Table des matières

1 Introduction aux processus de Markov

1.1 Champs et processus aléatoires

Beaucoup de problèmes en physique, biologie, etc, ramène à l'étude des **champs aléatoires**, qui sont des collections des variables aléatoires $X_t, t \in \mathcal{I}$, où l'ensemble des indices $\mathcal{I}$ peut-être $\mathbb{N}^d, \mathbb{Z}^d, \mathbb{R}^d$, un ensemble fini, etc. Pour le cas des indices unidimmensionels $\mathcal{I} = \mathbb{N}(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ on utilise aussi le nom **processus stochastiques** (à temps discret, respectivement continu).

Définition 1.1 *Soit $\mathcal{I}$ un ensemble quelconque. On appelle processus aléatoire X indexé par $\mathcal{I}$ toute famille $(X_t)_{t\in\mathcal{I}}$, de vecteurs aléatoires définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans d'états $\mathcal{E}$. Celui la peu-être $\mathcal{E} = \mathbb{R}^p$, $\mathbb{C}^p$, ou même un espace des fonctions comme $\mathcal{E} = C_{[0,\infty)}$, $C^{(p)}_{[0,\infty)}$, etc.*

Note : Lorsque $\mathcal{E} = \mathbb{R}^p$ et $p = 1$, une seule valeur est observée à chaque "instant" t, alors que lorsque $p > 1$, plusieurs variables sont observées et on parle de processus multidimensionnels ou multivariés.

L'espace $\mathcal{I}$ est souvent le temps, ainsi :

$\mathcal{I} = \mathbb{N}$: instants successifs à partir d'un instant initial t_0.

$\mathcal{I} = \mathbb{Z}$: instants successifs avant et après un instant t_0.

$\mathcal{I} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$: idem mais processus à temps continu.

$\mathcal{I} = \mathbb{Z}^2$: images.

$\mathcal{I} = \mathbb{Z}^3$: modèle de la matière.

Nous considérerons dans la suite surtout le cas où $\mathcal{I} = \mathbb{N}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire les processus (appellés aussi séries chronologiques en statistique). Leur étude est facilité par l'existence d'une ordre complete entre les indices.

Définition 1.2 *Soit $X_. = X_t, t \in \mathcal{I}$ un champs aléatoire et soit $J \subset \mathcal{I}$ un sous ensemble fini. On dénotera par X_J la distribution jointe des variables $X_t, t \in J$. L'ensemble $X_J : J \subset \mathcal{I}, |J| < \infty$ sera appellé la famille des distributions jointes d'ordre fini de $X_.$*

En pratique, des proprietés supplementaires sont necessaires pour reduire la complexité inherente dans le modèle ci dessu.

Les processus à variables X_t indépendants sont simples à utiliser, mais peut-être trop simples pour modéliser des phénomènes intéressants. Le prochaîne degré de complexité est donné par les processus Markoviens.

Cette classe des processus est extremement riche, avec une complexité qui depend des ensemble $\mathcal{E}, \mathcal{I}$.

Nous allons considèr ici seulement des processus à indices unidimmensionels $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$, en començant avec le cas d'un espace d'états **fini ou dénombrable** $\mathcal{E} = \{e_i; i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$. On munit $\mathcal{E}$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathcal{E})$, ensemble des parties de $\mathcal{E}$. Souvent, on identifie l'espace d'états $\mathcal{E}$ fini avec l'ensemble des indices I (i.e on appelle les états par leur indice).

La réstriction au cas de $\mathcal{E}$ est convenable parce-que le travail avec les variables discrètes permet d'éviter plusieurs details téchniques.

1.2 Les processus de Markov à espace d'états fini ou dénombrable

Motivation : Exemples 2.3 et 2.1 de Ruegg, et les exemples de Belisle.

Définition 1.3 ***-Proprietè de Markov***

Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$, avec t unidimmensionel et un éspace d'états $\mathcal{E}$ fini ou dénombrable a la proprietè de Markov si, et seulement si ses probabilités conditionelles ne depend pas du passé que par le passé imediat, i.e.

$$\forall\, 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t \ ,\ t_i \in \mathbb{R},\ et\ \forall\ e_{i_0}, e_{i_1}, ..., e_{i_k}, e_i \in \mathcal{E}$$

$$P\left([X_t = e_i] \mid [X_{t_0} = e_{i_0}, ..., X_{t_k} = e_{i_k}]\right) = P\left([X_t = e_i] \mid [X_{t_k} = e_{i_k}]\right)$$

Interprétation de la propriété de Markov : si on considère que le processus est indicé par le temps, cette propriété traduit le fait que le présent ne dépend du passé qu'à travers le passé immédiat.

Un processus ayant la proprietè de Markov s'apelle processus de Markov.

Définition 1.4 ***Matrice des transitions***

Pour tous $0 \leq s \leq t$, pour tous i, j dans I, et pour chaque processus de Markov, on définit les probabilités de transition par :

$$p_{ij}(s,t) = P\left([X_t = e_j] \mid [X_s = e_i]\right).$$

Un processus est dit homogène si, et seulement si :

$$\forall\, i,j \in I \;,\; \forall\, 0 \leq s \leq t \;,\; p_{ij}(s,t) = p_{ij}(0,t-s)\,.$$

On note alors $p_{ij}(s,t) = p_{ij}(t-s)$, *et la matrice* $p_{ij}(t)$ *est appellée matrice de transition après temps* t.

Hypothèse de travail : $\boxed{(H1)\ \textbf{On ne considérera ici que des processus homogènes.}}$

L'exemple le plus simple des processus de Markov homogènes est fourni par les "chaînes de Markov" en temps discret et à espace d'états fini ou dénombrable.

2 Les chaînes de Markov à espace d'états fini

On considére maintenant le cas des processus X_n observés en temps discret : $n = 0, 1, 2, ...$

La propriété de Markov a lieu quand la loi conditionnelle de X_n sachant $(X_0, X_1, ..., X_n)$ est la même loi que la loi conditionnelle de X_n sachant X_{n-1}.

Ces processus sont entièrement characterisés par leur matrice de transition $p_{i,j}(1) = P\left([X_n = e_j] \mid [X_{n-1} = e_i]\right)$ après temps 1, qu'on denotera par $p_{i,j}$.

Définition 2.1 *Une chaîne de Markov* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite homogène si :*

$$\forall\, e_i, e_j \in E \;,\; P\left([X_n = e_j] \mid [X_{n-1} = e_i]\right) \text{ ne dépend pas de } n.$$

La matrice $P = (p_{ij})_{i,j\in I}$, appellée **matrice de transition**, est la plus importante characteristique d'une chaîne. Cette matrice P est une matrice stochastique, c'est-à-dire une matrice telle que :

1. $\forall\, i,j \in I \;,\; p_{ij} \geq 0$ et
2. $\forall\ i \in I \;,\; \sum\limits_{j\in I} p_{ij} = 1$; la somme des termes de chaque ligne égale à 1. En notation vectorielle, on a $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, ou $\mathbf{1}$ denote un vecteur avec tous les composantes 1.

Rémarque : Même qu'on utilise parfois le terme "matrice" si E est infini, la theorie dans ce cas est un peu differente.

2.1 L'évolution de la loi de probabilité d'une chaîne

Définition 2.2 *Pour tout* n *de* $\mathbb{N}$ *et tout* i *de* I, *on note* $\mu_i(n) = P[X_n = e_i]$ *et* $\mu(n) = (\mu_i(n))_{i\in I}$. *Le vecteur* $\mu(n)$ *définit une probabilité sur* $(E, \mathcal{P}(E))$ *appelée loi à l'instant* n. *On appelle loi initiale de la chaîne* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *le vecteur* $\mu(0)$.

a) le départ est surement à 0

b) le départ est avec probabilités egales en 0 ou en U, i.e. $\mu(0) = (1/2, 0, 0, 0, 1/2)$.

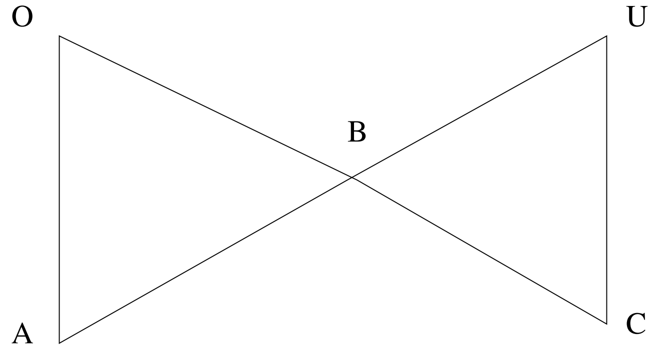


FIG. 1 – **Marche aléatoire simple sur le graphe papillon**

En conditionnant sur la position k un pas en avant, on verifie que $\mu(1) = \mu(0)P$, et

$$\boxed{\mu(n+1) = \mu(n)P} \tag{1}$$

et alors par induction on trouve

$$\boxed{\mu(n) = \mu(0)P^n} \tag{2}$$

Exemple 2.2 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble* $\{1,2\}$, *de distribution initiale* $\boldsymbol{\mu}(0) = (\mu_1, \mu_2)$ *et de matrice de transition* $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$

Calculez $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2\}$, $\boldsymbol{\mu}_2(1) = \mathbb{P}\{X_1 = 2\}$, $\mathbb{P}\{X_0 = 2 | X_1 = 2\}$, $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2, X_2 = 1\}$, $\boldsymbol{\mu}_2(2)$ *et* $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_2 = 1\}$.

Ce dernier exercice nous sugère la necessité d'étudier la probabilité de transition après n étapes.

2.2 Probabilités de transition en n étapes

Définition 2.3 *Pour tout* n *de* $\mathbb{N}$ *, on définit la matrice des probabilités de transition en* n *étapes, elle est notée* $P^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right)_{i,j\in I}$ *où* $p_{ij}^{(n)} = P([X_n = e_j] \mid [X_0 = e_i])$.

Note : La distribution de X_1 en partant de $X_0 = i$, est donné par la ligne i de la matrice P, et la distribution de X_n en partant de $X_{n-1} = i$ est donné par la ligne i de la matrice P^n.

$$\boxed{P^{(m+n)} = P^{(m)}P^{(n)}} \tag{3}$$

Ce resultat très important s'appelle **l'equation de Chapman-Kolmogorov** .

Démonstration: Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P et de loi initiale $\mu(0)$, à valeurs dans $(E = \{e_i; i \in I\}, \mathcal{P}(E))$. En conditionnant sur la position k après m pas, on a :

$$\forall\, i, j \in I \ , \ \forall\, m, n \in \mathbb{N} \ , \ p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in I} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

QED

Corollaire 2.1 $\boxed{P^{(n)} = P^n}$, *i.e. le semi-groupe des matrices de transition est "generé" par la matrice P de transition après temps* 1.

Demonstration : on montre ça par récurrence sur n, en partant de $P^{(1)} = P$, et en tenant compte que $P^{(n+1)} = P^{(n)}P$ (par l'equation de Chapman-Kolmogorov (3)).

Rémarque Comme illustré dans les exemple ci-dessus, en utilisant la distribution initale $\mu(0)$ et la matrice de transition P on peut calculer la distribution $\mu(n)$ a n'importe quel temps, par exemple $\mu(1), \mu(2)$ .... et aussi les distributions jointes pour n'importe quel ensemble fini des temps (en utilisant la loi de multiplication des probabilités conditionnelles). En effet, on peut donner une formule explicite pour les distributions jointes d'ordre fini d'une chaîne, en fonction de la matrice de transition P et la distribution initiale $\mu(0)$.

Théorème 2.2 *Pour une chaîne de Markov, les distribution jointes sont données pour : $\forall t_0 < t_1 < \cdots < t_k$, $t_i \in \mathbb{R}$, et $\forall\, e_{i_0}, e_{i_1}, ..., e_{i_k} \in \mathcal{E}$ explicitement par*

$$\boxed{P\left[X_{t_0} = e_{i_0}, ..., X_{t_k} = e_{i_k}\right] = \mu_{i_0}(t_0) P_{i_0,i_1}^{t_1-t_0} ... P_{i_k,i_{k-1}}^{t_k-t_{k-1}}} \tag{4}$$

Remarque 2.1 *Il est convenable d'identifier une chaîne de Markov avec sa matrice de transition P, qui est l'element principal du "duo" $(P, \mu(0))$.*

Définition 2.4 *La chaîne de Markov associé à une matrice stochastique P est la* **famille** *des mesures $\mathbb{P}_{\mu(0)}$ définies par (4), avec operateurs d'esperance associés $\mathbb{E}_{\mu(0)}$ (donc pour obtenir une seule mesure, il faut encore specifiér la mesure initiale $\mu(0)$).*

Pour modéliser une situation par une chaîne de Markov, on a besoin d'abord de choisir un espace d'états convenable tel que la proprieté de Markov est satisfaite, et ensuite de déterminer la matrice de transitions.

Exemple 2.3 *Un processus qui n'est pas une chaîne de Markov a priori, mais qu'on peut "rendre" Markov par un bon choix de l'espace d'états . Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus à deux états, notés e_1 et e_2. On suppose que les transitions entre les étapes n et $n+1$ s'effectuent selon le procédé suivant :*

$$\begin{cases} \text{Si } X_{n-1} = X_n \text{ alors } P\left([X_{n+1} = e_1] \mid [X_n = e_i]\right) = \frac{3}{4} \\ \text{Si } X_{n-1} \neq X_n \text{ alors } P\left([X_{n+1} = e_1] \mid [X_n = e_i]\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une chaîne de Markov. b) Construire un espace d'états permettant de modéliser ce processus par une chaîne de Markov et donner alors son graphe.

