

Un aperçu de la théorie du risque

Florin Avram

17 mars 2018

Table des matières

1	<u>Le modèle de Cramér-Lundberg</u>	5
1.1	Introduction	5
1.2	Temps de premier passage et probabilités de ruine	6
1.3	Severité de ruine	8
2	Premiers préréquis mathématiques	9
2.1	Processus de Poisson, processus de Poisson composé, processus de comptage,	9
2.2	Taux de profit	9
2.3	Le symbole/exposant de Lévy du processus de Cramér Lundberg, la densité d'équilibre	10
2.4	La formules de Pollaczek-Khinchine et ses conséquences essentiels pour la théorie de la ruine	11
2.5	TP1 : R et Sage	15
3	Outils mathématiques de base dans la théorie de la ruine	19
3.1	<u>Rappel du problème de la ruine du joueur</u>	19
3.2	<u>L'équation intégrro-différentielle pour la probabilité de ruine; une analyse infinitesimale de Laplace</u>	23
3.3	La resolution de l'EID pour sinistres exponentiels	24
3.4	La formule de Pollaczek-Khinchin pour la transformée de Laplace, à partir de l'EID	25
3.5	Inversion symbolique de la formule de Pollaczek-Khinchine pour exposants de Lévi rationnels	28
3.6	Martingales, coefficient d'ajustement et l'identité de Gerber	33
3.7	<u>Conditionnement sur le premier escalier en bas, l'équation de renouvellement et la formule de Pollaczek-Khinchine</u>	36
3.8	<u>La série de Dubordieu-Beekman</u>	38
4	Les lois de type phase continues et de type exponentielle de matrice	39
4.1	Aperçu historique	39
4.2	Processus de Markov avec un état absorbant	42

4.3	Sous-classes importantes des distributions exponentielle de matrice (*)	48
4.4	La positivité des combinaisons linéaires d'exponentielles	49
5	Le modèle de risque de Sparre-Andersen	53
5.1	L'équation de Lundberg généralisée pour le modèle de Sparre-Andersen	53
5.2	Le modèle de Sparre-Andersen avec sinistres exponentielles . . .	55
5.3	The ruin probability of Sparre-Andersen processes with phase type jumps and independent jump-arrivals	57
5.4	<u>La ruine quand les sinistres sont de type phase</u> : la formule d'Asmussen	58
6	Le processus de Cramér-Lundberg avec perturbation Brownienne	62
6.1	Approximations de type Padé pour les probabilités de ruine du processus de Cramér-Lundberg perturbé	65
7	<u>Probabilités de ruine en temps fini et sur un horizon exponentiel</u>	68
7.1	La formule de Pollaczek-Khinchine pour le processus de Cramér Lundberg tué	69
7.2	La ruine du processus Cramér Lundberg tué, avec des sinistres de type phase	71
8	Approximations pour les probabilités de ruine	72
8.1	<u>Inversion numérique de la transformée de Laplace</u>	72
8.2	<u>Sinistres discrètes : l'algorithme de Panjer</u>	73
8.3	Approximation de DeVyllder pour les probabilités de ruine du processus de Cramér-Lundberg	75
8.4	Approximations de type Padé pour les probabilités de ruine du processus de Cramér-Lundberg	77
8.5	Trois choix d'approximations rationnelles pour les probabilités de ruine	79
8.6	Approximating a ruin probability by using diatomic claims . . .	83
9	Examen d'entraînement	85
10	Processus de Lévy : marches aléatoires en temps continu	87
10.1	Définition, propriétés de linéarité et l'exposant de Lévy	87
10.2	Exemple : le processus de Poisson composé	89
11	Martingales	91
11.1	Le théorème d'arrêt des martingales	94
11.2	"La martingale interdite"	99

11.3	Comment justifier l'application du théorème d'arrêt des martingales ? Exemples	100
11.4	Comment démontrer qu'un temps d'arrêt T est fini p.s.	103
11.5	Exercices	105
11.6	Marches aléatoires "infinitesimales" et le mouvement Brownien	106
11.7	La décomposition de Lévy -Khinchine	108
12	Le modèle de Cramér-Lundberg	109
12.1	La probabilité de ruine pour les modèles de Cramér-Lundberg et Lévy	111
12.2	L'équation intégral-différentielle (*)	112
13	TP SAGE : Symbolique algebra and geometry experimentation	114
13.1	Algèbre linéaire	115
13.2	Un peu d'analyse	117
13.3	Programmation	123
13.4	@interact	124
13.5	Pourquoi utiliser des logiciels symboliques	126
13.6	Compléments d'algèbre	128
14	L'approximation rationnelle de Padé-Hermite	130
14.1	Continued Fractions	132
14.2	Another Way to See the Continued Fractions	133

Ce cours utilise, entre autres

1. les notes WEB de Manuel Morales
<http://www.dms.umontreal.ca/morales/risk.php>
2. les notes de Hélène Guérin
<https://perso.univ-rennes1.fr/helene.guerin/enseignement/NotesCoursACT3251.pdf>
3. Asmussen et Albrecher, Ruin theory
4. Actuariat avec R
https://cran.r-project.org/doc/contrib/Charpentier_Dutang_actuariat_avec_R.pdf
5. Modern Actuarial Risk Theory (MAT) de J. Dhaene, M. Denuit, R. Kaas, M. Goovaerts et Robert Klugman, S.A.
6. Loss Models de Panjer, H. H. et Willmot, G.E.

On étudiera surtout les modèles classiques de risque Poisson composé/Cramér-Lundberg et mouvement brownien. D'autres modèles plus généraux seront aussi considérés comme le modèle de Lévy, de Sparre Andersen, et les diffusions à sauts. On étudiera aussi diverses mesures du risque : probabilité de ruine, VAR (value at risk) et CTE (conditional tail expectation). Ce cours peut aider à la préparation des examens SOA.

Chapitre 1

Le modèle de Cramér-Lundberg

1.1 Introduction

Un exemple très important historiquement de processus de Lévy et de Markov est le processus de réserves (ou de risque) d'une compagnie d'assurance.

Définition 1.1. *Le processus de risque de Cramér-Lundberg est défini par*

$$X(t) = u + c t - S(t), \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i, \quad (1.1)$$

où C_i sont des variables aléatoires *i.i.d.* **nonnégatives**, et $N_\lambda(t)$ est un processus de Poisson indépendant de C_i .

La figure 1.1 montre une évolution de $X(t)$ dans le temps.

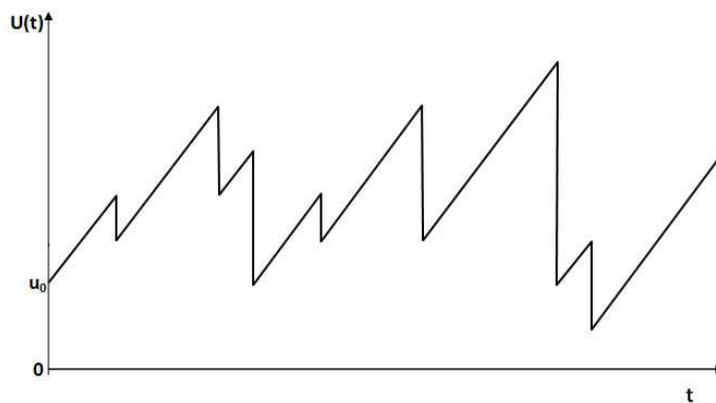


Figure 1.1 – Processus de Cramér-Lundberg

Le processus (3.19) modélise le capital d'une compagnie d'assurance en tenant compte des cotisations des assurés $c t$, du montant global $S(t)$ des

sinistres C_i à couvrir, et du capital initial de la compagnie $X(0) = u$. Si on permet des cotisations nonlinéaires $c(t, x)$ au lieu de $c(t, x) = c t$, on arrive à un processus $X(t) = c(t, x) - S(t)$ qui est une différence de deux sous processus : les cotisations des assurés et le processus des sinistres à couvrir.

Remarque 1.1. *Le processus (3.19) vit naturellement en temps continu. Mais, il peut aussi être considéré en temps discret, s'il est observé que pour $t \in \mathbb{N}$, et aussi avec un espace d'états discret, si μ est un entier, par exemple $\mu = 1$. En combinant les deux on arrive à*

$$X(t) = u + t - \sum_{i=1}^t C_i = u + \sum_{i=1}^t Z_i, \quad u, t \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

c.a.d. à une marche aléatoire avec $Z_i = 1 - C_i \in \{1, 0, -1, -2, \dots\}$.

Remarque 1.2. *Les processus qui sont continus (sans "sauts") vers le haut ou vers le bas – voir Figure 12– sont plus faciles à étudier. C'est pour cela qu'en actuariat, comme dans la théorie des files d'attente, on arrive souvent à trouver des formules exactes.*

Le modèle de Cramér-Lundberg est un cas particulier de processus de Lévy spectralement négatif, c.-à-d. sa mesure de Lévy est concentré sur $(-\infty, 0)$.

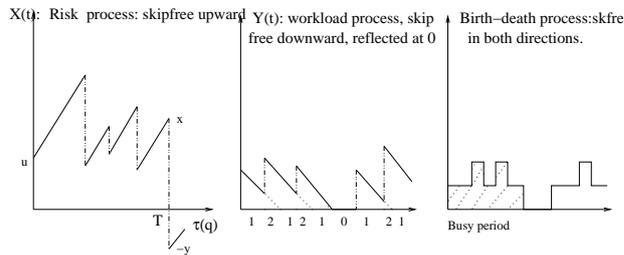


Figure 1.2 – Skip-free (spectrally one sided) processes

1.2 Temps de premier passage et probabilités de ruine

On s'intéressera aux temps

$$\tau_b^+ = \inf\{t \geq 0, X(t) \geq b\}, \quad \tau_b^- = \inf\{t \geq 0, X(t) \leq b\}$$

Le temps

$$\tau = \tau_0^- = \inf\{t \geq 0 : X(t) \leq 0\}$$

de premier passage du processus $X(t)$ en dessous de 0 est appelé temps de ruine.

Remarque 1.3. Si $X(t) > 0, \forall t \geq 0$ alors $\tau = \infty$.

On dénote la loi du temps de ruine conditionnée par $X(0) = u$ par

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0, X(t) < 0 | X(0) = u\} = \inf\{t \geq 0 | \mathcal{D}(t) \geq u\} = \tau_{\mathcal{D}}^+(u),$$

où $\mathcal{D}(t) = \sum_{i=1}^{N_{\lambda}(t)} C_i - ct = u - X(t)$ est le processus des déficits cumulés (pertes ajustées par les cotisations). C'est un processus de Lévy spectralement positif.

