les valeurs specifiques obtenues pour ρ, m, p_x et t_x si $p = 2/3, q = 1/3$.

(e) (*) Justifier l'application du théorême d'arrêt, en montrant que $E_x T < \infty$ par le principe de la "persévérance" (tout ce qui a une chance positive constante d'arriver aprés un nombre fini des pas se produira tôt ou tard), i.e. montrer qu'il existe un certain $N \in \mathbb{N}$ et un certain $\varepsilon > 0$, t.q.

$$\forall n, \ \mathbb{P}(T \leq n + N | \mathcal{F}_n) > \varepsilon, \text{ p.s.} \tag{15.2}$$

Solutions :

1. (a) Soit $(Gf)_x = p\ (f_{x+1} - f_x) + q\ (f_{x-1} - f_x)$ l'opérateur du cas "non paresseux",(sauf que maintenant $p + q < 1$. Les équations sont respectivement :

$$(Gp)_x = 0, p_K = 1, p_0 = 0$$
$$(Gg)_x = 0, g_K = K, g_0 = 0$$
$$f_x(Gt)_x + 1 = 0, t_K = 0, t_0 = 0$$

La partie homogène des équations est exactement la même comme pour une marche «non paresseuse», mais la partie non homogène des équations est différente.

(b) Pour p_x et g_x on obtient les mêmes équations (dans les deux cas de f_i) comme pour une marche symétrique avec $p = 1/2$, c.-à-d. :

$$\begin{aligned} 0 &= p(p_{x+1} - 2p_x + p_{x-1}) \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \\ p_K &= 1, \quad p_0 = 0 \end{aligned}$$

et donc les mêmes réponses $p_x = \frac{x}{K}, \quad g_x = x$.

(c) Pour $t_x = E_x[T], p < q, B = \infty$ (temps de sortie espéré) on trouve :

$$\begin{aligned} pt_{x+1} - (p+q)t_x + qt_{x-1} + 1 = 0 \quad \text{for any } 1 \le x \\ t_0 = 0 \end{aligned}$$

avec solution $t_x = A_1 + A_2(\frac{q}{p})^x + p_0(x), \quad p_0(x) = \frac{x}{q-p}, A_2 + A_1 = 0, A_2 = 0, A_1 = 0$.
Note : La condition $t(B) = 0$ cesse d' être vraie pour $B = \infty$; par contre, $t(\infty)$ ne peut pas «être trop grand» (augmenter exponentiellement) non plus, comme il serait le cas si $A_2 \neq 0$.

2. a) b) Les probabilités de ruine satisfont $p_x = \frac{3}{4}p_{x+1} + \frac{1}{12}p_{x-1} + \frac{1}{6}p_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine de

$$\frac{3}{4}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{12}r + \frac{1}{6} = (\rho - 1)(\frac{3}{4}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho - \frac{1}{12}) = \frac{3}{4}(\rho - 1)(\rho - 2/3)(\rho + 1/3)$$

$p_x = A_1(\frac{2}{3})^x + A_2(\frac{-1}{3})^x$ satisfait $p_0 = p_{-1} = 1$ ssi $A_1 = 8/9, A_2 = 1/9$.

3. (a) M_n est un produit de v. a. indépendantes, positives et de moyenne 1 ssi : $E[\rho^{Z_i}] = p\rho + q\rho^{-1} = 1$. Les racines sont $\rho = 1$ (pas intéréssant) et $\rho = \frac{q}{p}$.
N_n est une somme de v.a. aléatoires indépendantes sommables de moyenne nulle ssi $m = p - q$.

b), c) Le théorême d'arrêt pour M_n donne : $p_x = \frac{\rho^x - \rho^b}{1-\rho^b}$, et pour N_n, $t_x = \frac{(1-p_x)b-x}{q-p}$.

e) $N = b, \epsilon = p^b$.

15.4 Examen 4

1. Soit $\lambda < \mu$ et soit $f(x) = \boldsymbol{\alpha}\mathrm{e}^{Ax}(-A)\mathbf{1}$ la densité correspondant à $\boldsymbol{\alpha} = (1 - \frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}), A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$.
Calculer la transformée de Laplace $f^*(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx} f(x) dx$, et simplifier la fraction obtenue autant que possible. Donner une autre representation de la densité $f(x)$.

2. Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ un processus de Markov en temps continu sur l'ensemble $\mathbb{N}$. Supposons que la générateur infinitésimal est $Gf(x) = \mu_1(f(x+1) - f(x)) + \mu_1(f(x+1) - f(x)) + \mu_1(f(x+1) - f(x))$ avec $\mu_1 =, \mu_{-1} =, \mu_{-2} =$. Obtenez et resolvez l'équation de récurrence pour le coût de vidage $c(x) = \mathrm{E_x} \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{X_s ds}$, ou $T = T_0 = \inf t : X(t) \leq 0$. Montrez que

$$c(x) = t(x)(\frac{x+1}{2} + \gamma)$$

ou $\gamma = \mathrm{E_{ss} X_t}$ est le côut moyen stationnaire de la file M/M/1. Donnez une interpretation probabiliste de la partie $w(x) = t(x)\frac{x+1}{2} = c(x) - \gamma t(x)$.

3. On lance une monnaie biaisée jusqu'à la premiére fois quand une pile arrive après un nombre impaire de faces. Trouvez l'espérance n du nombre de pas de ce jeu, tenant compte aussi de la dernière pile.

4. a) Calculez la distribution stationnaire du nombre total de clients (en service et en attente) dans la file $\mathrm{M}(\lambda)/\mathrm{M}(\mu)/\mathrm{c}/\infty$ (avec c serveurs et salle d'attente infinie).

   b) Calculez aussi $P[W = 0]$ et Ee^{-sW}, où W denote le temps d'attente avant de commencer le service.