Solution : b) On construit l'espace d'états suivant : $\{e_1 * e_1, e_1 * e_2, e_2 * e_1, e_2 * e_2\}$. Sur cet'espace, le processus devient Markovien, et la matrice de transition s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exemple 2.4 Une companie d'assurance voiture a un système de bonus avec cinq niveaux pour les assurés sans sinistres déclarés *:*

niveau 1 :	*0% réduction*
niveau 2 :	*25%réduction*
niveau 3 :	*40% réduction*
niveau 4 :	*50% réduction*
niveau 5 :	*60% réduction*

Pour un assuré, la probabilité de ne pas avoir de sinistre dans un an est de 0.8. Les regles selon on passe d'un niveau (état)à l'autre sont :

> *Aprs̀ une année sans sinistre on passe au niveau supérieur suivant ou on reste au niveau 5*
>
> *Aprs̀ une année avec un ou plusieurs sinistres*
>
> > *on diminue d'*un *niveau si l'année précedente, il n'y a pas eu de déclaration de sinistre.*
> >
> > *on diminue de* deux *niveaux si l'année précedente il y a eu au moins une déclaration de sinistre.*

1. *Notons par $X(t)$ le niveau,soit 1, 2, 3, 4 ou 5, de l'assuré pour l'année t. Expliquez pourquoi $\{X(t)\}_{t=1}^{\infty}$ n'est pas une chaîne de Markov.*
2. *En augmentant le nombre de niveaux, définissez un nouveau processus stochastique $\{Y(t)\}_{t=1}^{\infty}$ qui* soit *Markov et de telle manière que $Y(t)$ représente le niveau de réduction pour l'assuré dans l'année t.*
3. *Déduire la matrice de transition pour la chaîne de Markov $\{Y(t)\}_{t=1}^{\infty}$.*

Solution :

1. *$\{X(t)\}$ n'est pas Markov parce que, par exemple, $\mathbb{P}[X_{t+1} = 3 \mid X_t = 4, X_{t-1} = 3, \ldots]$ ne peut pas se réduire à $\mathbb{P}[X_{t+1} = 3 \mid X_t = 4]$.*

4=50% réduction cette année, aprs̀ 40% l'année dernière
3a=40% réduction cette année, aprs̀ 50% l'année dernière
4a=50% réduction cette année, aprs̀ 60% l'ann'ee dernière

3. *La matrice de transition est alors*

	1	2	3	4	5	3a	4a
1	0.2	0.8	0	0	0	0	0
2	0.2	0	0.8	0	0	0	0
3	0	0.2	0	0.8	0	0	0
4	0	0	0	0	0.8	0.2	0
5	0	0	0	0	0.8	0	0.2
3a	0.2	0	0	0.8	0	0	0
4a	0	0.2	0	0	0.8	0	0

Exemple 2.5 *Supposons que une pluie eventuelle demain depend de la situation du temps dans les trois jours précédents, ainsi : a) S'il y a eu de la pluie dans les deux jours précédents, alors il va pleuvoir avec probabilité .8. b) S'il y a pas eu de la pluie dans aucun des trois jours précédents, alors il va pleuvoir avec probabilité .2. c) Autrement, la situation va etre la meme comme dans le jour precedent avec probabilité .6. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov, en donnant l'espace des états et la matrice de transition.*

2.4 Classification des états

Définition 2.5 *Soient e_i et e_j deux éléments de E. On dit que <u>e_i conduit à e_j</u> (on note $e_i \to e_j$) ssi il existe $n > 0$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$ et on dit que <u>e_i et e_j communiquent</u> (et on note $e_i \leftrightarrow e_j$) si e_i conduit à e_j et e_j conduit à e_i .*

Rémarque : la relation " $\leftrightarrow$ " est clairement symétrique, reflexive et transitive. alors, elle partage l'espace d'états dans des classe d'équivalence.

Définition 2.6 *On appelle <u>classes de la chaîne</u> : les classes d'équivalence induites par la relation " $\leftrightarrow$ " sur E.*

Définition 2.7 *Une classe d'equivalence dans une chaîne de Markov* **finie** *qui n'a pas de transitions vers l'exterieur est dite <u>récurente</u> ; les autres classes s'appellent <u>transitoires</u>.*

Rémarque : La distinction entre elements transients et recurents a une grande portée sur la valeur des limites $\lim_{n\to\infty} P^n(i,j)$. On verra que pour j transient, elle est toujours 0.

Définition 2.8 *Le graphe de communication d'une chaîne est un graphe sur les états (indiqués par des points du plan), avec des cotés représentant les transitions possibles (indiqués par des flèches, avec la valeur de la probabilité de transition notée au dessus).*

2.5 Exercices : TD 1

ESPÉRANCE CONDITIONNELLE

1. On dispose d'un dé équilibré et d'une pièce de monnaie qui tombe sur pile avec une probabilité 1/3. On lance le dé une fois puis on lance la pièce un nombre de fois égal au chiffre obtenu avec le dé.

nellement au chiffre k obtenu avec le dé).

b. Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de a) la probabilité (non conditionnelle) d'obtenir au moins un pile.

2. Une banque a deux caissières. Trois personnes (A,B, et C) entrent en même temps ; A et B vont directement aux deux caissières libres et C attend.

   Quelle est la probabilité que A soit toujours dans la banque quand les deux autres sont partis, dans les trois cas suivants : i. Le "temps de service" est exactement 2 mn pour les deux caissières. ii. Pour les deux caissières, ce temps est 1,2, ou 3 mn, avec probabilités 1/3 pour chaque cas.

3. Fiabilité : Calculer la probabilité que le réseau suivant fonctionne :

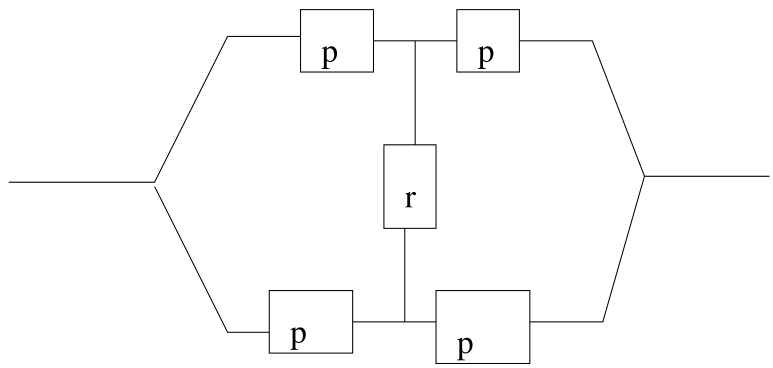


FIG. 2 – **p,r sont les probabilités que les composantes fonctionnent**

4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P. Dans chaque cas, on demande de voir s'il y a des états absorbants, de déterminer les classes de la chaîne et d'étudier la périodicité et la récurrence (ou la transience) des états. En plus, discuter : • existence et unicité (?) d'éventuelle(s) distribution(s) stationnaire(s)
   • existence d'une distribution limite (la déterminer le cas échéant)

   (a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **b)** $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **d)** $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

5. Soit $Y_i, i = 1, ...,$ une suite des lancées de dés indépendents. Déterminer dans les exemples suivantes si la suite X_n est Markov, en donnant (si possible) la matrice de transition et le graph de communication. Classifier les classes en récurrents et transitoires et calculer si possible la limite $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$

   (a) Le maximum de résultats $X_n = \max_{1\le i\le n} Y_i$
   (b) Le nombre cumulatif de 6, $X_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{Y_i=6\}}$
   (c) Le nombre cumulatif de non 6, aprés le dernière 6, jusqu'au temps n.
   (d) Le nombre cumulatif de non 6, aprés le temps n, jusqu'au prochaîne 6.
   (e) $X_n = Y_n + Y_{n-1}$ f) $X_n = Max_{1\le i\le n} S_i$, ou $S_i = \sum_{k=1}^{i} Y_k$ et g) $X_n = S_1 + S_2 + ... + S_n$

Les deux équations de récurrence linéaire de deuxième ordre ci-dessous

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0, \tag{5}$$

$$av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = d_n, \tag{6}$$

sont appelées **homogène** et **nonhomogène** respectivement.

L'équation homogène

Si les coefficients a, b et c sont constants, on sait qu'ils existent des solutions de la forme $u_n = x^n$ pour tout n (fonctions exponentielles). Pour trouver x on remplace x^n en (5) et on trouve que x doit satisfaire **l'équation auxiliaire** :

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{7}$$

Soient x_1 et x_2 les deux racines de l'équation de deuxième degré (7). On en déduit que la solution *générale* de (5) est toujours de la forme

1. Si $x_1 \neq x_2$
$$u_n = Ax_1^n + Bx_2^n,$$
2. Si $x_1 = x_2$,
$$u_n = Ax_1^n + Bnx_1^n,$$
avec des constantes A et B.

Dans les deux cas A et B doivent être déterminées à partir des conditions supplémentaires sur la frontière.

L'équation nonhomogène

La résolution du problème nonhomogène (6) comporte quatre pas :

1. Trouver la solution générale u_n pour l'équation auxiliaire homogène (5).
2. Déterminer une solution particulière de (6), par exemple en utilisant une expression d'"essai" $\tilde{v}_n$ qui a la même forme générale que le membre droit d_n,, mais des coefficients non-déterminés. Par exemple, si d_n est un polynôme d'ordre k, on essaie un polynôme général d'ordre k. Néanmoins, si votre expression d'essai a des termes qui sont égaux à des termes dans la solution générale de l'équation homogène obtenue au pas 1, il faut multiplier l'expression d'essai par $n, n^2, \ldots$ jusqu'à ce qu'il n'y a plus des puissances qui coincident avec des termes en u_n.
3. Trouver les valeurs des coefficients de $\tilde{v}_n$ à partir de (6), par la méthode des coefficients non-déterminés.
4. La solution générale de (6) est de la forme $v_n = \tilde{v}_n + u_n$. Trouver les coeficients encore non déterminés (en u_n), en utilisant les conditions sur la frontière pour v_n.

Exercice 2.1 *Obtenez les formules analytiques des suites décrites par les relations de récurrence ci-dessous, et vérifiez-les en utilisant les premiers termes de la suite t_2, t_3.*

2. $t_i = 2t_{i-1} + 5 \cdot 2^i, \;\; t_0 = 0$
3. $t_i = 3t_{i-1} - 2t_{i-2} + 2,\; t_0 = 0, t_1 = 2$
4. $t_i = 2t_{i-1} - t_{i-2} + 2,\; t_0 = 0, t_1 = 2$

Solution :

1. C'est une équation nonhomogène, alors nous aurons :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i,\;\; \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \;\text{ avec }\; c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{aligned} c_1 &= 2c_1 + 1 \quad \text{et } \; c_1 = -1 \\ c_2 &= -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et } \; c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 &= = 0 = -1 + A \quad \text{et } \; A = 1 \\ t_i &= -i - 1 + 2^i \end{aligned}$$

2. C'est une équation nonhomogène, alors :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i,\;\; \tilde{t}_i = ci2^i \;\text{ avec }\; ci2^i = 2(c(i-1)2^i/2) + 52^i$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{aligned} c &= 5, \quad t_i = 5i2^i + A2^i \quad \text{et finalement,} \\ t_0 &= = 0 = A \quad \text{et } \; A = 0 \\ t_i &= 5i2^i \end{aligned}$$

3. C'est une équation de différences nonhomogène et l'équation quadratique attachée a les racines $1, 2$, alors nous aurons :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 2^i + A_2,\;\; \tilde{t}_i = ci \;\text{ avec }\; ci = 3(ci - c) - 2(ci - 2c) + 2$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{aligned} c &= -2 \quad \text{et } \; c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 &= = 0 = -1 + A \quad \text{et } \; A = 1 \\ t_i &= -i - 1 + 2^i \end{aligned}$$

4. C'est une équation de différences nonhomogène dont les racines de l'équation quadratique attachée sont confondues égales à 1 donc nous aurons :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 + A_2 i,\;\; \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \;\text{ avec }\; c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{aligned} c_1 &= 2c_1 + 1 \quad \text{et } \; c_1 = -1 \\ c_2 &= -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et } \; c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 &= = 0 = -1 + A \quad \text{et } \; A = 1 \\ t_i &= -i - 1 + 2^i \end{aligned}$$

3.1 Les chaînes de Markov absorbantes

Définition 3.1 *Une chaîne s'apelle absorbante si tous ses états récurrents sont absorbants, i.e.* $P_{i,j} = \delta_{i,j}$ *pour chaque état* i *récurrent.*

Soit X_k une chaîne de Markov absorbante à espace d'états $S = \mathcal{T} \bigcup \partial = \{1, 2, ...I, C1, C2, ..\}$, où les états en $\mathcal{T}$ sont transitoires, et les états $\partial = \{C1, C2, ...\}$ sont absorbants. Soit $\left\| \begin{array}{c|c} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{P}_{(tr)} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{array} \right\|$ la matrice de transition et soit $\boldsymbol{\beta}$ la distribution initiale. Nous allons étudier ici plusieurs charactéristiques du temps N jusqu'à l'absorption en ∂ :

1. Les temps esperés d'absorption $\boldsymbol{n} = (n_i, i = 1, ..., I)$, où $n_i = \mathbb{E}_i N$.
2. Les probabilités d'absorption dans les différents états absorbants (s'il y en a plusieurs).
3. La distribution de N.