Nous sommes intéressés par :

- La probabilité de ruine sur un horizon fini c'est à dire avant un instant donné t , défini par

$$\Psi(t|u) = \mathbb{P}[\tau < t | X(0) = u] = \mathbb{P}[\overline{\mathcal{D}}(t) \geq u], \quad \overline{\mathcal{D}}(t) := \text{Max}_{\{0 \leq s \leq t\}} \mathcal{D}(s) \quad (1.3)$$

Alternativement, on peut étudier les probabilités de survie sur un horizon fini :

$$\overline{\Psi}(t|u) = \mathbb{P}[\tau \geq t | X(0) = u] = 1 - \Psi(t|u)$$

$$\overline{\Psi}(u) = \mathbb{P}[\tau = \infty | X(0) = u] = 1 - \Psi(u) \quad (1.4)$$

- La probabilité de ruine "éventuelle" (sur un horizon infini) définie par :

$$\Psi(u) = \mathbb{P}[\tau < \infty | X(0) = u] = P[\overline{\mathcal{D}} \geq u], \quad \text{où} \quad (1.5)$$

Définition 1.2.

$$\overline{\mathcal{D}} = \text{Max}_{\{0 \leq t \leq \infty\}} \left[\sum_{i=1}^{N_{\lambda}(t)} C_i - ct \right]$$

sera appelé le déficit maximal (aggregated loss).

Remarque 1.4. Cette variable est d'importance fondamentale dans la théorie de la ruine, car on a

$$\{\tau < \infty\} = \{\overline{\mathcal{D}} \geq u\}.$$

Corollaire 1.1. a) La probabilité de survie "perpétuelle" (à horizon infini) (12.5) et la probabilité de ruine éventuelle (12.4) représentent respectivement la fonction de répartition cumulative (c.d.f.) et la fonction de survie (c.c.d.f.) de la perte agrégée/déficit maximal $\overline{\mathcal{D}} = \sup_{0 \leq s < \infty} \mathcal{D}(s)$:

$$\overline{\Psi}(u) = P[\overline{\mathcal{D}} \leq u] = F_{\overline{\mathcal{D}}}(u), \quad \Psi(u) = P[\overline{\mathcal{D}} > u] = \overline{F}_{\overline{\mathcal{D}}}(u)$$

b) $\Psi(t|u)$ est une fonction de survie en u , et une fonction de répartition (c.d.f.) en t .

Remarque 1.5. La probabilité de ruine d'une compagnie d'assurance est importante, par exemple en tant que objectif à minimiser pour déterminer une bonne stratégie de réassurance.

1.3 Severité de ruine

Définition 1.3. *La variable $Y = X_\tau | \{\tau < \infty, X_0 = u\}$ est appelée severité de ruine.*

Remarque 1.6. *La probabilité de ruine est très simple au cas des sinistres exponentiels :*

$$\Psi(u) = \rho e^{-u \frac{1-\rho}{m_1}}, m_1 = E[C.], \rho = \frac{\lambda m_1}{c}.$$

La loi de la severité de ruine est aussi très simple dans ce cas : $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(C.), \forall u.$

Chapitre 2

Premiers préréquis mathématiques

2.1 Processus de Poisson, processus de Poisson composé, processus de comptage,

Remarque 2.1. *Le processus $S(t)$ représentant le montant global des sinistres est un cas particulier des processus de Poisson composé. Comme les sauts sont positifs, c'est aussi un cas particulier de subordonateur (c'est à dire de processus de Lévy non décroissant). Le processus Cramér Lundberg est un processus de Poisson composé avec increments $-C_i \leq 0$ et dérive.*

Exercice 2.1. *Calculer les fonction génératrice des moments des processus (1.2), et du processus de Poisson composé $S(t)$.*

Remarque 2.2. *Le processus $N_\lambda(t)$ de Poisson de taux λ est le choix le plus simple de processus de comptage. En le remplaçant avec un processus de comptage général avec espérance des temps entre deux arrivées de $\frac{1}{\lambda}$, on arrive au modèle de Sparre-Andersen. Dans les deux cas, on a $EN_\lambda(t) = \lambda t$.*

2.2 Taux de profit

L'espérance du processus $X(t) - X(0)$ est linéaire en t :

$$E[X(t) - X(0)] = E_0[X(t)] = c t - E[N(t)] \cdot E[C.] = (c - \lambda m_1)t := pt \quad (2.1)$$

Par la loi des grands nombres, si le taux de profit $p = c - ES(1)$ est négatif, alors la ruine de la compagnie est certaine. Le cas d'intérêt pratique est donc quand le taux de profit $p = c - ES(1)$ est positif, quand la probabilité de ruine de

la compagnie $\in (0, 1)$. La charge (coefficient) relative de sécurité est le rapport du profit est du risque, par unité de temps :

$$\theta = \frac{c - ES(1)}{ES(1)} = \frac{c - \lambda m_1}{\lambda m_1} = \frac{p}{\lambda m_1}.$$

Le taux des cotisations pourrait être décomposé de la manière suivante :

$$c = ES(1) + p = (1 + \theta) ES(1).$$

La valeur du coefficient relatif de sécurité est d'habitude un secret de chaque compagnie ; normalement, on peut le supposer plus grand que 10%.

2.3 Le symbole/exposant de Lévy du processus de Cramér Lundberg, la densité d'équilibre

Proposition 2.1. Soit $X(t)$ un processus de Lévy . Alors, on a

$$E_0 e^{sX(t)} = e^{t\kappa(s)} \quad (2.2)$$

pour tous les s tel que le côté gauche est fini. $\kappa(s)$ est appelé "exposant de Lévy /fonction génératrice de cumulants/symbole".

Exercice 2.2. a) Calculer le symbole (2.2) d'un processus de Cramér Lundberg, en fonction de la transformée de Laplace $\hat{f}(s) = E[e^{-sC_i}]$.

b) Montrer qu'il s'agit d'une fonction convexe (en effet $(-1)^n \kappa^{(n)}(s) \geq 0, n \geq 2$).

c) Démontrer les limites

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\kappa(s)}{s} = c, \quad \kappa'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\kappa(s)}{s} = p := c(1 - \rho), \rho = \frac{\lambda m_1}{c}.$$

d) Obtenez une représentation alternative de l'exposant de Laplace $\kappa(s)$, en fonction de la transformée de Laplace $\hat{F}_C(s) = \int_0^\infty e^{-sx} P[C_i > x] dx$ et de ρ , en utilisant l'intégration par parties.

Remarque 2.3. La transformée de Laplace $\hat{F}_C(s)$ est bien définie pour toutes les variables aléatoires, et satisfait la formule :

$$\hat{F}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} F(x) dx = \frac{1 - \hat{f}(s)}{s},$$

on trouve

$$\kappa(s) = cs(1 - \frac{\rho}{m_1} \hat{F}(s)) = cs(1 - \rho \hat{f}_e(s)). \quad (2.3)$$

Réponse: a) L'exposant de Lévy du processus de Cramér Lundberg X est facile à obtenir, à partir de celui du processus de Poisson composé $\lambda(\widehat{f}(-s) - 1) \implies$

$$\kappa_X(s) = cs + \lambda\left(\int_0^\infty e^{-sx} dF(x) - 1\right) := cs + \lambda(\widehat{f}(s) - 1). \quad (2.4)$$

§

d) En utilisant $\widehat{F}(s) = \frac{1-\widehat{f}(s)}{s}$, on trouve

$$\kappa(s) = cs\left(1 - \frac{\rho}{m_1}\widehat{F}(s)\right) = cs(1 - \rho f_e(s)), \quad (2.5)$$

où $m_1 = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx$, $\rho = \frac{\lambda m_1}{c}$, $f_e(x) := \frac{\overline{F}(x)}{m_1}$.

Exercice 2.3. Montrer que la fonction $f_e(x)$ est une densité (appelée densité d'équilibre). Calculer ses moments \widetilde{m}_i , et $f_e(0)$.

2.4 La formules de Pollaczek-Khinchine et ses conséquences essentiels pour la théorie de la ruine

1. Les transformées de Laplace des probabilité de survie et de ruine satisfont les formules de Pollaczek-Khinchine :

$$\widehat{\Psi}(s) = \int_0^\infty e^{-su} \overline{\Psi}(u) du = \frac{\kappa'(0)}{\kappa(s)}, \quad (2.6)$$

$$\widehat{\Psi}(s) = \int_0^\infty e^{-su} \Psi(u) du = \frac{1}{s} - \frac{\kappa'(0)}{\kappa(s)} = \rho \frac{(1 - \widehat{f}_e(s))/s}{1 - \rho f_e(s)} = \rho \frac{\widehat{F}_e(s)}{1 - \rho f_e(s)} \quad (2.7)$$

2. A partir des formules Pollaczek-Khinchine, on peut montrer que pour tous les sinistres admettant une moyenne on a

$$\Psi(0) = \frac{\lambda m_1}{c} := \rho = \frac{1}{1 + \theta}, \quad \Psi'(0) = -\frac{\rho(1 - \rho)}{m_1}. \quad (2.8)$$

Il est vrai pour tous les sinistres admettant deux moments que

$$\lambda_1 := E[L] = \int_0^\infty \Psi(u) du = \frac{m_2}{2m_1\theta} = \widetilde{m}_1 \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad (2.9)$$

$$\lambda_2 := E\left[\frac{L^2}{2}\right] = \int_0^\infty u\Psi(u) du = \frac{\widetilde{m}_2}{2\theta} - \lambda_1^2. \quad (2.10)$$

§. Une réécriture de cette formule

$$\kappa(s) = cs + \int_0^\infty (e^{-sz} - 1)\lambda f(z) dz = cs + \int_0^\infty (e^{-sz} - 1)\nu(dz)$$

est applicable en effet aussi pour les processus des Lévy avec mesure de Lévy $\nu(dz) = \lambda f(z) dz$ de masse infinie, pourvu que l'intégrale ci-dessus est bien-définie.

3. Approximations Padé :

- (a) approximation exponentielle $\Psi_{ex}(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left(-\frac{u\theta}{1+\theta}/m_1\right)$, satisfaisant $\Psi(0) = \rho$, $\Psi'(0) = -\frac{\rho(1-\rho)}{m_1}$.
- (b) l'approximation de **Renyi**, satisfaisant $\Psi(0) = \rho$, $\int_0^\infty \Psi(u)du = \lambda_1$, est donnée par :

$$\Psi_R(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left(-\frac{u\theta}{1+\theta}/\tilde{m}_1\right), \quad (2.11)$$

où $\tilde{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1}$ (cela suppose des sinistres ayant deux moments).

- (c) L'approximation de **De Vylder**, satisfaisant $\int_0^\infty \Psi(u)du = \lambda_1$, $\int_0^\infty u\Psi(u)du = \lambda_2$, est donnée par :

$$\Psi_{DV}(u) = \frac{1}{1+\tilde{\theta}} \exp(-uR_{DV}), \quad (2.12)$$

où $R_{DV} = \frac{\tilde{\theta}}{1+\tilde{\theta}}\mu$, $\mu = \frac{3m_2}{m_3}$, $\tilde{\theta} = \frac{2\rho m_3}{3\lambda m_2^2} = \frac{2m_1 m_3}{3m_2^2}\theta$. Cette approximation suppose des sinistres ayant trois moments.