5. a) Calculer la distribution stationnaire du nombre de clients X_s en attente dans une file $\mathrm{M}(\lambda)/\mathrm{M}(\mu)/1$.

   b) Supposons qu'un client qui arrive au temps 0 trouve le nombre de clients X_0 en attente distribué cf. la distribution stationnaire. Le client restera dans le sytème pour un temps total (attente + service) $T = \sum_{i=1}^{X_0+1} S_i$, où $S_i, i = 1, ..., X_0 + 1$ sont les temps de service du client et de ceux qu'il trouve en attente dans la file.

   Calculez la fonction de distribution complémentaire $\bar{F}_T(x)$ (probabilité que la variable soit plus grande que x) ainsi que la transformée de Laplace du temps T.

   c) Calculez la fonction de distribution complémentaire $\bar{F}_Q(x)$ ainsi que la transformée de Laplace du temps d'attente $Q = \sum_{i=1}^{X_0} S_i$, ainsi que le délai moyen EQ.

Solutions :

1. Il s'agît d'une loi $expo(\lambda)$.

2. Considerons le processus de Markov sur des états specifiant les deux dernièrs résultats posibles : $\{PF\}, \{*P\}, \{P^cF\}, \emptyset$. Les deux inconnues $x_1 = x_{\{*P\}}, x_2 = x_{\{P^cF\}}$ satisfont :

$$x_1 = 1 + px_1 + q * 0, x_2 = 1 + px_1 + q * x_2 \; q \Longleftrightarrow x_1 = q^{-1}, x_2 = x_1 + p^{-1} = q^{-1} + p^{-1}$$

3. Pour $c(x) = E_x[\int_0^T X(t)dt]$ (coût totale de stockage) on trouve

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}c)(x) + x &= 0 \\ c(0) &= 0 \\ c(x) & \quad \text{accroit non-exponentiellement quand } x \to \infty\end{aligned}$$

   Comme $\mathcal{G}x = \lambda - \mu$ et $\mathcal{G}x^2 = 2x(\lambda - \mu) + \lambda + \mu$, on trouve par la methode des coefficients indeterminés que la solution est $c(x) = \frac{x^2}{2(\mu-\lambda)} + \frac{x(\mu+\lambda)}{2(\mu-\lambda)^2}$

   On trouve que $c(x) = c_r(x) + \gamma t(x)$. **Interpretation :** La première partie, $c_r(x) = t(x)(\frac{x+1}{2})$ est la solution "fluide", qui utilise precisement la moyenne arithmetique des valeurs $(x, x-1, ..., 1)$, comme si avant le vidage on aurait visité seulement ces valeurs, pour des durées de temps egaux. La deuxième partie sugère un "remplacement de la valeur moyenne a long terme 0 ("vue de loin") dans la solution fluide par la valeur moyenne réelle a long terme γ.

4. Considerons le processus de Markov sur les états : $\{FiP\}, \{P\}, \{Fi\}, \{Fp\}$, où le dernier état inclu le cas $\emptyset$. Soit N le nombre de pas jusqu'à la premiére fois quand une pile arrive après un nombre impaire de faces, et $x_i, i = 1, 2, 3$ son espérance, à partir des états transitoires : $x_1 = x_{\{P\}}, x_2 = x_{\{Fi\}}, x_3 = x_{\{Fp\}}$. Les trois inconnues satisfont :

$$x_1 = 1 + px_1 + q * x_2, x_2 = 1 + q * x_3, x_3 = 1 + px_1 + q * x_2 \Longrightarrow$$
$$x_3 = x_1, qx_1 = 1 + qx_2 = 1 + q(1 + qx_1) \Longrightarrow x_1 = \frac{1+q}{q(1-q)}$$

Note : Le conditionnement sur le premier pas ne marche pas. Examinons l'espace d'états :

$$E = \{P, FP, FFP, FFFP, FFFFP, ..\}$$

en essayant de trouver une decomposition en cas (ou un temps d'arrêt T) qui permet une approche recursive.
Dans le premier, troisième, ...cas, on recommence. Dans le dexième, quatrième, ..., on conclut $N = 2, 4, ...$ Le temps d'arrêt permettant une solution est donc le temps T de la premiére pile. En conditionnant sur T, on trouve :

$$\begin{aligned} n &= E[N] = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-1}p(2k) + \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k}p((2k+1)+n) \\ &= \frac{2pq}{(1-q^2)^2} + \frac{p(1+q^2)}{(1-q^2)^2} + n\frac{1}{1+q} = \frac{p}{(1-q)^2} + n\frac{1}{1+q} \end{aligned}$$

où on a utilisé $\sum_{k=1}^{\infty} 2kq^{2k-1} = (\frac{1}{1-q^2})' = \frac{2q}{(1-q^2)^2}, \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^{2k} = \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{2q}{(1-q^2)^2} = \frac{(1+q^2)}{(1-q^2)^2}$.
On retrouve finalement : $n = \frac{1+q}{q(1-q)}$

Bibliographie

Richard Durrett. *Essentials of stochastic processes*, volume 1. Springer, 1999.

Rob Kaas, Marc Goovaerts, Jan Dhaene, and Michel Denuit. *Modern actuarial risk theory : using R*, volume 128. Springer Science & Business Media, 2008.

E. S. W. Shiu. The probability of eventual ruin in the compound binomial model. *Astin Bulletin*, 19(2) :179–190, 1989.

G. E. Willmot. Ruin probabilities in the compound binomial model. *Insurance : Mathematics and Economics*, 12(2) :133–142, 1993.

Maryam Mirzakhani : Faire des maths est "like being lost in a jungle and trying to use all the knowledge that you can gather to come up with some new tricks, and with some luck you might find a way out"