Définition 3.2 *Soit* X_t *une chaîne absorbante, soit* ∂ *l'ensemble des états absorbants, et soit* $\mathcal{T}$ *le sous-ensemble (complémentaire) d'états transitoires. On appélera* **temps de sortie/absorbtion** τ *(ou* N *en temps discret) le premier temps quand le processus* X_t *est sorti de* $\mathcal{T}$ *(et donc arrivé en* ∂*).*

Plus précisemment, en temps discret, on compte le nombre de fois en $\mathcal{T}$, en incluant la position initiale :

Définition 3.3 *Étant donné un ensemble d'arrêt* ∂ *et son complement* $\mathcal{T}$*, nous appelerons chemin d'absorbtion/arrêt* $X^{\mathcal{A}}$ *d'un processus* X_t *une suite* $(x_0, x_1, x_2, ..., x_{N-1}, y_N)$ *où* $x_i \in \mathcal{T}, \forall i \in [0, N-1]$ *et* $y_N \in \partial$.

Toute variable qui est une fonction de $X^{\mathcal{A}}$ *sera appellé variable d'absorbtion/arrêt.*

Par exemple, le temps de sortie (=nombre des pas jusqu'à l'absorbtion) d'un tel chemin, $N = N(X^{\mathcal{A}})$ est une variable d'absorbtion. Une autre est la position finale y_N.

On s'intéresse dans la distribution et l'espérance de variables d'absorbtion, et on vera qu'elles sont calculables en utilisant des certain rélations entre leur distributions conditionnées par le point de départ.

Exemple 3.1 *Soit une chaîne définie par la matrice de transition* $\left(\begin{array}{c|c} p & 1-p \\ 0 & 1 \end{array} \right)$

Trouvez la distribution $p_N(k) = \mathbb{P}[N = k]$*et l'espérance* $n = \mathbb{E}N$ *du nombre des pas* N *jusqu'à l'absorbtion, en partant du premier état.*

Note : Même qu'on a à faire avec une distribution bien connue, il est intéressant de remarquer que l'espérance peut aussi se calculer par un conditionnement sur le premier pas :

$$n = \mathbb{P}[X_1 = 2]\mathbb{E}[N|X_1 = 2] + \mathbb{P}[X_1 = 1]\mathbb{E}[N|X_1 = 1] = (1-p) * 1 + p * (1+n) \tag{8}$$

Markov.

Théorème 3.1 *a) Les temps esperés d'absorption satisfont le* **système d'absorption**

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{n} + \mathbf{1}$$

b) Ils sont donnés explicitement par :

$$\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\,\mathbf{1}$$

Demonstration : b) La formule explicite

$$\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\,\mathbf{1} = \big[\sum_{i=1}^{\infty}(\boldsymbol{Q})^i\big]\mathbf{1}$$

a aussi une interprétation probabiliste importante. Remarquons d'abord **la décomposition en indicateurs**

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} I_k$$

où I_k est l'indicateur d'être dans la partie transitoire au temps k. Donc, $n_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_i I_k$. Remarquons aussi la décomposition en indicateurs $I_k = \sum_{j\in\mathcal{T}} I_{k,j}$, où $I_{k,j}$ est l'indicateur d'être en position $j \in \mathcal{T}$ au temps k. Ces décompositions nous ramène finalement à

$$n_i = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j\in\mathcal{T}} \mathbb{E}_i I_{k,j} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j\in\mathcal{T}} (\boldsymbol{Q})^k_{i,j}$$

Le système équivalent donné en partie a)

$$n_i = \sum_{j\in\mathcal{T}} Q_{i,j}(n_j + 1) + \sum_{j\notin\mathcal{T}} Q_{i,j} * 1$$

(qui généralise l'équation (8) et est obtenu par un conditionnement pareil), est encore plus fondamental que la formule explicite, car il y a beaucoup de variations de ce problème où le système sera evident, mais pas la solution. Numériquement aussi, les systèmes d'équations sont souvent plus utiles que leurs solutions explicites !

Corollaire 3.1 *Avec une distribution initiale $\boldsymbol{\beta}$, l'espérance $\bar{n} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\beta}} N$ du temps d'absorbtion est :*

$$\bar{n} = \mathbb{E}N = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\mathbf{1}$$

3.2 Les probabilités d'absorbtion

Supposons qu'il y a plusieurs états absorbants à probabilités d'absorption $\boldsymbol{b}^{(j)}, j \in S - \partial$, qui donnent des "prix finals" $\boldsymbol{f} = \{f_j, j \in S - \partial\}$, posons $\hat{p}_i = \mathbb{E}_i f(N)$, et $\hat{\boldsymbol{p}} = \{\hat{p}_i, i \in \partial\}$ le vecteur de prix finals. Le calcul de $\hat{\boldsymbol{p}}$ est le fameux **problème de Dirichlet**. Par exemple, pour $\boldsymbol{f}_j = \{0, ..., 0, 1, 0, ...\} = \{\delta_j(i), i = 1, 2, ...\}$ avec un 1 sur la position j on obtient les probabilités d'absorption $\hat{p}_i(j) = \mathbb{P}_i\{X_N = j\} = \mathbb{E}_i I_{\{X_N = j\}}$.

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{P}_{(tr)}\boldsymbol{f}$$

En particulier

Théorème 3.3 *Les probabilités d'absorption $\hat{\boldsymbol{p}}^{(j)}$ dans un état absorbant fixe j satisfont le* **système d'absorption**

$$\hat{\boldsymbol{p}}^{(j)} = \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{p}}^{(j)} + \boldsymbol{p}^{(j)}_{(tr)}$$

où $\boldsymbol{p}^{(j)}_{(tr)}$ denote le vecteur des probabilités dans l'état absorbant j.

La matrice $\boldsymbol{P}^{(abs)}$ des probabilités d'absorption satisfait :

$$\boldsymbol{P}^{(abs)} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{(abs)} + \boldsymbol{P}_{(tr)}$$

et donc

$$\boldsymbol{P}^{(abs)} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{P}_{(tr)}$$

Corollaire 3.2 *Avec une distribution initiale $\boldsymbol{\beta}$, avec un prix final arbitraire $\boldsymbol{f}$, on a l'espace d'états :*

$$\hat{\boldsymbol{p}} \;=\; \boldsymbol{\beta}(I - (\boldsymbol{Q})^{-1})\boldsymbol{P}_{(tr)}\boldsymbol{f}$$

La théorie des chaînes pour les quelles tous les états récurrents sont absorbants peut-être utilisée pour étudier n'importe quelle chaîne, en modifiant certaines transitions.

Définition 3.4 *Soit X_t un processus, soit E un sous-ensemble arbitraire de l'espace d'états , et soit ∂ son complémentaire. On appelera* **processus absorbé en l'ensemble d'arrêt** ∂ *le processus $\tilde{X}_t$ obtenu à partir de X_t en modifiant tous les états en ∂ tel qu'ils sont absorbants.*

Dans le prochaine exemple, nous utilisérons plusieurs ensembles d'arrêt.

Exemple 3.2 *Pour une* **marche aléatoire** $X_t,\ t = 0, 1, 2, ...$ **sur le graphe papillon** *ci-dessous, calculer :*

1. *L'espérance n_U en sortant de U du nombre de pas N jusqu'au noeud O.* Indication : *Utiliser la symmetrie.*
2. *L'espérance en sortant de O du nombre de pas $\tilde{N}_O$ jusqu'au premier retour à O.*
3. *La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_N = U\}$, où $N = \min[N_U, N_O]$.*
4. *La probabilité p_k en partant de O que la marche visite U exactement k fois ($k = 0, 1, 2, ...$) avant le premier retour à O. Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.*
5. *Les probabilités stationnaires du chaque noeud.*

Autres exemples des problèmes d'absorbtion : voir Ruegg, 2.6.4-2.6.5.

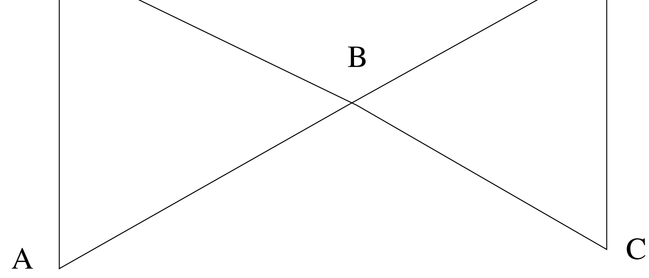


FIG. 3 – **Marche aléatoire simple sur le graphe papillon**

3.3 Les distributions de temps d'absorbtion

Les distributions de temps d'absorbtion, appelées aussi "distributions de phase", sont données explicitement par :

Théorème 3.4 *Pour une chaîne de Markov absorbante à distribution initiale $\boldsymbol{\beta}$ et matrice de transition* $\left\| \begin{array}{c|c} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{P}_{(tr)} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right\|$ *la distribution du temps d'absorption N dans le cas d'un seul état absorbant, avec $\boldsymbol{P}_{(tr)}$ étant un vecteur colonne, est :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N = k\} &= \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{Q})^{k-1}\boldsymbol{P}_{(tr)} \\ \mathbb{P}\{N > k\} &= \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{Q})^{k}\mathbf{1} \end{aligned}$$

Rémarque : Ça nous donne une troisième démonstration du Théorème 1.1 :

$$\mathbb{E}N = \sum_k \mathbb{P}\{N > k\} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\mathbf{1}$$

Exercice 3.1 *Soit la matrice de transition* $\left(\begin{array}{cc|c} 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & p \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Trouvez l'espérance et la distribution de N.

Voir aussi Ruegg, 2.6.3.

3.4 Les problèmes de Dirichlet

Motivation : Parfois, une chaîne/marche est forcée de rester dans un sous-ensemble de son espace d'états initial par des diverses méchanismes de contrainte. Par exemple, une marche sur $\mathbb{Z}$ qui est contrainte à rester nonegative, donc en $\mathbb{N}$, pourrait être arrêtée en 0 pour toujours, ou "réfléchie", i.e retournée en $\mathbb{N}$ dés qu'elle arrive dans le complement $\partial = \mathbb{Z} - \mathbb{N}$.

Les problèmes de Dirichlet ont comme objet l'étude des temps de sortie τ, de la distribution du point de sortie x_τ sur ∂, et des diverses autres fonctions comme des prix finaux ou des coûts accumulés par la marche jusqu'au moment de son absorbtion en ∂.

On verra que tous ces problèmes aboutissent dans des équations de différences (ou différentielles, si l'espace d'états est $\mathbb{R}^d$), qui sont établies en utilisant un conditionnement sur le premier pas.

3.5 Exemple unidimensionnel

Les probabilités d'absorbtion des exemples précédents s'appellent aussi fonction harmonique. Nous considérons maintenant un exemple unidimensionnel, dans le quel les fonctions harmoniques et aussi les solutions d'autres problèmes de Dirichlet sont disponibles explicitement.

Exemple 3.3 Problèmes de Dirichlet pour la marche aléatoire simple : *Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = \pm 1] = p, q$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par $\mathbb{E}_x$ l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés.*

1. *Obtenez les équations de récurrence et les conditions frontière satisfaites par a) $p_x = \mathbb{P}_x\{X_\tau = K\}$, b) $f_x = \mathbb{E}_x X_\tau$, c) $t_x = \mathbb{E}_x \tau$, d) $c_x = E_x[\sum_0^\tau X(t)]$, et e) $w_x = \mathbb{E}_x a^\tau g(X_\tau), a \in (0,1)$.*
   Indication : Conditionez sur le premier pas Z_1 et utilisez pour a), b) la rélation : $\mathbb{E}_x[g(X_\tau)] = pF_{x+1} + qF_{x-1}$, où $g(x), F_x$ sont respectivement $1_{x=K}, p_x$ et x, f_x, pour c), d) la rélation : $\mathbb{E}_x[\sum_0^{\tau-1} h(X_i)] = h(x) + pF_{x+1} + qF_{x-1}$, où $h(x), F_x$ sont respectivement $1, t_x$ et x, c_x, et pour e) la rélation : $w_x = \mathbb{E}_x[a^\tau g(X_\tau)] = a(pw_{x+1} + qw_{x-1})$.
2. *Résolvez ces équations dans le cas symmétrique $p = q = 1/2$, et avec $g(x) = 1$ en e).*

Solution : Nous verrons qu'on trouvera en chaque point presque le même problème, sauf les conditions frontières et que l'équation pourra être homogène ou pas.