- (d) Si l'équation de Cramér Lundberg $\kappa(s) = 0$ admet des solutions négatives, alors la plus grande solution négative $-R$ fournit l'approximation asymptotique **Cramér Lundberg**

$$\Psi(u) \sim C e^{-Ru}, \quad C = \frac{\kappa'(0)}{\kappa'(-R)}. \quad (2.13)$$

R est appelé coefficient d'ajustement.

Pour les sinistres i.i.d de loi exponentielle, cette approximation est exacte et peut-être aussi écrite comme

$$\Psi(u) = \Psi(0) \exp\left(-u\mu \frac{\theta}{1+\theta}\right) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left(-u\mu \frac{\theta}{1+\theta}\right) = \rho \exp(-u\mu(1-\rho)) \quad (2.14)$$

- (e) Une alternative de (2.13) est l'approximation de **Tijms** $\Psi_{ex}(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp(uR)$.
- (f) Si les sinistres ont une distribution exponentielle de matrice, the Cramér Lundberg equation has a finite number of roots I and the Cramér Lundberg asymptotic approximation may be replaced by the exact formula

$$\Psi(u) = \sum_{i=1}^I \frac{\kappa'(0)}{-\kappa'(-R_i)} e^{-R_i x}. \quad (2.15)$$

- (g) Il existe aussi une version exacte de (2.13), appelée approximation de **Gerber**, valable pour tous les sinistres admettant un coefficient d'ajustement :

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E_u[e^{-RX(\tau)} | \tau < \infty]}; \quad (2.16)$$

par contre le denominateur ci-dessus est inconnu, et doit être estimé par simulation.

Exercice 2.4. À partir de la formule Pollaczek-Khinchine, déduire :

a) la relation (2.8)

b) les relations (2.9), (2.10) (montrer que $\widehat{F}_e(0) = \widetilde{m}_1$, et que $\widehat{F}_e'(0) = \widetilde{m}_2$).

c*) la relation (2.13).

Exercice 2.5. a) Obtenir une approximation exponentielle pour une densité $f(x)$ d'une variable $X \in \mathbb{R}_+$, en utilisant $\int_0^\infty f(x)dx$ et $m_1 = \int_0^\infty xf(x)dx$.

b) Répéter, en utilisant approximation de Padé pour la transformée de Laplace.

Exercice 2.6. Répéter l'exercice antérieur pour une fonction de survie $\overline{F}(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, en utilisant $\int_0^\infty \overline{F}(x)dx$ et $\int_0^\infty x\overline{F}(x)dx$ (exprimer d'abord ces "moments" en fonction des moments de X).

Exercice 2.7. Répéter l'exercice (2.6), en incluant l'information $\overline{F}(0) = 1$ (vraie si X est une variable sans défaut).

Exercice 2.8. Calculer les approximations exponentielles, Renyi, De Vylder et Tijms dans le cas des sinistres a) exponentielles b) uniformes –voir figure 2.1 (avec $\rho = .84$). c) Gamma(α, β), d) Pareto-Lomax, avec fonction desurvie $\overline{F}(y) = \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{-\alpha}$, $y > 0$, $\alpha, \beta > 0$, et moyenne $m_1 = \frac{\beta}{\alpha-1}$, §.

Exercice 2.9. Dans le cas des sinistres Gamma($2, \mu$), tracer les approximations exponentielles, Renyi et De Vylder, ainsi que la solution exacte (voir l'Exercice (3.20)) :

$$\Psi(u) = \rho e^{-u\mu\rho/4} \left(\cosh \left(u\mu\sqrt{\rho(8+\rho)}/4 \right) + \frac{2+\rho}{\sqrt{\rho(8+\rho)}} \sinh \left(u\mu\sqrt{\rho(8+\rho)}/4 \right) \right).$$

§. The transformée de Laplace of the density is (?)

$$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x) = \alpha(\beta s)^\alpha e^{\beta s} \Gamma(-\alpha, \beta s) = 1 - (\beta s)^\alpha e^{\beta s} \Gamma(1-\alpha, \beta s),$$

where $\Gamma(\alpha, s) = \int_s^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ is the incomplete gamma function.

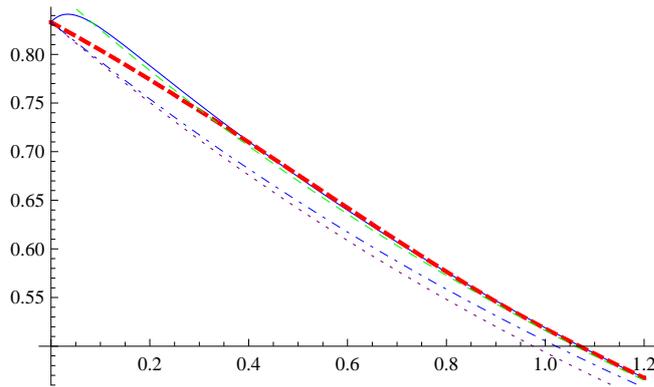


Figure 2.1 – Probabilités de ruine pour sinistres $U[0,1]$, $\rho = .84$. L’approximation Tijms deuxième ordre est excellente, avec erreur L_1 .005 sur $[0,100]$. De Vylder obtient .01, et Renyi .05.

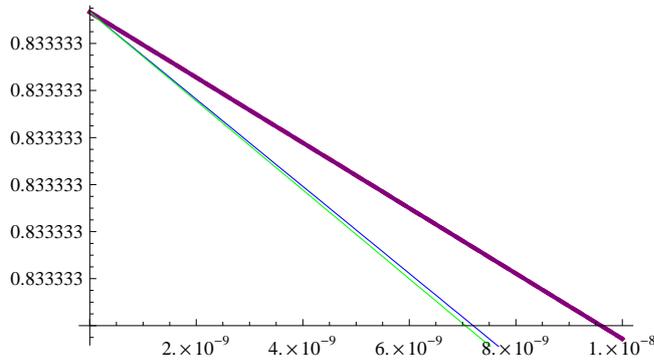


Figure 2.2 – Probabilités de ruine pour sinistres Erlang(2,2), $\rho = .84$ en gras pointillé, avec Tijms très proche dessous. L’approx. exponentielle en bas est la pire. De Vylder (pointillé) et Renyi sont très proches pour $u > 3$, et leur moyenne fait encore mieux pour $u < 3$.

Remarque 2.4. *Quelques lois usuelles de pertes : Pareto, gamma (transformée), beta (transformée), Burr, log-normale, log-gamma, (inverse) Weibull, inverse gaussienne.*

En conclusion, les probabilités de ruine peuvent-être calculées à partir de leur transformée de Laplace (2.7). Remarquons que l’inversion des transformées de Laplace est faisable avec une très grande précision et très vite avec l’aide de logiciels comme Mathematica, Maple, Sage, Matlab + extensions (Chebfun, etc) ... Par contre, sans l’accès a ces outils, ou avec des données insuffisantes, des approximations simples comme Renyi, De Vylder, etc peuvent suffire.

2.5 TP1 : R et Sage

(?, Exa 4.3.7) **Simulation des probas de ruine pour le processus Cramér Lundberg avec sinistres Γ .** The following R program counts how often ruin occurs in the first $n = 300$ claims of a simulated ruin process. This way we get an estimate of $\Psi_n(u)$, the probability of ruin at or before the n -th claim. The claims are $\Gamma(\alpha, \alpha)$ distributed with $\alpha = 2$. Because the claims are not very heavy-tailed, it is to be expected that if ruin occurs, it will occur early. This is because the surplus process will drift away from zero. So this program gives a good approximation for $\Psi(u)$:

```

u = 5; la = 1; m = 1; theta = 0.2;
c = (1+theta)*la*m; n = 300; alpha = 2; nSim = 100;
N = rep(Inf, nSim) ##Initialisation des indices de ruine
Y = rep(0, nSim) ##Initialisation des deficits de ruine
set.seed(2);
for (k in 1:nSim){
W = rexp(n)/la; T = cumsum(W)
X = rgamma(n, shape=alpha)/alpha ## sinistres de moyenne EC=1
S = cumsum(X); U = u + T*c - S
ruin = !all(U>=0) #ruine=non-survie
if (ruin) {N[k] = min(which(U<0));Y[k]=-U[N[k]];V=U}
}
#N sont les indices de ruine
Nf = N[N<Inf];#selecte les valeurs True
length(Nf); mean(Nf); sd(Nf); max(Nf);
## 34 31.2 22.5 119
Yf = Y[Y>0];mean(Yf)
x11()
par(bg='lightblue') #plot background color
plot(V,type='l',main='probabilit\`e de ruine', col='white',lwd=3, xlab='temps')#pl
abline(h=0,col='red',lty=2,lwd=3)

```

Les 34 ruines $N[N < Inf]$ arrive aux temps 31.2 ± 22.5 , avec un maximum de 119, donc $n = 300$ sinistres suffisent pour bien approximer $\Psi(u) \sim \Psi_n(u)$. Hence a good estimate of the ultimate ruin probability is $\Psi(u) \sim 34/100$.

Exercice 2.10. a) Augmenter le nb. des simulations a 10000.

b) Calculer $\Psi(u)$ en utilisant les approximations de Renyi et de Vylder (les moments sont $m_1 = \frac{\alpha}{\mu}$, $m_2 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{\mu^2}$, $m_3 = \frac{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)}{\mu^3}$).

c) Calculer le coefficient d'ajustement R et l' approximation de Cramér Lundberg

d) Calculer la valeur exacte $\Psi(u)$ en utilisant Actuar.

e) Calculer la valeur exacte par l'Exercice (3.20), où on montre que la probabilité de ruine avec des sinistres de loi Erlang(2,μ) est

$$\Psi(u) = \rho e^{-u\mu(1-\rho/4)} \left(\cosh \left(u\mu\sqrt{\rho(8+\rho)}/4 \right) + \frac{2+\rho}{\sqrt{\rho(8+\rho)}} \sinh \left(u\mu\sqrt{\rho(8+\rho)}/4 \right) \right) \quad (2.17)$$

R : a) $\Psi(u) \sim 0.2796$. c) Cramér Lundberg donne $\Psi(u) \sim Ce^{-Ru} = .0715$.
d) La probabilité de ruine exacte est .07386.