1. L'idée de la méthode du **conditionnement** est d'obtenir des relations de récurrence qui lient les valeurs de l'espérance conditionnée à partir de tous les points de départ possibles.
   Il sera utile d'introduire la notation

$$(Gf)_x = p\,(f_{x+1} - f_x) + q\,(f_{x-1} - f_x)$$

   Avec cette notation, les équations seront respectivement :

$$\begin{aligned}
(Gp)_x &= 0, p_K = 1, p_0 = 0\\
(Gf)_x &= 0, f_K = K, f_0 = 0\\
(Gt)_x + 1 &= 0, t_K = 0, t_0 = 0\\
(Gc)_x + x &= 0, c_K = 0, c_0 = 0\\
(Gw)_x + (1 - a^{-1})w_x &= 0, w_K = 1, w_0 = 1
\end{aligned}$$

(a) $p_x = P_x[X(T) = K]$ satisfait :

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{p_{n+1}}{2} + \frac{p_{n-1}}{2} \quad \text{for any } 1 \leq n \leq K-1 \\ p_K &= 1 \\ p_0 &= 0 \end{aligned}$$

La méthode de résolution des équations de récurrence homogènes à coefficients constants commence en cherchant des solutions de la forme $p_n = r^n$. Si les racines de l'équation auxiliaire sont distinctes, la solution générale est :

$$p_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n + ...$$

où k_1, k_2 sont déterminés en utilisant les conditions frontière.
Ici, cherchant des solutions puissances r^x ramène à l'équation $r^2 - 2r + 1 = 0$ à deux racines identiques $r_{1,2} = 1$. La solution générale est $p_x = A + Bx$. Les conditions frontière donnent $p_x = \frac{x}{K}$.

(b) $f_x = E_x[X(T)]$ (valeur finale ésperée) satisfait :

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{f_{x+1}}{2} + \frac{f_{x-1}}{2} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ f_K &= K \\ f_0 &= 0 \end{aligned}$$

C'est donc aussi une fonction "harmonique", mais avec conditions frontière différentes.
La solution $f_x = x$ est obtenue comme ci-dessus.

(c) $t_x = E_x[T]$ (temps de sortie ésperé) satisfait : le système inhomogène :

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + 1 \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ t_K &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution d'une équation nonhomogène commence par l'équation homogène.
La solution générale homogène ("fonction harmonique") $A+Bx$ pour cet opérateur a été déjà obtenue ci-dessus.
Nous aimerions maintenant trouver une solution particulière $t_p(x)$ de l'équation $Gt_p(x) = -1$ de la même forme que la partie nonhomogène -1 de l'équation, donc $t_p(x) = C$; mais, comme les constantes, et puis aussi les fonctions linéaires vérifient l'équation homogène $Gt_p(x) = 0$, nous devrons modifier deux fois cette forme en multipliant par x, en arrivant donc à $t_(x) = Cx^2$. Comme $Gx^2 = 2x(p-q)+1 = 1$, on trouve $C = -1$ et finalement la solution particulière $t_p(x) = -x^2$.
La solution générale est donc $t(x) = -x^2 + A + Bx$ et les conditions frontière ramènent à $t_x = x(K-x)$.

(d) $c_x = E_x[\sum_0^T X(t)]$ (coût total d'inventaire ésperé) satisfait le système inhomogène : :

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{c_{x+1}}{2} + \frac{c_{x-1}}{2} + x \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ c_K &= 0 \\ c_0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution particulière est $\frac{-x^3}{3}$. Finalement, on arrive à $c(x) = \frac{x(K^2-x^2)}{3}$.

A_i satisfont $A_1 z_1 + A_2 z_2 = 1$, $A_1 + A_2 = 1$ et $w(x) = \frac{\;}{z_1^Z - z_2^K}$

Rémarque : Les problèmes de cette section ont des versions à espace d'états d'états continu, obtenu en considérans des marches avec incréments infinitésimals D, et en prenant la limite $D \to 0$. La marche aleatoire devient ainsi un processus avec chemins continus, appelé mouvement Brownien.

On peut voir $X^{\mathcal{A}}$ comme une projection de dimension infinie du processus $X_t, t \geq 0$; pour cela, les problèmes concernant les chemins d'absorbtion necessite un savoir de toute la distribution du $X_t, t \geq 0$, et un traitement rigoureux comporte certaines difficultées techniques.

Les problèmes sur la distribution du chemin de sortie/absorbtion $X^{\mathcal{A}}$ doivent considérer simultanéemment toutes les distributions $X_i^{\mathcal{A}}$, conditionnées sur un départ $X_0 = i$. Un conditionnement sur le premier pas $X_1 = j$ nous ramene à considérer en suite les distributions $X_{i,j}^{\mathcal{A}}$, conditionné sur $X_0 = x_i, X_1 = x_j$, et avec le premier état x_i enlevé. Une application de la proprieté de Markov "intermediaire" (qui concerne les evenements qui dependent d'un nombre infini des temps après le "présent") implique que $\mathcal{L}(X_{i,j}^{\mathcal{A}}) = \mathcal{L}(X_j^{\mathcal{A}})$.

Par exemple, le nombre des pas jusq'à l'absorbtion satisfait

$$\begin{aligned} N_i &= 1 + N_i' \\ \mathcal{L}(N_i)' &= \sum_j \mathbb{P}\{X_1 = j | X_0 = i\} \mathcal{L}(N_{i,j}') = \sum_j \mathbb{P}\{X_1 = j | X_0 = i\} \mathcal{L}(N_j) \end{aligned}$$

Ces équations permettent de calculer des diverses fonctions de N. Par exemple, soit $n_i = \mathbb{E}_i N$. Prenant espérances, nous obtenons les équations

$$n_i = 1 + \sum_j \mathbb{P}\{X_1 = j | X_0 = i\} n_j, \quad \forall i \in E$$

qui permettent de calculer simultanéemment tous les espérances n_j. Pour les probabilités d'absorbtion dans chaque sous ensemble de ∂, on obtient un système homogène identique (donc "sans le 1").

En conclusion, tous ces problèmes sont resolus par un conditionnement sur le premier pas, en utilisant un renforcement de la proprieté de Markov pour les processus de Markov homogènes, que nous appeléront le **proprieté de Markov intermediaire**.

Définition 3.5 *Nous dirons qu'un processus X_t a la proprietè de Markov intermediaire ssi*

$$\mathbb{E}_{\{X_t=i, X_{t+1}=j\}} f(\mathcal{A}') = \mathbb{E}_{\{X_0=j\}} f(X^{\mathcal{A}}), \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

pour toute fonction f et ensemble absorbant ∂ pour les quelles l'espérance est bien définie.

Théorème 3.5 *Les chaînes de Markov homogènes et les marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ ont la proprietè de Markov intermediaire.*

3.7 Exercices : TD 2

1. Soit une chaîne definie par la matrice de transition $\begin{pmatrix} p & 0 & | & 1-p \\ 0 & p & | & 1-p \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$ et la distribution initiale (α_1, α_2).
   Trouvez l'esperance du nombre des pas N jusq'à l'absorbtion.

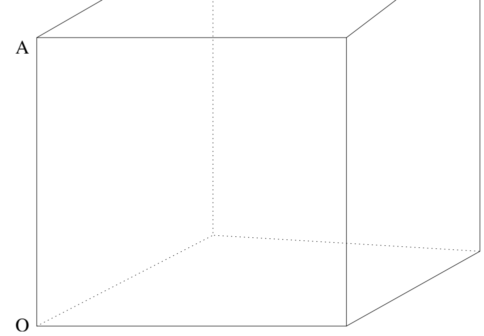


FIG. 4 – **Marche aléatoire simple**

2. Pour une **marche aléatoire** $X_t,\ t = 0, 1, 2, ...$ **sur le graphe cubique** ci-dessous, calculer :
   (a) L'ésperance en sortant de U du nombre de pas T_O jusq'au noeud O. *Indication :* Utiliser la symmetrie.
   (b) Les probabilités stationnaires du chaque noeud.
   (c) L'ésperance en sortant de O du nombre de pas $\tilde{T}_O$ jusq'au premier retour à O.
   (d) La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_T = U\}$, ou $T = \min[T_U, T_O]$.
   (e) La probabilité p_k en partant de O que la marche visite U exactement k fois ($k = 0, 1, 2, ...$) avant le premier retour à O. Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.
3. **Rélations de récurrence**. Obtenez la formule analytique des suites decrites par les relations de récurrence ci-dessous, et verifiez-les en utilisant les premiers termes de la suite t_2, t_3.
   (a) $t_i = 2t_{i-1} + i - 1, \quad t_0 = 0$ (b) $t_i = 2t_{i-1} + 5 \cdot 2^i, \quad t_0 = 0$
   (c) $t_i = 3t_{i-1} - 2t_{i-2} + 2,\ t_0 = 0, t_1 = 2$ (d) $t_i = 2t_{i-1} - t_{i-2} + 2,\ t_0 = 0, t_1 = 2$
4. **La ruine du joueur** Nous allons étudier la marche aléatoire simple processus jusqu'au "temps d'arrêt/sortie" $T = \min[T_0, T_N]$ quand le process sort de l'interval $[0, N]$ pour N donné, i.e. on prend 0 et N comme états absorbants. On appelle ce problème **la ruine du joueur**, a cause de l'interpretation d'un joueur qui s'engage dans une série de parties (indépendantes) à un jeu où à l'issue de chaque partie il gagne 1F avec une probabilité p et perd 1F avec une probabilité $q = 1 - p$, et qui décide de s'arrêter de jouer dès qu'il aura N francs en poche, ou dès qu'il n'a plus d'argent. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la fortune du joueur au bout de n parties, et $X_0 = i$ représente sa fortune à l'entrée dans le Casino. On denotera par $\mathbb{E}_i$ l'esperance en commençant de i (conditionnant sur $X_0 = i$), et on designe par E l'événement que le joueur gagne, i.e. $E = \{x_T = N\} = [\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } X_n = N, X_i > 0, i = 1, ..., n-1]$.
   Pour tout i de $\{0, ..., N\}$, on pose :
   $$b_i = P\left(E \mid [X_0 = i]\right).$$
   (a) Calculer b_0 et b_N .
   (b) Montrer que :
   $$\forall\ i \in \{1, ..., N-1\}\ ,\ b_i = pb_{i+1} + qb_{i-1} \text{ (on rappelle que } q = 1 - p).$$

quand $p = q$ est de la forme : $b_i = k\ i$, et cherchez des solutions de ces formes qui satisfont l'equation de b_N.

(d) Pour tout i de $\{0, ..., N\}$, on pose $a_i = P(F \mid [X_0 = i])$ où F est l'événement "le joueur repart ruiné" . En procédant comme auparavant, montrer que :

$$a_i = \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \text{ si } p \neq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{N-i}{N} \text{ si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(e) Pour tout i de $\{0, ..., N\}$, calculer $a_i + b_i$. Que peut-on en déduire ?

(f) Obtenez un système d'équations pour l'espérance du gain final $f_i = \mathbb{E}_i X_T$. Calculez cette fonction, pour $p = q$, et pour $p < q$, quand $N \to \infty$.

(g) Obtenez un système d'équations pour l'espérance du temps de jeu : $t_i = \mathbb{E}_i T$. Calculez cette fonction, pour $p = q$, et pour $p < q$, quand $N \to \infty$.

(h) Obtenez un système d'équations pour l'espérance du "coût cumulé d'inventoire" $c_i = \mathbb{E}_i \sum_{t=0}^{T-1} X_t$. Calculez cette fonction, pour $p = q$, et pour $p < q$, quand $N \to \infty$.

(i) Obtenez un système d'équations pour la fonction génératrice des probabiliées $w_i = \mathbb{E}_i a^T$. Calculez cette fonction, pour $p = q$, et pour $p < q$, quand $N \to \infty$.

5. **La marche paresseuse :** Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = \pm 1]$ =p et $P[Z_n = 0]$ =1- 2 p, avec $0 < p < 1/2$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par $\mathbb{E}_x$ l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés.

   Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\}$, $f_x = \mathbb{E}_x X_T$, $t_x = \mathbb{E}_x T$, $c_x = E_x[\sum_0^T X(t)]$ et $w_x = \mathbb{E}_x a^T$.

   Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour a) p_x, b) f_x, c) t_x, d) c_x et e) w_x.

6. Ruegg, 2.9 :10,5,6,14,13,11.

3.8 Solutions

2) $X(t)$ représente une marche aléatoire simple sur le cube $[0,1]^3$, $\vec{0}$ est l'origine $(0,0,0)$, le coin oposé $(1,1,1)$ est noté par u. On remarque que dans toutes les questions les voisins de l'origine ont un role symetrique et cela nous permet de le noter par la même lettre $a = (0,0,1), ...$. De la même manière on appelle les voisins de u par $b = (0,1,1), ...$

   a) Pour trouver $t_u = E_u[T_0]$, on résout le système :

$$t_u = 1 + t_b$$
$$t_b = 1 + \frac{2}{3} t_a + \frac{1}{3} t_u$$
$$t_a = 1 + \frac{2}{3} t_b$$

b) $E_0[T_0]$ ou T_0 représente le temps espéré jusqu'à la prochaine visite de 0 en commencant de 0, est donné par $1+t_a = 1+7 = 8$. A remarquer que c'est exactement l'inverse de la probabilité "de long parcour" d'être à 0,ce qui est un résultat bien connu sur les temps de retours espérés.

c) $P_a[X(T) = u]$, s'obtient de la solution du système

$$p_a = \frac{2}{3}p_b$$
$$p_b = \frac{2}{3}p_a + \frac{1}{3}$$

qui est $p_b = \frac{3}{5}, p_a = \frac{2}{5}$.

d) Soit p_k la probabilité d'avoir exactement k visites à $(1,1,1)$ avant de retourner à 0. Alors p_0 c'est le même que la probabilité commencant en a que la marche revient à 0 avant de visiter $(1,1,1)$, qui est $\frac{3}{5}$. $p_1 = (\frac{2}{5})^2$, $p_2 = (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})$, et en général $p_k = (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^{k-1}$. (verifiez que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{2}{5}$, comme il faudrait).

3) (a) C'est une equation nonhomogene, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \quad \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \ \text{ avec } \ c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{aligned} c_1 &= 2c_1 + 1 \quad \text{et} \ \ c_1 = -1 \\ c_2 &= -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et} \ \ c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 &= = 0 = -1 + A \quad \text{et} \ \ A = 1 \\ t_i &= -i - 1 + 2^i \end{aligned}$$

(b) C'est une equation nonhomogène, alors :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \quad \tilde{t}_i = ci2^i \ \text{ avec } \ ci2^i = 2(c(i-1)2^i/2) + 52^i$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{aligned} c &= 5, \quad t_i = 5i2^i + A2^i \quad \text{et finalement,} \\ t_0 &= = 0 = A \quad \text{et} \ \ A = 0 \\ t_i &= 5i2^i \end{aligned}$$

(c) C'est une equation differentielle nonhomogène et l'equation quadratique attachée a les racines $1, 2$, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 2^i + A_2, \quad \tilde{t}_i = ci \ \text{ avec } \ ci = 3(ci - c) - 2(ci - 2c) + 2$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{aligned} c &= -2 \quad \text{et} \ \ c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 &= = 0 = -1 + A \quad \text{et} \ \ A = 1 \\ t_i &= -i - 1 + 2^i \end{aligned}$$

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 + A_2 i, \quad \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \text{ avec } c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{et alors} & c_1 & = & 2c_1 + 1 \quad \text{et} \quad c_1 = -1 \\ & c_2 & = & -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et} \quad c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ & \tilde{t}_i & = & -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ & t_0 & = & = 0 = -1 + A \quad \text{et} \quad A = 1 \\ & t_i & = & -i - 1 + 2^i \end{array}$$

4) (a) $b_0 = 0, b_N = 1$

(b) En conditionnant, on trouve :

$$\begin{aligned} b_n &= \mathbb{P}_n[X(T) = K] \\ &= p\,\mathbb{P}_n[X(T) = K/X(1) = n+1] + q\,\mathbb{P}_n[X(T) = K/X(1) = n-1] \\ &= p\,b_{n+1} + q\,b_{n-1} \quad 1 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

car

$$\mathbb{P}_n[X(T) = K/X(1) = n \pm 1] = \mathbb{P}[X(T) = K/X(0) = n, X(1) = n \pm 1] = \\ \mathbb{P}[X(T) = K/X(1) = n \pm 1] = \mathbb{P}[X(T) = K/X(0) = n \pm 1] = b_{n\pm 1}$$

en utilisant la proprieté de Markov et l'homogeneité.
Solution finale : $b_n = \frac{(q/p)^n - 1}{(q/p)^K - 1}$ si $p \neq q$, $b_n = \frac{n}{K}$. quand $p = q = 1/2$.

g) L'équation :

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + p\,t_{n+1} + q\,t_{n-1} \quad 1 \leq n \leq K-1 \\ t_0 &= 0 \\ t_K &= 0 \end{aligned}$$

est cette fois nonhomogène. La solution generale homogène avec $p \neq q$ est $k_1(q/p)^n + k_2$ et le terme nonhomogène 1 sugere une solution particulière constante k, mais comme ça satisfait l'équation homogène, on modifie à kn. Finalement, $k = \frac{1}{q-p}$. En demandant que $\frac{n}{q-p} + k_1(q/p)^n + k_2$ satisfait les conditions frontière on trouve :

$$t_n = \frac{n}{q-p} - \frac{K}{q-p}\frac{(q/p)^n - 1}{(q/p)^K - 1}.$$

Note : Toutes les questions ci-dessus utilisent le même operateur

$$(Gf)_n = (P_I)(f)_n = p\,f_{n+1} + q\,f_{n-1} - f_n. \tag{9}$$

la seule difference étant dans les conditions frontière et dans la partie nonhomogène.

même forme). Par exemple, p_x satisfait :

$$\begin{aligned} p_x &= p\, p_{x+1} + p\, p_{x-1} + (1-2p)\, p_x \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \Longleftrightarrow \\ 2p\, p_x &= p\, p_{x+1} + p\, p_{x-1} \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \\ p_K &= 1 \\ p_0 &= 0 \end{aligned}$$

$t_x = E_x[T]$ (temps de sortie esperé) satisfait

$$t_x = p(1+t_{x+1}) + p(1+t_{x-1}) + (1-2p)(1+t_x) \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + \frac{1}{2p} \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \\ t_K &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

(b) On trouve

$$t_x = \frac{x(K-x)}{2p}, \quad p_x = \frac{x}{K}, \quad f_x = x$$

4 Le comportement limite des chaînes de Markov

4.1 Lois invariantes et lois asymptotiques

Une question très importante pour les chaînes de Markov est de déterminer les distributions "asymptotiques/a la longue/limites" d'une chaîne specifié par $\mu(0)$ et P :

$$\boldsymbol{\pi}(\infty)_{\mu(0)} = \boldsymbol{\pi}(\infty) = \lim_{n\to\infty} \mu(n) = \lim_{n\to\infty} \mu(0)P^n \tag{10}$$

A priori, il pourrait y exister une limite asymptotiques différente (10) pour chaque distribution de départ $\mu(0)$. Plus précisement, on pourrait avoir des distributions limite différentes $\boldsymbol{\pi}(\infty)_i$ pour chaque point de départ sur $\mu(0) = \delta_i$.

Remarque 4.1 *Comme $\delta_i P^n$ est précisement la ligne i de la matrice P^n, on trouve par (10) que les limites asymptotiques $\boldsymbol{\pi}(\infty)_i$ pour chaque point de départ nonaléatoire possible $i = 1, ..., I$ sont précisement les lignes de la matrice*

$$\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$$

. On appelera cette matrice la matrice de transition asymptotique. En plus, ces vecteurs de probabilité sont les points extremaux de l'ensemble des toutes les distributions asymptotiques possibles.

Question (ERG) : Est-ce-que la limite matrice $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ existe et est-ce-que elle a des lignes identiques, i.e. est-ce-que on a $\boldsymbol{P} = \mathbf{1}\boldsymbol{\pi}$? (ici $\mathbf{1}$ denote un vecteur colonne et $\boldsymbol{\pi}$ un vecteur ligne).

Les reponses aux questions (E),(U) et (ERG) peuvent-être abordées par la structure spectrale (valeurs propres, vecteurs propres) speciale de la matrice P, en utilisant le théorème de Perron-Frobenius pour les espace d'états finies.

et encore des autres limites données par l'ensemble convexe engendré par $\boldsymbol{\pi}(\infty)_i, i \in \mathcal{E}$.

Définition 4.1 *L'ensemble des distributions limite $\boldsymbol{\pi}(\infty)_{\mu(0)}$ d'une chaine P, obtenues en variant la distribution initiale $\mu(0)$, sera appellé* **l'ensemble des distributions asymptotiques**.

4.1.1 Équations d'équilibre/stationnarité/invariance

Remarque 4.2 *En supposant que la limite (10) existe (ce qu'il n'y est pas toujours le cas), on voit par $\mu(n+1) = \mu(n)P$ que chacune de cettes distributions "a la longue" doit satisfaire les équations $\boldsymbol{\pi}(\infty) = \boldsymbol{\pi}(\infty)P$*

Définition 4.2 *Les équations*

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}P \tag{11}$$

sont appelées **équations d'équilibre/stationnarité/invariance**, *et un vecteur des probabilités qui les satisfait est appelé* **distribution stationnaire** *ou invariante.*

Autrement dit : une distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ est un vecteur de probabilités qui est aussi vecteur propre a gauche de P associé à la valeur propre 1.

Remarque 4.3 *Le nom stationnaire vient du fait que si $\mu(0) = \boldsymbol{\pi}$, alors on a $\mu(n) = \boldsymbol{\pi}$ pour chaque n.*

Par la rémarque (4.2), il suit que :

Corollaire 4.1 *Les distributions asymptotiques d'une chaîne de Markov homogène se trouvent parmi les distributions stationnaires.*

Le système d'équilibre (11) est donc la clé du calcul des distributions asymptotiques. Deux questions fondamentales ici sont celles de l'existence d'au moins une solution, et de l'unicité.

Questions (E-U) : 1) Est-ce que c'est possible qu'il n'existent pas des vecteurs des probabilités qui satisfont le système d'équilibre (11) (i.e. est-ce que c'est possible qu'il n'y ait pas des vecteurs propres pour la valeur propre 1 qui ont

Une autre question fondamentale est si dans la presence d'une solution unique du système d'équilibre (11), elle sera forcement "attractive", donc il y aura de la convergence $lim_{n\to\infty}\mu(0)P^n = \boldsymbol{\pi}$ pour n'importe quel $\mu(0)$.

Dans la términologie des systêmes dynamiques, cette situation correspond au cas quand l'équation d'évolution $\mu(n+1) = \mu(n)P$ admet un seul point invariant stable, le basin d'attraction du quel est tout l'éspace (donc toutes les orbites qui partent de n'importe quel $\mu(0)$ convergent vers $\boldsymbol{\pi}$). Mais, il y a aussi des situations plus compliquées :

Exemple 4.1 L'inexistence de la limite $\boldsymbol{P} = lim_{n\to\infty}P^n$ pour les chaînes cycliques. *La limite $\boldsymbol{P}$ n'existe pas toujours, comme on voit immediatement en examinant une chaîne de Markov qui bouge cycliquement sur les noeuds d'un graphe. Par exemple, pour $n = 3$, avec la matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a : } P^{3n} = I_3 \ , \ P^{3n+1} = P \text{ et } P^{3n+2} = P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit immediatement que la suite $P, P^2, P^3 = I, P^4 = P, ...$ est cyclique et donc sans limite.

Ici, la distribution stationnaire $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$ est unique, mais instable, et tout l'espace se decompose dans des cycles invariants instables d'ordre 3.

4.1.2 Les équations d'équilibre local

Exemple 4.2 *Pour une* **marche aléatoire** $X_t, \ t = 0, 1, 2, ...$ **sur un graphe formé de deux tetrahèdres superposés**, *calculer :*

1. *L'ésperance en partant de U du nombre de pas T_O jusq'au coin opposé O.*Indication : *Utiliser la symmetrie.*
2. *L'ésperance en sortant de O du nombre de pas $\tilde{T}_O$ jusq'au premier retour à O.*
3. *La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_T = U\}$, ou $T = \min[T_U, T_O]$.*
4. *La probabilité p_k en partant de O que la marche visite U exactement k fois ($k = 0, 1, 2, ...$) avant le premier retour à O. Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.*
5. *Les probabilités stationnaires du chaque noeud.* **Indication :** *Devinez la rèponse et montrez qu'elle satisfait le systême des équations d'équilibre.*

4.2 L'ergodicité

Un cas trés fréquent dans les applications et quand il n'y a qu'une distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$, qui coincide aussi avec la distribution limite pour toutes les points de départ initials possibles. Alors, par le corrollaire (4.1), la distribution limite est independante de la distribution de départ, est egale à $\boldsymbol{\pi}$. Nous allons appeler ça le cas **ergodique**.

Définition 4.3 *On appelle une chaîne à matrice de transition P* **ergodique** *lorce'que la distribution limite $\boldsymbol{\pi}(\infty) = \boldsymbol{\pi}(\infty)(\mu(0)) = \lim_{n\to\infty}\mu(n)$ existe et est* **unique**, *independement de la distribution de départ.*

$\pi_i = 0, \forall i$. Nous appelerons ces deux cas **ergodique positive** et **ergodique nul** (ce dernier cas étant impossible pour des espace d'états finies). Dans la literature, le terme ergodique signifie d'habitude ce que nous appelons ici ergodique positive.

Remarque 4.4 *Une chaîne ayant des distributions limite en partant de chaque point i, et ayant une distribution stationnaire unique $\boldsymbol{\pi}$ est ergodique (i.e. toutes les distribution asymptotiques doivent coincider avec $\boldsymbol{\pi}$).*

L'abondance du cas ergodique est expliquée par la décomposition spectrale :

Lemma 4.1 *Une matrice A de dimension n ayant un ensemble de n vecteurs propres à droite independants $\boldsymbol{d}_i$, et donc aussi un ensemble de n vecteurs propres à gauche independants $\boldsymbol{l}'_i$, calculés en prenant les lignes de la matrice D^{-1}, où $D = (\boldsymbol{d}_1 \mid \boldsymbol{d}_2 \mid \ldots \ \boldsymbol{d}_n)$ peut-être decomposé :*

$$A = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{d}_i \ \boldsymbol{l}'_i$$

où λ_i sont les valeurs propres.

Ce cas a lieu par exemple quand tous les valeurs propres de P sont distincts ("le cas générique"). Si en plus la seul valeur propre de module 1 est 1, et avec multiplicité 1 ("le cas générique"), il suit immediatement que

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \mathbf{1}\ \boldsymbol{\pi}$$

Nous examinons maintenant pour ergodicité un exemple ou P^n et $\boldsymbol{\pi}$ se calculent explicitement :

Exemple 4.3 Chaîne a deux ètats. *Soient $a, b \in [0,1]$ et la matrice de transition :*

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

a) Montrer en calculant les valeurs et vecteurs propres que

$$P^n = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b} \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

b) Montrez que avec $a, b \in (0,1)$, la limite $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$. En suite, calculez cette limite dans tous les cas possibles.