Exercice 2.11. *Simuler et estimer, pour des sinistres exponentielles, à partir de $u = 0$: a) l'espérance et la loi du déficit de ruine ; b) l'espérance du temps de ruine.*

Simulation des probas de ruine pour le processus Cramér Lundberg avec sinistres exponentielles.

```

u = 2; la = 1; m = 7; theta = 0.1;
c = (1+theta)*la*m; n = 10000; nSim = 100;
N = rep(Inf, nSim) ##Initialisation des indices de ruine
Y = rep(0, nSim) ##Initialisation des deficits de ruine
set.seed(2);
for (k in 1:nSim){
W = rexp(n)/la; T = cumsum(W)
X = rexp(n) *m ## sinistres de moyenne 3
S = cumsum(X); U = u + T*c - S
ruin = !all(U>=0) #ruine=non-survie
if (ruin) {N[k] = min(which(U<0));Y[k]=-U[N[k]];V=U}
}
#N sont les indices de ruine
Nf = N[N<Inf];#selecte les valeurs True
length(Nf); mean(Nf); sd(Nf); max(Nf);
## 34 31.2 22.5 119
Yf = Y[Y>0];mean(Yf)

```

Exercice 2.12. *Repete les deux dernières exos pour des sinistres Pareto avec la même moyenne et variance. Est-ce que la ruine arrive aussi vite ?*

Exercice 2.13. *Example 4.6.1 (MAT). $\lambda = 1, p(1) = p(2) = 1, c = (1 + \theta)m_1 = 1.8$. Find the adjustment coefficient R for the total claims S .*

Using R's numerical routine uniroot for one-dimensional root (zero) finding, we find the adjustment coefficient

```

f <- fonction (r) exp(r)/2 + exp(2*r)/2 - 1 - 1.8*r
R <- uniroot(f, low=0.00001, up=1)$root ## 0.2105433

```

The first parameter of `uniroot` is the function `f` of which the zero `R` is sought. The lower and upper parameter give an interval in which the root of the equation $f(R)=0$ is known to lie; the signs of the function `f` must be opposite at both ends of that interval. Note that the function is computed at both endpoints first, so the upper bound must be chosen with some care in this case. Of course one can use the upper bound $R \leq 2\theta m_1/m_2$ see Exercise 4.3.2.

Voir aussi **R Package Actuar**

```
vignette("risk", package = "actuar", lib.loc = NULL, all = TRUE)
demo("risk", package = "actuar")
```

Pour calculer des probas de ruine exactes, en inversant la transformée de Laplace, on a besoin des logiciels symboliques comme Maple, Sage, etc.

1. Sage utilise `=` pour les affectations. Il utilise `==`, `<=`, `>=`, `<`, `>` pour les comparaisons.

2. L'exécution des commandes se fait avec `shift-enter` *sage* : `sin(pi/3)`. Comme le montre cet exemple, certaines expressions mathématiques renvoient des valeurs 'exactes' plutôt que des approximations numériques. Pour obtenir une approximation numérique, on utilise au choix la fonction `n` ou la méthode `n` (chacun de ces noms possède le nom plus long `numerical_approx`, qu'on peut apprendre en tapant `n-Tab`). L'abréviation `N` est identique à `n`. Cette commande accepte, en argument optionnel `prec` (par défaut), qui indique le nombre de (bits?) de précision requis; par défaut, il y a 53 bits de précision (approx. 15 chiffres). On peut aussi spécifier les `digits`, qui indique le nombre de décimales demandées.

```
sage : exp(2) e^2 sage : n(exp(2)) 7.38905609893065 sage : sqrt(pi).numerical_approx()
1.77245385090552 sage : sin(10).n(digits=5) -0.54402 sage : N(sin(10),digits=10)
-0.5440211109 sage : numerical_approx(pi, prec=10)
```

3. Obtenir de l'aide : `sage : ?sudoku`

```
EXAMPLE : sage : A = matrix(ZZ,9,[5,0,0, 0,8,0, 0,4,9, 0,0,0, 5,0,0, 0,3,0,
0,6,7, 3,0,0, 0,0,1, 1,5,0, 0,0,0, 0,0,0, 0,0,0, 2,0,8, 0,0,0, 0,0,0, 0,1,8,
7,0,0, 0,0,4, 1,5,0, 0,3,0, 0,0,2, 0,0,0, 4,9,0, 0,5,0, 0,0,3])
sage : sudoku(A)
```

4. Les définitions de fonctions en Sage sont introduites par la commande `def`, et la liste des noms des paramètres est suivie de deux points, comme dans :

```
sage : def iseven(n) : return n%2 == 0
```

Voir les tutoriels SAGE, les démos et l'aide pour les concepts de base : listes, dictionnaires, programmation, fonctions,

5. Pourquoi utiliser des logiciels symboliques (c'est sûr que Scilab/Matlab sont plus facile à maîtriser, et plus transparents dans leur fonctionnement)? C'est parce qu'ils peuvent répondre vite à certaines de nos questions. Essayez les questions suggérées, et/ou proposez d'autres :

(a) $\text{int}(1/\text{sqrt}(x^2 + 2 * x - 1), x)$

(b) $\text{int}(1/\text{sqrt}(x^3 + 2 * x - 1), x)$

(c) $\text{int}(1/\text{sqrt}(x^4 + 2 * x - 1), x)$

Les réponses à ces deux dernières questions sont un peu bizarres ; maxima et mathematica sont plus claires : ils répètent la question quand ils ne peuvent pas répondre.

(d) $\text{desolve}(y'' + y' + y=0)$ donne encore une fois une réponse un peu bizarre

(e) $\text{desolve}(x * y' + y=0, y)$

(f) $\text{desolve}(y'' + x * y' + y=0, y)$ ne réussit pas ; pendant que maxima y arrive avec : $'\text{diff}(y,x,2) + x * '\text{diff}(y,x) + y ; \text{ode2}(a,y,x) ;$

(g) $\text{desolve}(x * y'' + y' + y=0, y)$ ne réussit pas ; cette fois maxima, a : $x * '\text{diff}(y,x,2) + '\text{diff}(y,x) + y ; \text{ode2}(a,y,x) ;$ ne réussit non plus, pendant que mathematica y arrive...

6. Le comportement transient et asymptotique d'une marche cyclique, (ou les puissances des matrices circulantes) :

$$A := \text{matrix}(3,3,[[1-b-c,b,c],[c,1-c-b,b],[b,c,1-c-b]])$$

$$\text{simplify}(A^3)$$

$$\text{limit}(A^n, n, +\text{infinity}) // \text{Trop dur pour xcas... et aussi pour Maxima}$$

Exercice 2.14. Traduire en Sage le programme de (? , Exa 4.3.7).

Chapitre 3

Outils mathématiques de base dans la théorie de la ruine

3.1 Rappel du problème de la ruine du joueur

Exercice 3.1. La ruine du joueur spectralement négatif : quelles chances de gagner et au bout de combien de temps ?

Soient X_1, X_2, \dots des v.a. i.i.d. avec

$$P(X = 1) = p_1, P(X = -k) = p_{-k}, \forall k \geq 1, \quad p_1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{-k} = 1.$$

Supposons que x et b sont deux entiers avec $0 \leq x \leq b$. On définit

$$S_n := x + X_1 + \dots + X_n, \quad T := \inf\{n, S_n \leq 0 \text{ ou } S_n = b\}.$$

La fortune initiale du joueur de pile ou face est représentée par x et il compte s'arrêter s'il a atteint b ou 0.

Donner une récurrence pour la **probabilité de gagner** $\phi(x) = P_x[X_T = b]$. En supposant $\phi(1)$ connue, donner $\phi(2)$.

Remarque 3.1. La relation de récurrence peut-être remplacée par une équation algébrique pour la fonction génératrice des probas. En fait, on a (? , Eq. (3.5))

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(z) &:= \sum_{x=0}^{\infty} z^x \bar{\Psi}(x) = \lim_{v \uparrow 1} (1-v) \tilde{\Psi}_v(z) = \frac{(1 - E[C_1]) \vee 0}{\tilde{p}(z) - z}, \quad z \in (0, 1) \quad (3.1) \\ \tilde{\Psi}(z) &:= \sum_{x=0}^{\infty} z^x \Psi(x) = \frac{1}{1-z} - \frac{(1 - E[C_1]) \vee 0}{\tilde{p}(z) - z}, \quad z \in (0, 1), \quad (3.2) \end{aligned}$$

qui sont similaires aux formules Pollaczek-Khinchine du modèle Cramér-Lundberg. On a aussi (? , 2.14)

$$\bar{\Psi}(0) = \lim_{z \downarrow 0} \tilde{\Psi}(z) = \frac{(1 - EC_1) \vee 0}{p_0}.$$

Dans cette section par contre, nous nous intéressons au cas simples, où on peut calculer explicitement la probabilité de ruine.

Exercice 3.2. La ruine du joueur sans dépassements ("skip-free"), dans les deux sens. Reprenons l'exercice 3.1 en supposant $P(X = 1) = p, P(X = -1) = q = 1 - p$ et $0 < p < 1$. C'est le cas classique, où la récurrence est d'ordre 2.

1. Résoudre la récurrence.
2. Pour quel valeur de p est S_n une martingale ? En supposant cette valeur, quelle sont $\phi(x)$ et l'espérance $t(x) = E_x T$ du temps du jeu ?
3. Calculer $\Psi(x) = \mathbb{P}(S_T = 0)$ et $t(x) = E(T)$ pour $p \in (0, 1)$, par le théorème d'arrêt des martingales appliqué aux martingales $M_n = r^{S_n}$ et $N_n = S_n - nm$, avec des valeurs de r, m choisies tel que ce sont des martingales, et en supposant que le théorème d'arrêt est applicable

R : 3. M_n est un produit de v. a. indépendantes, positives et de moyenne 1 ssi : $E[r^{Z_i}] = pr + qr^{-1} = 1$. Les racines sont $r = 1$ et $r = \frac{q}{p}$. N_n est une somme de v.a. aléatoires indépendantes sommables de moyenne nulle ssi $m = p - q$.

Le théorème d'arrêt donne : $\Psi(x) = \frac{1-r^x}{1-r^b}, t(x) = \frac{x-Kp_x}{q-p}$ ■

Dans les exercices suivantes on considèrera le cas $b = \infty$. Les reponses sont plus simples dans ce cas, car une seule des deux martingales intervienne, mais la justification de l'applicabilité du théorème d'arrêt est moins évidente.