En conclusion, on voit que avec $a, b \in (0,1)$, la limite matrice $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ existe et qu'elle a des lignes identiques, donc la chaîne est ergodique : la distribution limite $\boxed{\boldsymbol{\pi} = (\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})}$ est unique. Elle est aussi l'unique distribution stationnaire.

Le cas ergodique est le plus important dans les applications, a cause du :

Théorème 4.1 *Soit $X(n)$ une chaîne de Markov ergodique à distribution asymptotiques $\boldsymbol{\pi}$, et soit une fonction "coût" f tel que la "moyenne spatiale" $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}} f(X_.) = \sum_{j \in \mathcal{E}} \pi_j f_j$ est bien definie. Alors, la moyenne temporelle des coûts converge presque partout vers la moyenne spatiale, for any initial distribution :*

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} f(X_n) = \sum_{j \in \mathcal{E}} \pi_j f_j$$

Nous examinons maintenant un exemple ou P^n n'est pas disponible explicitement ; quand même, la distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ est unique et donc la limite des coûts moyenne temporelles se calculent facilement :

Exercice 4.1 *Montrez que la marche aléatoire sur le graph papillon a une distribution stationnaire unique $\boldsymbol{\pi}$. Calculez l'esperance du coût moyenne de cette marche, si $f(A) = 10, f(B) = 1$ et les autres coûts sont 0.*

Nous allons examiner maintenant une chaîne non-ergodique, pour la quelle la distribution stationnaire n'est pas unique.

Exemple 4.4 Exemple de non unicité de la distribution stationaire π *: Dans l'exemple defini par la matrice en dessous, cherchons* $\boldsymbol{\pi} \in (\mathbb{R}^+)^5$ *tel que* $\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$ *et* $\sum_{i=1}^{5} \pi_i = 1$.

$$\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi} \iff (\boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{\pi}_2 \boldsymbol{\pi}_3 \boldsymbol{\pi}_4 \boldsymbol{\pi}_5) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \pi \iff \begin{cases} \boldsymbol{\pi}_2 = 0 \\ \boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi}_3 \\ \boldsymbol{\pi}_5 = 2\boldsymbol{\pi}_4 \end{cases}$$

On voit clairement qu'il n'y a pas unicité (par exemple $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$ *et* $\left(0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ *sont des distributions stationnaires).*

Cette chaîne etale des "pathologies", qu'on peut percevoir en examinant le **graphe de communication de la chaîne** :

Remarque : afin d'apercevoir la structure de la chaîne et de calculer plus facilement P^n , il peut être intéressant de renuméroter les états telles que états qui conduisent l'un à l'autre) sont groupés ensemble.

Dans cet exemple, si on échange les états e_2 et e_3, on obtient aprés le rangement facilitant des elements dans l'ordre $1, 3, 2, 4, 5$ la matrice de transition :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

à structure : $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et encore $P = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & B_{1,2} \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}$ ou A correspond aux états $(1, 3)$ qui conduisent l'un à l'autre et B_2 correspond aux états $(4, 5)$ qui conduisent l'un à l'autre aussi.

Il y'a ici deux pathologies :

1. il existe un element "**transient**" 2 (qu'on peut quitter sans retour pour toujours)
2. le graph de communication decompose en deux classes : $(1, 3)$ et $(2, 4, 5)$ qui ne communique pas et la matrice de transition a une structure block diagonale, ce qu'on appelera "**reducibilite**".

l'element " transient" 2, il nous restent deux "classes de communication fermées", $(1,3)$ et $(4,5)$, appellées "**classes de récurrence**", ou on reste pour toujours une fois entré.

En conclusion, on verifie facilement que : $P^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 & 0 \\ 0 & B_1^n & B_{1,2,(n)} \\ 0 & 0 & B_2^n \end{pmatrix}$

en reflexion du fait qu'one peut etudier les trois chaînes correspondant aux A, B_1 et B_2 separemment.

Aussi, on verifie ici que $P^n(2,2) = (1/2)^n$, en illustrant le principe que **la limite dans les états transitoire est** 0. En conclusion,

$$\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Il reste encore à déterminer x_1, x_2. Pour cela, une approche directe par un systéme des récurrences nous montrera que ces deux quantités sont aussi $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$.

En general, ce problème est lié à l'absorbtion des elements transitoires dans les classes récurrentes. Le fait qu'il ait une seule classe destination possible ici pour l'élement transitoire 2 et donc l'absorption dans cette classe est sure nous demontre le fait deja connu qu'une fois absorbée dans une classe fermé, une marche oubliera sa position initiale et donc aura exactement les probabilités limites de la classe. Donc,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Mais, dans l'exemple 4.4, si l'element transient aurait des possibilités de passage vers les deux classes récurrentes la, ça nous obligerait de résoudre un problème d'absorbtion avant de calculer la limite $\lim_{n\to\infty} P^n$.

Donc, avant de donner une procedure qui fournisse la limite $\boldsymbol{P}$, il faut établir si elle existe, ce qui n'est pas toujours le cas, comme on voit en examinant les chaînes de Markov qui bougent cycliquement sur les noeuds d'un graphe. En plus, le calcul de la limite $\boldsymbol{P}$ necessite la maitrise des **problèmes de Dirichlet**, qui étudient le comportement des chaînes de Markov absorbées ou "induites" (obtenu en forçant une chaîne de s'arrêter ou de rester dans les confines d'un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de son espace d'états initial).

Nous attaquons maintenant la question de l'existence des distributions “a la longue” (ou simplement limites) d'une chaîne specifié par $\mu(0)$ et P :

$$\boldsymbol{\pi}_\infty = \lim_{n\to\infty} \mu(n) = \lim_{n\to\infty} \mu(0)P^n$$

pour n'importe quelle distribution initiale $\mu(0)$. Il est evidente que cette question est equivalente à l'existence de la limite $\boldsymbol{P} = lim_{n\to\infty} P^n$.

Pour les espace d'états finies, on peut aborder cette question très vite algèbriquement, comme une consequence du théorème de Perron-Frobenius (on le fera plus tard), mais il est aussi interessant de comprendre d'abord les ”interpretations probabilistes” derrière l'algèbre.

On analysera maintenant, pour chaque etat e_i, l'ensemble A_i de temps pour les quelles il est possible de se trouver en i en partant de i, i.e.

$$A_i = \{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Remarque 4.5 *Cet ensemble est ferme sous l'operation d'addition, i.e. cet ensemble est un sous groupe de* $\mathbb{N}$.

Définition 4.4 *Soit* e_i *dans* E. *On appelle* <u>*période de* e_i</u> *l'entier* $d(i) = p\gcd\left\{n > 0\,;\, p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$ *(autrement dit :* $p_{ii}^{(n)} > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n = md(i)$ *).*

Si $d(i) = 1$ *, l'état* e_i *est dit* <u>*apériodique*</u>*.*

Remarque 4.6 *La période ne dépend que de la classe. Une classe de période 1 est dite* <u>*apériodique*</u>*.*

Remarque 4.7 *L'existence d'une boucle, i.e.* $p_{ii} > 0$, *assure l'apériodicité.*

Exemple 4.5 *Une classe de communication à matrice de transition* $\tilde{P}$, *pour la quelle il existe un entier* c *tel que* $\tilde{P}^c = I$, *apellée cyclique d'ordre* c, *est forcement périodique, et la période* d *est parmi les diviseurs de* c. *Par exemple, en changeant la classe transitoire dans l'exemple ci-dessus tel qu'elle contienne un cycle de longueur* 4 *et un de longueur* 2, *on obtient une classe cyclique d'ordre* 4 *et période* 2.

L'existence de la matrice des distributions à la longue est liée à la question de la périodicité.

Exemple 4.6

$$P = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac13 & \frac23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac12 & \frac12 \end{pmatrix}$$

tement que $A_2 = \{3k, k \geq 0\} = \{3, 6, 9, ...\}$. Si par contre un de ces cycles avait une longueur pas divisible par 3, par exemple 4, on aurait eu : $A_2 = \{3k+4l, k, l \geq 0\} = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, ...\}$, dans quel cas A_2 contien tous les nombres en partant de 6.

On voit que les ensembles A_i contiennent toujours toutes les nombres de la forme $k\, d(i)$, pour k assez grand (cela est un résultat valable pour n'importe quel semigroup de $\mathbb{N}$). En ce qui concerne la périodicité, il y a deux possibilites pour A_i, en dependant de d=p.g.c.d de la longueur de deux cycles :

1. Dans le cas $d = 1$, cet ensemble contien “tous les nombres assez grandes” (en partant d'un certain point).
2. Dans le cas $d > 1$, cet ensemble est un sousensemble du sousgroupe $d\,\mathbb{N}$. Donc, la matrice $P^{(n)} = P^n$ ne peut converger quand $n \to \infty$ (car il y aura des 0 qui alternent avec des nombres positives pour toujours : voir par exemple la marche cyclique sur $\mathbb{Z}^3$), et il vaudra mieux réperer cette pathologie.

Remarque 4.8 *On vera que la périodicité des classes transitoires n'empêche pas du tout le calcul de la matrice de distributions à la longue, parce-que la masse totale de la partie transitoire d'une chaîne converge vers 0 (voir la troisième rémarque qui suit le théorème 4.3).*

Par contre, la périodicité dans une classe reccurente rend la convergence impossible. On peut demontrer que son absence assure la convergence, car cela est equivalent à l'absence des valeurs propres qui sont racines de l'unité, et à l'absence des valeurs propres de valeur absolue $|\lambda| = 1$, sauf $\lambda = 1$ (par Perron-Frobenius). Finalement, le fait que λ^n converge pour chaque valeur propre λ assure l'existence de la limite $\lim_{n\to\infty} P^n$.

Donc, la limite à la longue $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n(i,j)$ d'une chaîne existe ssi il n'y a pas des classes récurrentes périodiques.

En conclusion, dans l'exemple suivant 4.7, comme la périodicite est presente seulement dans une classe transitoire et il y a une seule classe reccurente, on peut immediatement calculer la distribution a la longue en utilisant (12).

Exemple 4.7

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Nous donnerons maintenant une méthode pour la détermination des distributions "a la longue" d'une chaîne, dans l'absence des classes récurrentes périodiques. Soit

$$P = \begin{pmatrix} Q_t & T_1 & ... & ... & T_I \\ 0 & P_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ... & P_I \end{pmatrix}$$

une decomposition de la matrice de transition P, avec $P_i, i = 1, ..., I$ étant les projections de la matrice P sur les classes récurrentes, et avec Q_t étant la projection de la matrice P sur les classes transitoires. Il est facile de verifier que la puissance P^n est de la forme :

$$P^n = \begin{pmatrix} Q_t^n & T_{1,n} & ... & ... & T_{I,n} \\ 0 & P_1^n & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & P_2^n & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ... & P_I^n \end{pmatrix}$$

Cette décomposition reflète les idées suivantes :

1. Les classes récurrentes "ne savent" pas du tout qu'il y un exterieur ; alors, la projection P_i de la matrice P sur une classe récurrente i est elle même une matrice stochastique et la projection de la puissance P^n sur la classe i est précisement P_i^n et peut-être calculé en ignorant le reste des elements.
2. Les probabilités $P^n(i, j)$ pour i, j récurrentes mais dans classes differents sont toujours 0 (comme pour $n = 1$) et alors la limite est aussi 0. Le même est vrai pour les probabilités $P^n(i, j)$ pour i récurrent et j transitoire.
3. Remarquons d'abord que la projection Q_t de la matrice P sur la union des classes transitoires est une matrice bf sous-stochastique.

   Définition 4.5 *Une matrice à elements Q s'appelle sous-stochastique si la somme de chaque ligne est ≤ 1, avec inegalité stricte dans au moins une ligne de chaque classe de communication.*

   Lemma 4.2 *Les valeurs propres ρ_i d'une matrice sous-stochastique satisfont $|\rho_i| < 1$.*

   Les classes transitoires "découvrent" qu'il y un exterieur seulement au moment de l'absorption. Plus precisement, la projection de la puissance P^n sur les classes transitoires est précisementQ_t^n et peut etre donc aussi calculé en ignorant le reste des elements. Cette limite va etre toujours 0, parce-que la matrice Q_t est sous-stochastique. Ainsi, la probabilité de se trouver dans un état transitoire j s'annule dans la limite, i.e.

$$lim_{n\to\infty} P^n(i, j) = 0 \quad \text{si } j \text{ est transitoire}$$

En conclusion, si la limite $\boldsymbol{P}$ existe, elle est de la forme :

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & ... & ... & p_I \\ 0 & \Pi_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ... & \Pi_I \end{pmatrix}$$

Nous començons par deux cas particuliers :

a) chaîne ergodique, et donc avec $I = 1$ classes récurrentes, et

b) avec les classes récurrentes étant toutes de dimension 1 (et donc absorbantes).

4.6.1 La distribution limite dans le cas ergodique

Théorème 4.2 *Soit X_n une chaîne de Markov finie avec une seule classe récurrente, qui est apériodique.*

a) Cela est algébriquement équivalent à une multiplicité un pour la valeur propre $\lambda = 1$, et à l'absence des autres valeurs propres de valeur absolue $|\lambda| = 1$.

b) La distribution limite est unique et la limite $\boldsymbol{P}$ est une matrice de rang 1 :

$$\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n = \mathbf{1}\ (\mathbf{0}\quad |\boldsymbol{\pi}_\infty) \tag{12}$$

ou $\boldsymbol{\pi}_\infty$ est la distribution stationnaire de la classe reccurente.