Exercice 3.3. Calculer, en utilisant le théorème d'arrêt des martingales, les probabilités de ruine sur $[0, \infty)$ pour une marche avec $\{p_2 = \frac{3}{8}, p_1 = \frac{1}{8}, p_{-1} = \frac{1}{2}\}$

Sol : $\vec{\mathbb{E}}Z_1 > 0$ et la loi des grandes nombres implique $\mathbb{P}[T = \infty] > 0$ et donc aucun des cas du théorème d'arrêt ne s'applique pas quand $b = \infty$, car le théorème d'arrêt ne permet pas des temps d'arrêt tq. $\mathbb{P}[T = \infty] > 0!$

Domage, car on trouve facilement une martingale de Wald $M_t = r^{X(t)}$ satisfaisant $\lim[M_t | X(t) \rightarrow \infty] = 0$, en resolvant l'équation d'équilibre

$$\tilde{p}(r) := E[r^{Z_i}] = \sum_i p_i r^i = 1, r \in (0, 1).$$

Par une "application optimiste" du théorème d'arrêt a cette martingale, on trouve une réponse raisonnable $\Psi(x) = r^x$, avec une interprétation claire,

$$r = \mathbb{P}_x[T_{x-1} < \infty].$$

Heureusement, pour une "application correcte", il suffit de remplacer T par le temps d'arrêt borné $T_N = \min(T, N)$, avec $N \rightarrow \infty$. On trouve

$$r^x = \vec{\mathbb{E}}r^{X_{T_N}} = r^{X_N} \mathbb{P}_x[T > N] + r^0 \mathbb{P}_x[T \leq N] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x[T < \infty] = \Psi(x) \quad (3.3)$$

(le premier terme converge vers 0, car $\mathbb{P}[X_N \rightarrow \infty] = 1$).

Exercice 3.4. Calculer la probabilité de ruine $\Psi_x, x \in \mathbb{N}$, pour une marche sur les nombres naturels, avec la distribution de chaque pas donné par : $\left\{p_{-1} = \frac{8}{10}, p_1 = \frac{1}{10}, p_2 = \frac{1}{10}\right\}$.

Exercice 3.5. Soit

$$X_n = x + \sum_{i=1}^n Z_i, \quad Z_i = \begin{cases} 1, & \text{avec probabilité } p_1 = \frac{8}{10} \\ -1, & p_{-1} = \frac{1}{10}, \\ -2, & p_{-2} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

avec Z_i i.i.d. Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \leq 0\}$

1. $E[Z_1] > 0$?
2. Calculer par conditionnement les probabilités de ruine $\Psi(x) = P_x[T_0 < \infty], x \in \mathbb{N}$, pour cette marche. Montrer qu'elles sont positives.
3. Refaire 2., en utilisant le théorème d'arrêt des martingales.
4. Montrer que 1 est toujours une racine de l'équation d'équilibre, et simplifier cette équation par $r - 1$.
5. Calculer

$$\bar{\Psi}(x) = P_x[\tau_b < \tau_0].$$

6. (*) Calculer la fonction génératrice des probabilités de ruine.

Solution

1. $E(Z_1) = 1 \cdot \frac{8}{10} + (-1) \cdot \frac{1}{10} + (-2) \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2} > 0$
2. Voilà une solution directe, par conditionnement sur le premier pas :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= P_x[T_0 < \infty] = \sum_{i=-2}^1 P[Z_1 = i] \cdot P_x[T_0 < \infty | x + Z_1 = x + i] \\ &= \sum_{i=-2}^1 P[Z_1 = i] \cdot P_{x+i}[T_0 < \infty] = \sum_{i=-2}^1 p_i \cdot \Psi(x + i) \\ &= \frac{8}{10} \cdot \Psi(x + 1) + \frac{1}{10} \cdot \Psi(x - 1) + \frac{1}{10} \cdot \Psi(x - 2), \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

Les CF sont :

$$\begin{cases} \Psi(\infty) &= 0 \\ \Psi(0) &= 1 \\ \Psi(-1) &= 1. \end{cases}$$

(il est aussi vrai que $\Psi(-2) = 1, \dots$ mais -2 ne peut pas être visité à partir de l'espace d'états $\{1, 2, \dots\}$). On cherche $\Psi(x) = r^x$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } r^x &= \frac{8}{10} \cdot r^{x+1} + \frac{1}{10} \cdot r^{x-1} + \frac{1}{10} \cdot r^{x-2} \\
\Rightarrow r^2 &= \frac{8}{10} \cdot r^3 + \frac{1}{10} \cdot r + \frac{1}{10} \\
\Rightarrow (r-1)(2r-1)(4r+1) &= 0 \\
\Rightarrow \Psi(x) &= A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^x + A_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^x
\end{aligned}$$

$\Psi(0) = \Psi(-1) = 1$ sont satisfaites ssi $A_1 = \frac{5}{6}, A_2 = \frac{1}{6}$. Les probabilités de ruine sont :

$$\Psi(x) = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^x$$

3. On decompose $\Psi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x), \phi_i(x) = \mathbb{P}_x[T < \infty, X_T = -i], i = 0, 1$. On applique le théorème d'arrêt appliqué aux deux martingales arrêtées de Wald $M_t = r_i^{X(t)}, i \in \{1, 2\}$ (comme en (11.2)). Les équations d'équilibre $\tilde{p}(r_i) = 0, i \in \{1, 2\}$ où $\tilde{p}(\rho) = \tilde{p}_Z(\rho)$ est la fonction génératrice des probabilités impliquent les équations d'arrêt $r_i^x = \sum_{j=0}^1 \phi_j(x) r_i^{-j}, r_i, i \in \{1, 2\}, x \geq 1$.

On résout le système de type Vandermonde

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} r_1^x \\ r_2^x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & r_1^{-1} \\ 1 & r_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \end{pmatrix} = (r_2^{-1} - r_1^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} r_2^{-1} & -r_1^{-1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^x \\ r_2^x \end{pmatrix} \\
\implies \begin{pmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{r_1^{x+1} - r_2^{x+1}}{r_1 r_2^{x+1} - r_2 r_1^{x+1}} \\ \frac{r_1^{-x} - r_2^{-x}}{r_1 r_2^{x+1} - r_2 r_1^{x+1}} \end{pmatrix} \implies \Psi(x) = r_1^{x+1} \frac{1 - r_2}{r_1 - r_2} + r_2^{x+1} \frac{r_1 - 1}{r_1 - r_2}
\end{aligned}$$

et avec $r_1 = 1/2, r_2 = -1/4$, on retrouve les probabilités de ruine.

4. l'équation d'équilibre simplifié est $p_1 r^2 - (p_{-1} + p_{-2})r - p_{-2} = 0$

Remarque 3.2. Les équations d'arrêt pour $x = 1$ (analogues aux équations d'équilibre) donnent

$$\begin{cases} r_1 = \phi_0(1) + \phi_1(1)r_1^{-1} \\ r_2 = \phi_0(1) + \phi_1(1)r_2^{-1} \end{cases}$$

Les quantités

$$\begin{pmatrix} \phi_0(1) \\ \phi_1(1) \end{pmatrix} = (r_2^{-1} - r_1^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} r_2^{-1} & -r_1^{-1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 \\ -r_1 r_2 \end{pmatrix}$$

et leur somme $\Psi(1) = \phi_0(1) + \phi_1(1) = r_1 + r_2 - r_1 r_2 = \frac{E[Z_1; Z_1 < 0]}{P[Z_1 = 1]}$ peuvent être obtenues directement, car elles sont proportionnelles aux probabilités des queues : $\{P[Z_1 \leq -1], P[Z_1 \leq -2]\} !!!$

$$5. \tilde{\Psi}(z) = \frac{z^2+7z-8}{10z(1-\phi_Z(z))}$$

L'inégalité de Lundberg : Remarquer que la première égalité implique :

$$r_1^x = \phi_0(x) + \phi_1(x)r_1^{-1} > \phi_0(x) + \phi_1(x) = \Psi(x) \quad (3.4)$$

Cette inégalité est toujours vraie quand l'équation d'équilibre admet une solution $\rho \in (0, 1)$ (une telle solution est unique).

3.2 L'équation intégrro-différentielle pour la probabilité de ruine ; une analyse infinitésimale de Laplace

Exercice 3.6. *Let $N(t)$ be a Poisson process with parameter λ , let $p_n(t) = Pr[N(t) = n]$ and $p_{-1}(t) = 0$. Show that $p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, and interpret the formula $p_n(t + dt) = p_n(t) + dt p'_n(t) = (1 - \lambda dt)p_n(t) + \lambda dt p_{n-1}(t)$.*

Nous allons obtenir maintenant des équations intégrro-différentielles (EID) pour les probabilités de ruine $\Psi(u)$ et de survie $\bar{\Psi}(u) = 1 - \Psi(u)$ par la méthode de conditionnement après un temps infinitésimal. Les EID fournissent facilement les transformées de Laplace de PK, et aussi, par intégration, les équations de renouvellement du chapitre 3.7 (une approche alternative est fournie par le chemin inverse : obtenir d'abord les équations de renouvellement, et obtenir les EID par différentiation).

Les EID font intervenir un opérateur très important (qui est en effet le "générateur du semigroupe" correspondant au processus markovien de Cramér Lundberg) :

$$\mathcal{G} g(x) = c \frac{\partial}{\partial x} g(x) + \lambda \int_0^\infty g(x-z) F_C(dz) - \lambda g(x).$$

Proposition 3.1. *Les probabilités de ruine et survie sont, respectivement, des solutions de :*

$$\mathcal{G} \Psi(x) = 0, \quad \Psi(x) = 1, \text{ si } x < 0, \quad \Psi(\infty) = 0 \quad (3.5)$$

$$\mathcal{G} \bar{\Psi}(x) = 0, \quad \bar{\Psi}(x) = 0, \text{ si } x < 0, \quad \bar{\Psi}(\infty) = 1 \quad (3.6)$$

Une forme alternative de la première équation est

$$\tilde{\mathcal{G}} \Psi(x) + \lambda \bar{F}_C(x) = 0, \quad \Psi(x) = 1, \text{ si } x < 0, \quad \Psi(\infty) = 0, \quad (3.7)$$

où $\tilde{\mathcal{G}} h(x) = ch'(x) + \lambda \int_0^x h(x-z) f(z) dz - \lambda h(x)$.

Exercice 3.7. a) Obtenez l'équation intégral-différentielle (12.9) pour les probabilités de ruine $\Psi(u)$, en conditionnant après un temps infinitesimal.

b)(* Reobtenez cette équation, en conditionnant sur le premier saut.