Notes : 1) La démonstration du théorème 4.2 à partir des conditions algébriques en a) est immediate.

2) L'extension à un espace d'états infini demande des approches plus sophistiquées (comme l'utilisation de la distance de Kullback-Leibler comme fonction Lyapounov)

Donc, pour les chaînes ergodiques, le calcul est assez simple, cf le théorème fondamentale 4.2 ci-desssus : il suffit de trouver la distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}_\infty$ de la seule classe récurrente, a "l'éteindre" par des zeros sur les classes transitoires, et en suite utiliser la formule $\mathbf{1}\ \boldsymbol{p}$, où $\boldsymbol{p}$ est le vecteur $\boldsymbol{\pi}_\infty$ étendu avec des zeros.

4.6.2 La distribution limite dans le cas purement absorbant

Un autre cas simple est celui des chaînes qui n'ont que des états récurrents absorbants, et donc $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{P}^{(tr)} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$

Ici, les probabilités limite $\boldsymbol{P}_{i,j}, \forall i$ transitoire et j récurrent sont egaux aux probabilités d'absorption $p_i(j) = \mathbb{P}_i\{X_\tau = j\}$, qui peuvent etre trouvées en resolvant un "système d'absorption" trouvé en conditionnant sur le premier pas. En denotant par $\boldsymbol{P}^{(abs)}$ la matrice formée par ces probabilités, on arrive à

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{P}^{(abs)} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

où la matrice $\boldsymbol{P}^{(abs)}$ est obtenue en résolvant le problème d'absorption $\boldsymbol{P}^{(abs)} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} \boldsymbol{P}^{(tr)}$

Nous considerons maintenant le cas géneral à plusieurs classes récurrentes. Il nous reste seulement de calculer les limites $lim_{n\to\infty}P^n(i,j)$ pour i transitoire et j récurrent.

Définition 4.6 *Soit i un element transitoire d'une chaîne X_n, soit j un element apartenant à une classe de récurrence $\hat{j}$. On appelera* **probabilité d'absorbtion** $p_i(\hat{j})$ *la probabilité que la chaîne commençé en i finisse en $\hat{j}$.*

Le calcul des probabilités d'absorbtion et l'effet de ces pathologies et des autres seront abordés plus en detail dans un prochain chapitre. Finalement, on arrivera à la conclusion que si la limite $\boldsymbol{P} = lim_{n\to\infty}P^n$ existe, elle satisfait :

$$\boxed{lim_{n\to\infty}P^n(i,j) = p_i(\hat{j})\ \pi(j)}$$

où on a denoté par $p_i(\hat{j})$ la probabilité d'absorption dans la classe de récurrence de j (et par $\pi(j)$ la probabilité stationnaire de j dans sa classe).

Outrement dit, il y a deux probabilités a déterminer :

a) $p_i(\hat{j})$, de finir dans la classe de récurrence de j à partir de l'élement transitoire i, et

b) $\pi(j)$ la probabilité stationnaire que la chaîne soit observé dans l'état j j (où la fréquence du temps passé en j).

Pour cela, on utilisera la loi :

Lemma 4.3

$$\boxed{lim_{n\to\infty}P^n(i,j) = p_i(\hat{j})\ \pi(j)} \tag{13}$$

où on a denoté par $p_i(\hat{j})$ la probabilité d'absorption dans la classe de récurrence de j (et par $\pi(j)$ la probabilité stationnaire de j dans sa classe).

Cette loi "multiplicative" est assez claire intuitivement : elle reflète l'independance entre le comportement avant et après absorption, qui se verifie facilement [1].

Donc, le calcul des limites $lim_{n\to\infty}P^n(i,j)$ pour i transitoire et j récurrent demande le calcul des probabilités d'absorbtion $p_i(\hat{j})$ et l'application de la lemme 4.3.

[1] En conditionnant sur la position k d'arrivee dans la classe de récurrence $\hat{j}$ de j apres le temps T de transition de la partie transitoire, on trouve que :

$$lim_{n\to\infty}P^n(i,j) = \sum_{k\in\hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\}\ \ lim_{n\to\infty}P^n(k,j) \text{ (par propr. Markov)} \tag{14}$$

$$= \sum_{k\in\hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\}\ \pi(j) \text{(par ergodicité de la classe récurrente)} \tag{15}$$

$$= \pi(j) \sum_{k\in\hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\} = p_i(\hat{j})\ \pi(j) \tag{16}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 1-a-b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution : Aprés le rangement facilitant des elements dans l'ordre $1, 4, 6, 2, 3, 5$ la matrice de transition devienne :

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1-a-b & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

On aperçoit par la structure de matrice a "bloques" qu'on peut traiter les classes (2) et $(3, 5)$ separemment. Ici, l'absorption dans les classes récurrentes se fait toujours en partant de 1, et alors les probabilités d'absorption de 4 et 6 sont identiques aux celles de 1. En plus, l'absorption se fait avec les probabilités données a, b dans les classe récurrentes (2) et $(3, 5)$, respectivement.

Finalement, on trouve par (4.3)

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Le problem du calcul de $\boldsymbol{P}$ a été simplifié ci-dessu par la connaisance immediate des probabilités d'absorption $p_i(\hat{j})$ dans chaqune des classes recurente, ce qui donne imediatement les probabilités limites $\boldsymbol{P}(i, j) = p_i(\hat{j})\pi(j)$.

Nous résumons maintenant la conclusion sur le comportement limite des chaînes de Markov à espace d'états fini.

Théorème 4.3 *Pour une chaîne de Markov finie, la limite $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ existe ssi toutes les classes reccurentes sont apériodiques, ce qui arrive ssi la seule valeur propre de valeur absolue $|\lambda| = 1$ est $\lambda = 1$. Dans ce cas, la distribution limite sera $\lim_{n\to\infty} P^n = \mu(0)\boldsymbol{P}$, où $\boldsymbol{P}$ est calculée comme indiqué dans la lemme 4.3. Finalement, l'ensemble des points limites possible est l'ensemble convexe minimale engendré par les lignes de la matrice $\boldsymbol{P}$.*

En applications, il faudra calculer les probabilités d'absorption $p_i(\hat{j})$ separemment pour chaque classe, sauf une, en resolvant un système d'absorption correspondant, obtenu en

Exemple 4.9 *Calculer la matrice $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ pour l'exemple :*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & b & 0 & 1-b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution : Aprés le rangement facilitant des elements dans l'ordre $1, 4, 6, 2, 3, 5$ la matrice de transition devienne :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1-b \end{pmatrix}$$

Le système d'absorption est :

$$\begin{aligned} p_1(2) &= \frac{1}{3}p_4(2) + \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}0 \\ p_4(2) &= \frac{1}{2}p_4(2) + \frac{1}{2}1 \\ p_6(2) &= p_1(2) \end{aligned}$$

donne $p_1(2) = 3/5 = p_6(2)$ et $p_4(2) = 4/5$, et alors les probabilités complémentaires sont : $p_1(\hat{3}) = 2/5 = p_6(\hat{3})$ et $p_4(\hat{3}) = 1/5$ (les résultats auraient pu être devinés, en observant que l'absorption dans les classes récurrentes se fait seulement en partant de 1 et de 4, tandis que 6 a les meme probabilités d'abs. que 1. Posant $\tilde{a} = \frac{a}{a+b}, \tilde{b} = \frac{b}{a+b}$ on trouve finalement :

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\tilde{b} & \frac{2}{5}\tilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\tilde{b} & \frac{1}{5}\tilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\tilde{b} & \frac{2}{5}\tilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Conclusion : On voit que la connaissance de la structure du graphe de communication simplifie considerablement le problem du calcul de la limite $\boldsymbol{P}$.

4.7 *Le théorème de Perron-Frobenius

Exercice 4.2 *Est-ce que il existent des matrices 2×2 sans élements négatives avec valeurs propres complexes ?*

Théorème 4.4 *(Perron-Frobenius) Soit P une matrice finie sans élements négatives. Alors :*

1. *Il existe toujours une valeur propre* **réelle positive** *de module maximale $\lambda = \lambda_P$, qu'on apellera* **la valeur propre PF** *(de Perron-Frobenius) ; ainsi, toutes les autres valeurs propres ont valeur absolue moins ou égale à la valeur propre PF.*
2. *Les éspace des vecteurs propres a droite et a gauche de λ contiennent chacun un basis des vecteurs propres* **avec toutes les composants nonnégatives**
3. *La multiciplité algebrique de λ est egale a la dimension de son éspace des vecteurs propres (i.e. le bloque de Jordan correspondant a λ a une structure diagonale).*
4. *S'il y'a des autres valeurs propres egales à λ en valeur absolue, elles doivent être des racines de λ, i.e. de la forme $\lambda^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$.*

Exercice 4.3 *Démontrer qu'une matrice stochastique n'a pas des valeures propres avec module plus grand que* 1*, et donc sa valeur propre PF est* 1.

Rémarques : 1) Comme la valeur propre PF d'une matrice stochastique est 1, il suit que les espaces des vecteurs propres á droite et á gauche de 1 ont une structure speciale :

1. **Corollaire 4.2** *Une chaîne homogène a espace d'états* **fini** *a au moins une distribution stationnaire.*
2. La cardinalité des distribution stationnaires.

2) La théorie des chaînes de Markov finies/dénombrables peut être conçue comme une explication probabiliste du théorème de Perron-Frobenius, et aussi comme une extension au cas des matrices infinies (quand l'espace d'états est infini dénombrable).

On s'aperçoit que l'étude des questions de l'existence et unicité de distributions a la longue, ou, par (2), l'étude du comportement asymptotique de P^n, pourra etre abordé via un approche complètement algébrique (en utilisant la decomposition de Jordan, le théorème de Perron-Frobenius, et le fait que les chaînes de Jordan associées a des valeurs propres $\lambda^{(i)} < 1$ disparaissent dans la limite $n \to \infty$). La conclusion est :

Théorème 4.5 *1. La limite $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ existe ssi la matrice P n'a pas des valeurs propres avec $|\lambda| = 1$ sauf la valeur propre de Perron-Frobenius $\lambda = 1$.*

2. *La distribution stationnaire est unique ssi la valeur propre de Perron-Frobenius $\lambda = 1$ a multiplicité* 1.
3. *Une chaîne de Markov est ergodique ssi les deux conditions ci dessus sont verifiées.*

Pourtant, il convient d'adopter une autre démarche, qui donne des interpretation probabilistes et qu'on peut voir comme une démonstration probabiliste du théorème de Perron-Frobenius ci-dessus.

4.8 Exercices : TD 3

1. a) Une mouche saute au hasard sur les sommets d'un triangle. Donnez une formule explicite, aussi efficace que possible, pour la probabilité qu'après n étapes, la mouche est retournée du sommet dont elle est partie.

   b) Résolvez le même problème, au cas où la mouche a deux fois plus de chances à sauter dans le sens des aiguilles de la montre.

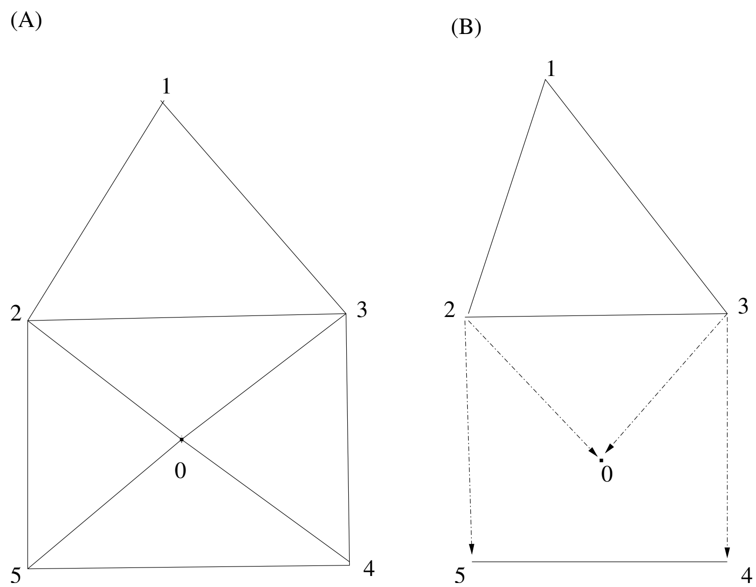
$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(a) Tracez le graphe de communication et identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrents et transitoires. Y' a-t-il des classes périodiques ?

(b) Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.

(c) Trouvez la limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition apres n étapes P^n

3. Considérez une particule effectuant une **marche aléatoire simple** $X_t,\ t = 0, 1, 2, ...$ sur le graphe (A) ci-dessous : i.e. à chaque moment $t = 1, 2, ...$, la particule se déplace vers l'un de ses voisins sur le graphe à sa position actuelle, avec la même probabilité pour chaque choix.



(a) Calculer :

i. L'ésperance en sortant de 1 du nombre de pas T_0 jusq'au noeud 0. *Indication :* Utiliser la symmetrie.

ii. L'ésperance en sortant de 0 du nombre de pas $\tilde{T}_0$ jusq'au premier retour en 0.

iii. Les probabilités stationnaires de chaque noeud. *Indication : On peut utiliser les èquations d'équilibre detaillé.*

iv. La probabilité $x_2 = \mathbb{P}_2\{X_T = 1\}$, où $T = \min[T_1, T_0]$.

v. Les probabilités p_k en partant de 1 que la marche visite 0 exactement k fois $(k = 0, 1, 2, ...)$ avant le premier retour en 1.

(b) À un moment donné, le passage sur certaines arrêts du graphe devient impossible, ou possible seulement dans une direction, comme indiqué par des flèches dans le graphe (B). Plus précisement, la particule continue de choisir des destinations suivant le graphe (A) ("aveuglement"), mais les choix qui ne sont plus disponibles résultent dans un pas annulé, donc sur place.

ii. Identifiez les classes de la chaîne, et classifiez les en récurrentes et transitoires. Y' a-t-il des classes périodiques ?

iii. Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.

iv. Est-ce que la limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition apres n étapes P^n existe ? Le cas écheant, trouvez-la.

4. **La marche paresseuse :** Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = \pm 1]$ =p/q et $P[Z_n = 0]$ =1- p-q, avec $0 < p+q < 1$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par $\mathbb{E}_x$ l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés.

   Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\}$, $f_x = \mathbb{E}_x X_T$, $t_x = \mathbb{E}_x T$, $c_x = E_x[\sum_0^T X(t)]$ et $w_x = \mathbb{E}_x a^T$.

   Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour a) p_x, b) f_x, c) t_x, d) c_x et e) w_x, quand $p = q < 1/2$.

Solutions :

1. a) L'équation de Chapman-Kolmogorov donne imédiatement une formule explicite : $P^n(1,1)$. On note aussi que les marches cycliques ont la matrice de transition P circulante, et donc une decomposition spectrale bien-connue explicite, qui utilise les racines (complexes) de l'unité. Mais, on peut faire mieux. La matrice P^n est aussi circulante, et contient donc seulement deux inconnues : $b_n = P^n(1,2), c_n = P^n(1,3)$. Soit $b = P(1,2), c = P(1,3), a = P(1,1) = 1-b-c$ les probabilités après un pas. On trouve la récurrence :

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} - 1/3 \\ c_{n+1} - 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & c-b \\ b-c & a-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n - 1/3 \\ c_n - 1/3 \end{pmatrix}$$

   Le cas $b = c = 1/2$ et $a = b = c = 1/3$ donnent des récurences "decouplées". Le cas $b = 2/3, c = 1/3$ est plus difficile. En utilisant l'ordinateur, on rémarque que :

$$(b_n - 1/3, c_n - 1/3) = (1/3, 1/3) + 3^{-1-n/2} v_n$$

   où $v_n = v_{n+12}$ est périodique.

2. (a) La matrice de transition est :

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

   Classes récurrentes : (0) et $(4,5)$. Classe transitoire, périodique : $(1,2,3)$.

   (b) Les distributions stationnaires des classes récurrentes sont (1) et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

   (c) La limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition apres n étapes P^n existe. Elle est :

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{c|ccc|cc} b_{1,0} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_{1,\hat{4}} & \frac{1}{2}b_{1,\hat{4}} \\ b_{2,0} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_{2,\hat{4}} & \frac{1}{2}b_{2,\hat{4}} \\ b_{3,0} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_{3,\hat{4}} & \frac{1}{2}b_{3,\hat{4}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

où $b_{2,0} = b_{3,0} = b_{1,0} = \frac{1}{2}$ (en résolvant le système d'absorption) et donc leurs complementaires sont aussi : $b_{1,\hat{4}} = \frac{1}{2} = b_{2,\hat{4}} = b_{3,\hat{4}}$

3. (a) i. Soit

$$t_i = \mathbb{E}_i\, T_0 = \mathbb{E}_i[\text{ nombre de pas jusq'au noeud } 0]$$

La symmetrie implique $t_2 = t_3, t_5 = t_4$, donc trois équations suffiront (au lieu de 5). En conditionnant sur le premier pas, on trouve que t_i satisfont :

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 + t_2 \\ t_2 &= 1 + \frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_2 + \frac{1}{4}t_5 \\ t_5 &= 1 + \frac{1}{3}t_5 + \frac{1}{3}t_2 \end{aligned}$$

Ça donne : $t_5 = \frac{11}{3}, t_2 = \frac{11}{3}, t_1 = \frac{16}{3}$

ii. $\mathbb{E}\tilde{T}_0 = 1 + \frac{1}{4}(t_2 + t_3 + t_4 + t_5) = 1 + \frac{12}{3} = 5$ $(= \frac{1}{\pi_0})$

iii. $\pi_i = \frac{v_i}{\sum_j v_j}$ donne $(2/(2 + 4 * 3 + 3 * 2) = \frac{1}{10}, 4/20 = \frac{1}{5}, \frac{3}{20})$ (en vérifiant ainsi le théorème $\mathbb{E}\tilde{T}_0 = \frac{1}{\pi_0}$).

iv. Le système d'absorption donne : $x_2 = \frac{2}{5}, x_5 = \frac{1}{5}$.

v. $p_k = (\frac{2}{5})^k \frac{3}{5}$.

(b) i. Après la réparation il n'y a qu'une classe recurrente, à distribution stationnaire

$$(2/(2 + 4 * 3 + 3 * 2) = \frac{1}{10}, 4/20 = \frac{1}{5}, \frac{3}{20})$$

(obtenues en utilisant les èquations d'équilibre detaillé).

ii. Soit

$$t_i = \mathbb{E}_i\, T_0 = \mathbb{E}_i[\text{ nombre de pas jusq'au noeud } 0]$$

La symmetrie implique $t_2 = t_3, t_5 = t_4$, donc trois équations suffiront (au lieu de 5). En conditionnant sur le premier pas, on trouve que t_i satisfont :

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 + t_2 \\ t_2 &= 1 + \frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_2 + \frac{1}{4}t_5 \\ t_5 &= 1 + \frac{1}{3}t_5 + \frac{1}{3}t_2 \end{aligned}$$

Ça donne : $t_5 = \frac{11}{3}, t_2 = \frac{13}{3}, t_1 = \frac{16}{3}$

iii.

$$\mathbb{E}\tilde{T}_0 = 1 + \frac{1}{4}(t_2 + t_3 + t_4 + t_5) = 1 + \frac{12}{3} = 5$$

(en vérifiant ainsi le théorème $\mathbb{E}\tilde{T}_0 = \frac{1}{\pi_0}$).

Les équations sont respectivement :

$$\begin{aligned}
(Gp)_x = 0, p_K = 1, p_0 = 0 \\
(Gf)_x = 0, f_K = K, f_0 = 0 \\
(Gt)_x + 1 = 0, t_K = 0, t_0 = 0 \\
(Gc)_x + x = 0, c_K = 0, c_0 = 0 \\
(Gw)_x = 0, w_K = 1, w_0 = 1
\end{aligned}$$

Ces sont exactement les mêmes equations comme pour une marche non-paresseuse, sauf que l'operateur est different.

(b) Dans le cas symmetrique, on obtient par exemple :

$$\begin{aligned}
2pp_x &= pp_{x+1} + pp_{x-1} \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \\
p_K &= 1, \quad p_0 = 00
\end{aligned}$$

et pour $t_x = E_x[T]$ (temps de sortie esperé) on trouve :

$$\begin{aligned}
t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + \frac{1}{2p} \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \\
t_K &= 0, \quad t_0 = 0
\end{aligned}$$

avec solution $t_x = \frac{x(K-x)}{2p}$.

Remarque : Le fait que les équations sont identiques pour ces deux marches (paresseuse et non-paresseuse) n'est pas une coincidence. En fait, il s'avère que les réponses obtenues sont les mêmes por n'importe quel processus Markovien homogène, si on defini l'operateur de la façon juste. Donc, la réponse pour toutes les problèmes concernant espérances va impliquer un seul opérateur G (seulement les conditions frontière et la partie non-homogène change d'un problème à l'autre)- en fait, la famille des processus aleatoires Markoviens est isomorphe à une famille d'opérateurs déterministes.

En plus, la structure des reponses en fonction de G est la même pour toutes les processus aleatoires Markoviens, malgré leur diversité; c'est un fait remarquable, qui démontre la puissance de ce concept.

5 Examens d'entraînement

5.1 Examen d'entraînement 1.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $\{1,2\}$, de distribution initiale $\boldsymbol{\mu}_0 = (p, 1-p)$ et de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$

   (a) Calculez $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2\}$, $\boldsymbol{\mu}_1(2) = \mathbb{P}\{X_1 = 2\}$ $\mathbb{P}\{X_0 = 2 | X_1 = 2\}$, et $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 1, X_4 = 2\}$.

   (b) Trouvez toutes les lois stationnaires $\boldsymbol{\pi}$ de la chaîne donnée (s'il y en a plus d'une seule). Spécifiez, en justifiant, si la limite $lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}_0 P^n$ existe pour la chaîne donnée. Si c'est le cas, quelles sont les limites $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{X_n = 2\}$, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{X_n = 2, X_{n+1} = 2\}$ et $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{X_n = 2 | X_{n+1} = 2\}$?

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}\, n^{-1} \sum_{i=1}^{n} h(X_i)$$

ou $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}$ denote l'espérance avec distribution initiale de X_0 egale à $\boldsymbol{\pi}$.

2. L'espace des états d'une chaîne est $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 & 0 & 1-a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

   (a) Tracez le graphe de communication et identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrentes et transitoires. Y' a-t-il des classes périodiques ?
   (b) Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.
   (c) Trouvez la limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition apres n étapes P^n

3. Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ une chaîne de Markov en temps continu sur l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$. Supposons que la matrice infinitésimale (de taux de transitions) de X est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

   (a) Donnez les probabilités de transition infinitesimales $\mathbb{P}_i\{X_{dt} = j\}$ de la chaîne, en sachant que l'état initial est $i = 2$. Quelles sont les probabilités de transition de la chaîne au moment du premier saut, en sachant que l'état initial est $i = 2$?
   (b) Quelle est la loi conditionelle de $U = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 2\}$, en sachant que $X_0 = 2$?
   (c) Posant $V = \inf\{t \geq U : X_t = 2\}$, calculez $\mathbb{E}[V|X_0 = 2]$
   (d) Trouvez la distribution stationnaire de ce processus.

4. Pour une **marche aléatoire** $X_t,\ t = 0, 1, 2, ...$ **sur le graphe cubique** ci-dessous, calculer :
   (a) L'ésperance en sortant de U du nombre de pas T_O jusq'au noeud O. *Indication :* Utiliser la symmetrie.
   (b) Les probabilités stationnaires du chaque noeud.
   (c) L'ésperance en sortant de O du nombre de pas $\tilde{T_O}$ jusq'au premier retour à O.
   (d) La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_T = U\}$, ou $T = \min[T_U, T_O]$.
   (e) La probabilité p_k en partant de O que la marche visite U exactement k fois ($k = 0, 1, 2, ...$) avant le premier retour à O. Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.

Solutions :

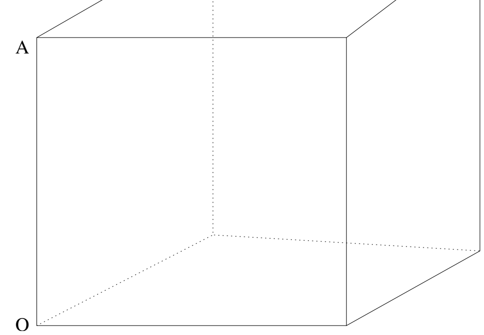


FIG. 5 – **Marche aléatoire simple**

1. (a)

$$(1-p)(1-b)$$
$$(1-p)(1-b)+p\,a$$
$$\frac{(1-p)(1-b)}{(1-p)(1-b)+p\,a}$$

   (b) Loi stationnaire : $(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$

$$\frac{a}{a+b}$$
$$\frac{a}{a+b}(1-b)$$
$$1-b$$

   (c)

$$\frac{b}{a+b}h(1)+\frac{a}{a+b}h(2)$$

2. (a) Classes récurrentes : (1) et $(6,7)$. Classe transitoire, nonpériodique : $(2,3,4,5)$.
   (b) Les distribution stationnaire des classes récurrentes sont (1) et $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
   (c) La limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition apres n étapes P^n est

$$P_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_{2,6} & \frac{2}{3}b_{2,6} \\ b_{3,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_{3,6} & \frac{2}{3}b_{3,6} \\ b_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_{2,6} & \frac{2}{3}b_{2,6} \\ b_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_{2,6} & \frac{2}{3}b_{2,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

   où $b_{2,1} = \frac{2a}{2-b}, b_{3,1} = \frac{a}{2-b}$ et $b_{2,6} = 1 - b_{2,1}, b_{3,6} = 1 - b_{3,1}$.

3. (b) Loi exponentielle a paramètre 4 (moyenne 1/4).
   (c) $\mathbb{E}V = 1/4 + 1/4x_1 + 3/4x_3$, où

$$x_1 = 1/5 + 4/5x_3$$
$$x_3 = 1/3 + 1/3x_1$$

   d'où : $x_1 = \frac{7}{11}, x_3 = \frac{6}{11}$ et $\mathbb{E}V = 1/4 + \frac{25}{44}$