Sol : Les deux méthodes de conditionnement, après un temps infinitesimal[§], et après le premier saut, donnent respectivement :

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= (1 - \lambda dt)\Psi(x + cdt) + \lambda dt \int_0^\infty \Psi(x - z)F_C(dz) \\ &\iff c\Psi'(x) - \lambda\Psi(x) + \lambda dt \int_0^x \Psi(x - z)F_C(dz) + \lambda\bar{F}_C(x)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(x + ct - z)\lambda e^{-\lambda t} F_C(dz) dt \\ &= \lambda \int_0^\infty \left(\int_0^{x+ct} \Psi(x + ct - z)F_C(dz) + \bar{F}_C(x + ct) \right) e^{-\lambda t} dt\end{aligned}$$

3.3 La résolution de l'EID pour sinistres exponentiels

Dans le cas des sinistres exponentielles d'intensité μ , la probabilité de ruine éventuelle $\Psi(u)$ satisfait

$$c\Psi'(x) + \lambda \left(\int_0^x \Psi(x - z)\mu e^{-\mu z} dz + e^{-\mu x} - \Psi(x) \right) = 0, \quad \Psi(\infty) = 0 \quad (3.8)$$

La solution est :

$$\Psi(x) = \rho e^{-\gamma x} = \frac{1}{1 + \theta} e^{-\frac{\theta}{1+\theta}\mu x}, \quad \rho = -\frac{\kappa'(0)}{\kappa'(-\gamma)} = \frac{\lambda}{\mu c} < 1, \quad \theta = \rho^{-1} - 1, \quad (3.9)$$

où $\gamma = \mu - \lambda/c > 0$ et $-\gamma$ est l'unique racine négative de l'équation Cramér Lundberg (3.19) $\kappa(s) = 0$, où $\kappa(s) = \log(E_0 e^{sX(1)}) = cs - \lambda s/(\mu + s)$ est le symbole du processus $X(t)$ avec sinistres exponentielles. Finalement, la transformée de Laplace est

$$\hat{\Psi}(q|u) := E_u(e^{-q\tau}) = \rho(q)e^{-\gamma(q)u} = \left(1 - \frac{\gamma q}{\mu}\right) e^{-\gamma q u}, \quad (3.10)$$

§. When Napoleon became 1st consul in 1799, Laplace was appointed Minister of the Interior, a post he managed to keep for only six weeks. Apparently, although Napoleon was very fond of his scientific abilities, these very abilities weren't particularly helpful in politics. In fact, according to Rouse Ball, Napoleon wrote dismissively about Laplace's effort in his memoirs. "Laplace did not consider any question from the right angle : he sought subtleties everywhere, only conceived problems, and finally carried the spirit of "infinitesimals" into the administration. " (346)-<http://hiddenabacus.com/2011/06/the-spirit-of-infinitesimals-laplace-and-napoleon/>

où $-\gamma = -\gamma_q$ est la solution negative de

$$\hat{a}(q + c\gamma)\hat{p}(-\gamma) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + q + c\gamma}\right) \left(\frac{\mu}{\mu - \gamma}\right) = 1 \quad (3.11)$$

Exercice 3.8. *Obtenir la formule (3.9) en appliquant la transformée de Laplace à l'EID (3.8).*

R : Appliquant la transformée de Laplace à l'EID (3.8) donne :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(s) &= \int_0^\infty e^{-su}\Psi(u)du = \frac{c\Psi(0) - \lambda\frac{1}{s+\mu}}{s(c - \frac{\lambda}{s+\mu})} = \frac{s\Psi(0) + \Psi(0)\mu - \lambda/c}{s(s + \mu - \lambda/c)} \\ &= \frac{A}{s + \mu - \lambda/c} + \frac{B}{s} \Leftrightarrow \Psi(x) = Ae^{-x(\mu - \lambda/c)} + B \end{aligned}$$

Pour obtenir l'inconnue $\Psi(0)$, il faut appliquer l'astuce de "simplification par s ", which rests on the known fact that the net profit condition $p = c - \lambda/\mu > 0$ implies that $\Psi(\infty) = 0 \Leftrightarrow B = 0$. Le fait que s doit se simplifier dans la fraction ci-dessus implique la relation

$$\Psi(0) = \frac{\lambda\mu^{-1}}{c} = \frac{\lambda EC_1}{c}.$$

This argument and the last relation turn out to be valid with arbitrary claims distribution having finite mean, et implique la formule de Pollaczek-Khinchine – voir Section 3.4.

Note that $\Psi(0)$ and $\bar{\Psi}(0)$ are proportional respectively to the expected payments and profit per time unit.

Le resultat (3.9) peut être aussi obtenu par d'autres méthodes :

1. En reduisant (3.8) to a ODE with constant coefficients and then to look for combinations of exponentials (or to look directly for combinations of exponentials).
2. By the "ladder decomposition" for the Cramer Lundberg process due to Dubordieu(1952)-Benes(1957)-Kendall(1957).

3.4 La formule de Pollaczek-Khinchin pour la transformée de Laplace, à partir de l'EID

Nous avons déjà vu une formule (3.23) pour les probabilités de ruine $\Psi(u)$ exprimées en fonction de l'exposant de Cramér, et de la loi de la severité de ruine, obtenu par l'arrêt d'une martingale de Wald. Nous allons voir maintenant une dixième formule (3.16), qui exprime la transformée de Laplace $\hat{\Psi}(s)$ en fonction de la fonction de répartition $F = F_C$ des montants des remboursements des sinistres (les C_i). Cette formule sera obtenue en appliquant et inversant la transformée de Laplace à l'EID (12.9) § .

§. Cf. a famous joke, probabilists need not be clever, it is enough for them to be able to invert the Laplace transform.

Désignons par $f(u)$ la fonction de densité des sinistres, et par $m_i, i = 1, 2, \dots$, ses moments d'ordre i . La relation entre $F(u)$ et $\Psi(u)$ devient plus simple après avoir pris une transformée de Laplace dans l'équation integro-différentielle (12.9), ce qui ramène à :

$$\widehat{\Psi}(s)(cs - \lambda s \widehat{F}(s)) = c\Psi(0) - \lambda \widehat{F}(s) \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\Psi}(s) = \frac{\Psi(0) - \widetilde{\lambda} \widehat{F}(s)}{s(1 - \widetilde{\lambda} \widehat{F}(s))} \quad (3.12)$$

où $\widetilde{\lambda} = \frac{\lambda}{c}$.

L'équation (3.12) pose un pb, car elle contient deux inconnues $\widehat{\Psi}(s)$ et $\Psi(0)$. Son solution est quand même possible par le "truc de la simplification de la singularité" en 0 qui fournit l'inconnue auxiliaire $\Psi(0)$: comme le coefficient $\kappa(s)$ de côté gauche s'annule pour $s = 0$, et comme $\widehat{\Psi}(0)$ prend une valeur finie[§] il suit que le côté droit s'annule aussi. Donc,

$$\Psi(0) = \frac{\lambda \int_0^\infty \bar{F}(x) dx}{c} = \frac{\lambda m_1}{c} := \rho,$$

(si $\lambda m_1 := \nu_1 = \int_0^\infty x\nu(dx) = E(S_1) < \infty$), ce qui ramène finalement à la formule explicite de **Pollaczek-Khinchin** :

Proposition 3.2. *Pour le processus de risque de Cramér Lundberg avec*

$$\nu_1 = \int_0^\infty x\nu(dx) = E(S_1) < \infty,$$

a) *Les probabilité de ruine et survie à partir de 0 sont :*

$$\begin{aligned} \Psi(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \widehat{\Psi}(s) = \frac{ES(1)}{c} = \frac{\nu_1}{c} = \frac{\lambda m_1}{c} := \rho \\ \bar{\Psi}(0) &= P_0[\bar{P} = 0] = 1 - \rho = \frac{\kappa'(0)}{c}. \end{aligned}$$

b) *Les transformées de Laplace des probabilité de ruine et de survie sont :*

$$\widehat{\Psi}(s) = \int_0^\infty e^{-su} \Psi(u) du = \lambda \frac{m_1 - \widehat{F}(s)}{\kappa(s)} = \rho \frac{\frac{1 - \widehat{f}_e(s)}{s}}{1 - \rho \widehat{f}_e(s)} = \frac{1}{s} - \frac{1 - \rho}{s(1 - \rho \widehat{f}_e(s))} = \frac{1}{s} - \frac{\kappa'(0)}{\kappa(s)} \quad (3.13)$$

$$\widehat{\bar{\Psi}}(s) = \int_0^\infty e^{-su} \bar{\Psi}(u) du = \int_0^\infty e^{-su} P[\bar{\mathcal{D}} \leq u] du = \frac{\kappa'(0)}{\kappa(s)} = \frac{1 - \rho}{s(1 - \rho \widehat{f}_e(s))} = \frac{\bar{\Psi}(0)}{s(1 - \rho \widehat{f}_e(s))}, \quad (3.14)$$

§. Note that $\lim_{s \rightarrow 0} \widehat{\Psi}(s) = \int_0^\infty \Psi(u) du$. Since $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) = 0$, it is plausible and indeed true under weak conditions that $\widehat{\Psi}(0)$ is well defined, c.-à-d. that the apparent singularity at 0 of $\widehat{\Psi}(s)$ must "simplify".

où $\rho = (\lambda m_1)/c$, et $f_e(x) := \bar{F}(x)/m_1$ dénote la densité stationnaire des excédents des remboursements, avec transformée de Laplace $\hat{f}_e(s) = (1 - b^*(s))/(m_1 s)$ et moments $\mu_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}$.

c) La transformée de Laplace de la densité de la perte maximale \bar{P} est

$$\begin{aligned} \phi(s) &:= E[e^{-s\bar{P}}] = P[\bar{P} = 0] + \int_0^\infty e^{-su} f_{\bar{P}}(u) du = 1 - \rho + \int_0^\infty e^{-sz} d\bar{\Psi}(z) \\ &= 1 - \rho + (s\hat{\Psi}(s) - \bar{\Psi}(0)) = s\hat{\Psi}(s) = \frac{\kappa'(0)s}{\kappa(s)} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho\hat{f}_e(s)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\hat{\Psi}(s) = \frac{\phi(s)}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\Psi}(s) = \frac{1 - \phi(s)}{s}. \quad (3.16)$$

Remarque 3.3. Les premières deux formules sont valables pour tout processus de Lévy spectralement négatif, avec $E(S_1) < \infty$ pourvu qu'elles soit exprimés entièrement en fonction du symbole $\kappa(s)$, et qu'on remplace $\lambda\hat{F}(s)$ par la transformée $\hat{v}(s)$ de la mesure de Lévy.

La dernière formule c), plus simple, est aussi importante a cause de plusieurs intreprétations probabilistes : transformée de la densité du supremum d'un processus de Lévy spectralement positif, transformée de la densité du temps d'attente stationnaire dans une file $M/G/1$, un des deux facteurs de la fameuse Wiener-Hopf décomposition – voir Bertoin et aussi chapitre 3.7.

Exercice 3.9. Obtenir la formule (3.9) pour les probabilités de ruine au cas des sinistres exponentiels de taux μ , en inversant la formule de Pollaczek-Khinchine.

Exercice 3.10. Appliquer la formule de Pollaczek-Khinchine au cas des sinistres ayant une loi exponentielle de paramètre μ , translatée à droite par a .

R : Par la formule de Pollaczek-Khinchine , transformée de Laplace des probabilités de survie est :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(s) &= \frac{1 - \tilde{\lambda}m_1}{s(1 - \tilde{\lambda}\hat{F}(s))} = \frac{1 - \tilde{\lambda}m_1}{s(1 - \tilde{\lambda}(\frac{1}{s} - \frac{\mu e^{-as}}{s(\mu+s)}))} = \frac{(1 - \tilde{\lambda}m_1)(\mu + s)}{s(\mu + s) - \tilde{\lambda}((\mu + s) - \mu e^{-as})} \\ &= \frac{(1 - \tilde{\lambda}m_1)(\mu + s)}{s^2 + s(\mu - \tilde{\lambda}) - \tilde{\lambda}\mu(1 - e^{-as})} \end{aligned}$$

Remarque 3.4. Notons que la formule de Pollaczek-Khinchin produit également la distribution stationnaire de la durée d'attente dans une file d'attente $M/G/1$, et en fait la distribution de toute somme géométrique composée.

3.5 Inversion symbolique de la formule de Pollaczek-Khinchine pour exposants de Lévi rationnels

From the Pollaczek-Khinchine formula(2.6), it is clear that if the claims have a rational Laplace transform

$$\bar{B}^*(s) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} a_k s^k}{s^K + \sum_{k=0}^{K-1} b_k s^k}, \quad (3.17)$$

then the same will be true of the Laplace transform of the ultimate ruin probability. Furthermore, the Laplace transform may be inverted symbolically[§], by splitting into partial fractions, which yields mixtures of exponentials involving the (possibly complex) roots of the Cramer-Lundberg equation. Le résultat final est explicite (2.15).

Si les racines du denominateur sont en plus réelles, la décomposition en fractions simples et l'inversion sont faciles même à la main, sans logiciels symboliques (si jamais on est perdu sur une île déserte).

Exercice 3.11. *Démontrer (2.14) en inversant la formule Pollaczek-Khinchine*

Exercice 3.12. *Soit $Y(t)$ un processus de Cramér-Lundberg*

$$Y(t) = u + c t - S(t), \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i, \quad (3.18)$$

où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}_C(x) = \frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{5}{6}e^{-6x}$. a) Calculez l'espérance des sinistres $m_1 = \mathbb{E}C_1$. Calculez le taux de profit $p = c - \lambda m_1$ et la probabilité de ruine avec réserves initiales $u = 0$ $\rho = \Psi(0) = \frac{\lambda m_1}{c}$, si le taux de cotisation est $c = 3m_1/2$.

b) Calculez l'exposant de Lévy et le coefficient d'ajustement de Lundberg.

c) Calculez la probabilité de ruine $\Psi(u)$, en utilisant la formule de Pollaczek-Khinchin pour sa transformée de Laplace

$$\hat{\Psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{p}{\kappa(s)} = \frac{1}{s} - \frac{1 - \rho}{s(1 - \rho f_e^*(s))},$$

§. Avec un logiciel symbolique comme Mathematica, il suffit de calculer `InverseLaplaceTransform[Simplify[$\lambda \frac{m_1 - \hat{F}(s)}{s(c - \lambda \hat{F}(s))}$]]`.

For non-rational symbols, the task of Laplace inversion is more challenging ; for example, the case of lognormal claims is not so straightforward.

où l'exposant de Lévy est $\kappa(s) = s(c - \lambda \bar{F}_C^*(s)) = cs(1 - \rho f_e^*(s))$, et la transformée de la severité de ruine est $f_e^*(s) = \bar{F}_C^*(s)/m_1$.

d) Calculer l'approximation de Cramér-Lundberg.

e) Calculer l'exposant de l'approximation de De Vylder $R_d = \frac{6\theta m_1 m_2}{2\theta m_1 m_3 + 3m_2^2}$, et l'approximation de De Vylder optimisée.

f) (*) On décompose $\Psi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x)$, $\phi_I(x) = \mathbb{P}_x[T < \infty, J_T = i]$, $i = 1, 2$, où J_T est la phase des sinistres au moment final. Calculer $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ en appliquant le théorème d'arrêt aux deux martingales arrêtées de Wald $M_t = e^{-\gamma_i X(t)}$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2$.

R : a) L'espérance des sinistres est $m_1 = \frac{1}{6 \times 2} + \frac{5}{6 \times 6} = \frac{2}{9}$ et le taux de profit $p = \frac{1}{9}$.

b) l'exposant de Lévy est $s(1/3 - \frac{1}{6(s+2)} - \frac{5}{6(s+6)}) = \frac{s(s+1)(s+4)}{3(s+2)(s+6)}$, avec racines $0, -1, -4$.

c) La transformée de Laplace est

$$\hat{\Psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1/9}{s(3/9 - \frac{1}{6(s+2)} - \frac{5}{6(s+6)})} = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{(s+2)(s+6)}{3(s+1)(s+4)} \right) = \frac{5}{9(s+1)} + \frac{1}{9(s+4)}$$

et la probabilité de ruine est $\Psi(u) = \frac{5}{9}e^{-u} + \frac{1}{9}e^{-4u}$.

Dans les exercices suivantes, calculer la probabilité de ruine en utilisant la formule (2.15), avec coefficients A_i à déterminer en utilisant les formules (2.8) ou (2.9).

Exercice 3.13. Soit $Y(t)$ un processus de Cramér-Lundberg

$$Y(t) = u + ct - S(t), \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i, \quad (3.19)$$

où $N_\lambda(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}_C(x) = \frac{1}{4}e^{-3x} + \frac{3}{4}e^{-5x}$. a) Calculez l'espérance des sinistres $m_1 = \bar{\mathbb{E}}C_1$, la transformée de la severité de ruine avec réserves initiales $u = 0$ $f_e^*(s) = \bar{F}_C^*(s)/m_1$, et la probabilité de ruine avec réserves initiales $u = 0$, $\rho = \Psi(0) = \lambda m_1/c$, si le taux de cotisation est $c = 15m_1/7$.

b) Calculez la probabilité de ruine $\Psi(u)$, à partir de la formule de Pollaczek-Khinchin pour sa transformée de Laplace

$$\hat{\Psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{p}{\kappa(s)} = \frac{1}{s} - \frac{1 - \rho}{s(1 - \rho f_e^*(s))}.$$

a) L'espérance des sinistres est $m_1 = \frac{7}{30}$, $\rho = \frac{7}{15}$, et $f_e^*(s) = \frac{45}{14(s+5)} + \frac{15}{14(s+3)}$.

b) La transformée de Laplace est

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{8/15}{s(1 - (\frac{3}{2(s+5)} + \frac{1}{2(s+3)})} = \frac{7s + 26}{15(s^2 + 6s + 8)} \\ &= \frac{1}{15(s+4)} + \frac{2}{5(s+2)}\end{aligned}$$

et la probabilité de ruine est $\Psi(u) = \frac{1}{15}e^{-4u} + \frac{2}{5}e^{-2u}$.

Exercice 3.14. Calculez la probabilité de ruine $\Psi(x)$ pour un processus de Cramér-Lundberg $Y(t) = u + c t - C(t)$, $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, $c = 8/5m_1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{3}{4}e^{-4x}$.

Exercice 3.15. Calculez la probabilité de ruine $\Psi(x)$ pour un processus de Cramér-Lundberg $Y(t) = u + c t - C(t)$, $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, $c = 10/7m_1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}(x) = \frac{1}{9}e^{-2x} + \frac{8}{9}e^{-5x}$. **R :** $\Psi(x) = \frac{6}{10}e^{-x} + \frac{1}{10}e^{-3x}$

Exercice 3.16. Calculez la probabilité de ruine $\Psi(x)$ pour un processus de Cramér-Lundberg $Y(t) = u + c t - C(t)$, $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, $c = 4/3m_1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}(x) = \frac{1}{16}e^{-2x} + \frac{15}{16}e^{-6x}$. **R :** $\Psi(x) = \frac{5}{8}e^{-x} + \frac{1}{8}e^{-3x}$

Exercice 3.17. Calculez la probabilité de ruine $\Psi(x)$ pour un processus de Cramér-Lundberg $Y(t) = u + c t - C(t)$, $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, $c = 5/3m_1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-5x}$. **R :** $\Psi(x) = \frac{8}{15}e^{-x} + \frac{1}{15}e^{-4x}$

Exercice 3.18. Calculez la probabilité de ruine $\Psi(x)$ pour un processus de Cramér-Lundberg $Y(t) = u + c t - C(t)$, $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, $\theta = 2/5$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}(x) = \frac{1}{2}(e^{-3x} + e^{-7x})$.

Exercice 3.19. Comparer numériquement les résultats des exercices précédents avec l'approximation de Cramér-Lundberg, qui retient seulement le terme dominant.

Exercice 3.20. (*)

1. Montrer que la probabilité de ruine avec des sinistres de loi Erlang(2,μ) est

$$\Psi(u) = \rho e^{-u\mu(1-\rho/4)} \left(\cosh \left(u\mu\sqrt{\rho(8+\rho)}/4 \right) + \frac{2+\rho}{\sqrt{\rho(8+\rho)}} \sinh \left(u\mu\sqrt{\rho(8+\rho)}/4 \right) \right).$$

Tracer sur le même graph la solution exacte, ainsi que le résultat obtenu en inversant la transformée de Laplace, et l'approximation de Cramér Lundberg. Prendre $\mu = 2$ pour Erlang(2,μ) (afin que la moyenne soit 1) et $\rho = \frac{4}{5}$.

2. Tracer sur le même graph la solution exacte, ainsi que le résultat obtenu en inversant la transformée de Laplace, et l'approximation de Cramér Lundberg pour les probabilités de ruine dans le cas des sinistres C_i avec une distribution hyperexponentielle $\bar{F}(x) = \frac{1}{16}e^{-2x} + \frac{15}{16}e^{-6x}$ ($\mathbf{R} : \Psi(x) = \frac{5}{8}e^{-x} + \frac{1}{8}e^{-3x}$).

Inversion symbolique avec Sage

```
x,t=var('x','t')
# compute ruin probability given the survival function of claim size,
#using Pollaczek-Khinchin identity
# Fs is the survival function, m1 the first moment, c the increase slope,
#_lambda the Poisson process rate,
# x the input variable, t the ouput variable
def ruin(Fs, rho, x, u):
    var('s')

    L_F=laplace(Fs,x,s)
    m1=L_F(s=0)
    fe=L_F/m1
    Fe=factor((1-fe)/s)
    L_rui=factor(rho*Fe/(1-rho*fe))
    rui=inverse_laplace(L_rui,s,u)

    return rui, Fe, L_rui

# hyper exponential distribution
Fs = (1/6*exp(-2*x)+5/6*exp(-6*x))
print('Hyperexponential claims:',Fs)

# should be 5/9*e^(-t) + 1/9*e^(-4*t)
var('u')
```

```

rui, Fe, L_rui = ruin(Fs, 2/3, x,u)
print('LT of ruin by PK:',L_rui)
L_rui.show()
print('ruin prob:',rui)
('Hyperexponential claims:', 1/6*e^(-2*x) + 5/6*e^(-6*x))
('LT of ruin:', 1/3*(2*s + 7)/((s + 4)*(s + 1)))
2s+73(s+4)(s+1)
2s+73(s+4)(s+1)

('ruin prob:', 5/9*e^(-u) + 1/9*e^(-4*u))
In [9]:
A=[1/6,2/6,3/6];ex=[2,6,4];F=sum(A[i]* exp(-x *ex[i]) for i in [0..2]);
F.show()
rui, Fe, L_rui = ruin(F, 2/3, x,u)
rui.show()
rui #doesn't work with non-integer roots

#roots seem complex
FL(s)=sum(A[i]/(s+ex[i]) for i in [0..2]);
fe=FL(s)/FL(0);r=2/3;Fe=factor((1-fe)/s);PK=factor(r* Fe/(1-r* fe));PK.show()
den=denominator(PK);rt=den.roots(multiplicities=False);rt
2(19s2+156s+284)3(19s3+180s2+468s+304)
2(19s2+156s+284)3(19s3+180s2+468s+304)

Out[11]:
[-1/2*(8/361*I*sqrt(10403) - 4112/6859)^(1/3)*(I*sqrt(3) + 1) + 1/361*(318*I*sqrt(3)
-1/2*(8/361*I*sqrt(10403) - 4112/6859)^(1/3)*(-I*sqrt(3) + 1) + 1/361*(-318*I*sqrt(3)
(8/361*I*sqrt(10403) - 4112/6859)^(1/3) + 636/361/(8/361*I*sqrt(10403) - 4112/6859)^(1/3)
In [14]:
#roots are actually real
C=ComplexField(53);dec=Frac(C['s'])(PK).partial_fraction_decomposition();
dec
Out[14]:
(0,
 [0.586757639348049/(s + 0.982058798728045),
  0.0678213275792160/(s + 2.92876219913591),
  0.0120876997394015/(s + 5.56286321266236)])
In [15]:
par=[inverse_laplace(dec[1][i],s,u) for i in [0..2]];
ruin=sum(par);ruin
Out[15]:
13837621/23583197*e^(-32539385/33133846*u) + 40466576/596664463*e^(-15175724/5181617*u)

```

```

#Renyi approximation
var('u,s');A=[1/6,2/6,3/6];ex=[2,6,4];
F(s)=sum(A[i]/(s+ex[i]) for i in [0..2]);m1=F(0);
m2=sum(2*A[i]/(ex[i]^2) for i in [0..2]);
m3=sum(6*A[i]/(ex[i]^3) for i in [0..2]);
r=2/3;Ren= r*exp(-u*2*m1*(1-r)/m2);

er=abs(ruin-Ren);ers(u)=er.function(u);plot(ers(u),u,0,4)
integral_numerical(ers(u),0,+Infinity)

```

3.6 Martingales, coefficient d'ajustement et l'identité de Gerber

Exercice 3.21. La martingale exponentielle de Wald. *a) Soit $X(t)$ un processus de Lévy. Montrer que*

$$M(t) = e^{\theta X(t) - \kappa(\theta)t}, \theta \in \mathcal{D},$$

où \mathcal{D} est le domaine de définition de la fonction génératrice des moments, est une martingale.[§]

b) Montrer que pour processus de Cramér-Lundberg $X(t)$, $M_t = e^{\theta X(t)}$, $\theta \in \mathcal{D}$ est une martingale ssi $\theta = -\gamma$ est une solution négative de l'équation de Cramér-Lundberg (3.20) :

$$\kappa(\theta)/\theta = 0 \iff \frac{\lambda}{c} \widehat{F}(\theta) = 1 = \rho \widehat{f}_e(\theta). \quad (3.20)$$

§. For the history of martingales, one remembers that Paul Levy, Jean Ville, and Joseph Leo Doob were among the contributors of the 1948 Lyon meeting. Martingales, of which Levy and Ville were the pioneers in prewar France, thus returned from America after the war in the form of a theory elaborated by Doob and moved into the framework for probability and stochastic processes. Under the title “Application of the Theory of Martingales”, Doob would show how this “Theory of Martingales” could be applied on one hand to the (strong) law of large numbers and on the other hand to statistical estimation. Yet the history of martingales must also take into account that Levy did not recognize his own prewar techniques in Doob’s martingales at Lyon, and that Ville did not meet Doob there. Although Fréchet’s preface leaves the impression that all the contributors to the proceedings had been present at Lyon, Ville made it clear in a letter to Pierre Crépel in 1985 [Crépel 2009, p. 15] that he was not present at Lyon and never met Doob. So Lyon symbolizes a missed opportunity. Of the three pioneers of martingales supposedly there, two were left at the side of the road, while the third made of martingales one of the masterpieces of his work. Voir Doob at Lyon : <http://www.jehps.net/juin2009/Locker.pdf> On his lecture, Application of the Theory of Martingales, at the Lyon Colloquium, June 28 – July 3, 1948 Bernard LOCKER. Voir aussi <http://www.jehps.net/juin2009/MazliakShafer.pdf> The Splendors and Miseries of Martingales, Laurent MAZLIAK and Glenn SHAFER, <http://www.jehps.net/juin2009/Mansuy.pdf> The Origins of the Word “Martingale”

Par la convexité de $\kappa(\theta)$, une telle solution est unique, si elle existe. Dans ce cas, γ est appelée **coefficient d'ajustement de Lundberg**.

Exercice 3.22. Soit $X(t)$ un processus de Cramér-Lundberg avec des sinistres exponentielles de taux μ (et symbole $\kappa(s) = \log(E_0 e^{sX(1)}) = cs - \lambda s/(\mu + s)$). Montrer que le coefficient d'ajustement de Lundberg est $\gamma = \mu - \lambda/c = \mu(1 - \rho) > 0$, où $\rho = \frac{\lambda EC_1}{c}$, et montrer que les probabilités de ruine sont

$$\Psi(x) = \rho e^{-\gamma x}. \quad (3.21)$$

R : Utilisons la martingale de Wald $M_t = e^{\theta X(t)}$, où $\theta = -\gamma$ est la solution négative de l'équation de Cramér-Lundberg (3.19) : $\kappa(\theta) = 0$. Le théorème d'arrêt donne :

$$e^{\theta u} = E e^{\theta X(\tau)} = P_u[\tau < \infty] E e^{-\theta \mathcal{E}(\mu)} = P_u[\tau < \infty] \frac{\mu}{\mu + \theta} \implies (3.22)$$

$$P_u[\tau < \infty] = \frac{\mu + \theta}{\mu} e^{\theta u} = \rho e^{-\gamma u} = P_0[\tau < \infty] e^{-\gamma u}$$

où $\gamma = -\theta > 0$.

Remarque 3.5. Le choix $\theta_i = -\gamma < 0$ et la propriété de manque de mémoire de la loi exponentielle, appliqué à la sévérité de ruine $-X_\tau$, ont joué un rôle essentiel pour avoir un résultat explicite. Une examination de la démonstration ci-dessous fournit un résultat général (3.23), qui implique aussi une inégalité célèbre de Lundberg (voir (3.4) pour la version discrète).

Proposition 3.3. La formule de Gerber. Si l'équation de Cramér-Lundberg $\kappa(\theta) = 0$ admet une racine négative $\theta = -\gamma$, alors

$$\Psi(u) = \frac{e^{-\gamma u}}{E_u[e^{-\gamma X(\tau)} | \tau < \infty]} < e^{-\gamma u} \quad (3.23)$$

Dem : Arrêtons la martingale de Wald $M_t = e^{-\gamma X(t)}$, où $-\gamma$ est la solution négative de l'équation de Cramér-Lundberg $\kappa(-\gamma) = 0$, au temps d'arrêt τ . Comme cette variable aléatoire n'est pas bornée, nous travaillerons plutôt avec le temps borné $\tau_n = \min(n; \tau)$, avec $n \rightarrow \infty$. Le théorème d'arrêt, et le conditionnement sur le moment de la ruine (avant ou après n), donnent :

$$e^{-\gamma u} = E_u e^{-\gamma X(\tau_n)} = E_u[e^{-\gamma X(\tau)}; \tau \leq n] + E_u[e^{-\gamma X(n)}; \tau > n].$$

Par le théorème de la convergence dominée, le deuxième terme converge vers $E_u \lim_{n \rightarrow \infty} [e^{-\gamma X(n)}; \tau > n] = E_u[e^{-\gamma \lim_{n \rightarrow \infty} X(n)}; \tau = \infty] = 0$, et le premier terme converge vers $E_u[e^{-\gamma X(\tau)}; \tau \leq \infty]$, par le théorème de la convergence monotone. Dès lors, on a le résultat :

$$e^{-\gamma u} = E_u[e^{-\gamma X(\tau)}] = P_u[\tau < \infty] E_u[e^{-\gamma X(\tau)} | \tau < \infty]. \quad (3.24)$$

Remarque 3.6. La formule (3.23) est valable pas seulement dans la théorie classique de la ruine avec données i.i.d., mais aussi dans le cas des données ARMA – voir Gerber, *Ruin theory in the linear model*(1982), et Yang, Hailiang and Zhang, Lihong *RUIN PROBABILITY IN THE LINEAR TIME SERIES MODELS*, et aussi pour des temps d'arrêt arbitraires (voir Promislow *The probability of ruin in a process with dependent increments*(1991)).

Par contre, à l'exception du temps de ruine et du cas des sinistres exponentielles, quand cette formule devient (3.21), le dénominateur en (3.23) dépend toujours de u . Par conséquent, (3.23) est une identité liant deux inconnues : la sévérité de ruine et les probabilités de ruine, plutôt qu'une formule pour les calculer.

Exercice 3.23. a) Démontrer que R défini par $m_X(R) - 1 = (1 + \theta)m_1 R = \frac{m_1}{\rho}$ satisfait $R < 2\theta \frac{m_1}{m_2}$. Ind : Use $e^{rx} > 1 + rx + \frac{1}{2}(rx)^2$ for $r > 0, x > 0$.

b) Donner l'expansion de R en sommes des puissances de $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{c}$, en utilisant l'expansion de Lagrange $\frac{R}{\phi(R)} = \tilde{\lambda} \implies R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [R^{n-1}] (\phi^n(R)) \tilde{\lambda}^n$, où $[R^k]$ est l'opérateur de Taylor d'extraction du coefficient de la puissance k .

$$\mathbf{R} : \frac{m_1 R}{m_X(R) - 1} = \frac{1}{1 + \theta} \implies R \approx \frac{2m_1 \theta}{m_2} - \frac{4(m_1^2 m_3) \theta^2}{3m_2^3} + \frac{2m_1^3 (8m_3^2 - 3m_2 m_4) \theta^3}{9m_2^5} + \frac{4m_1^4 (-100m_3^3 + 75m_2 m_4 m_3 - 9m_2^2 m_5) \theta^4}{135m_2^7} + \text{et}$$

$$\frac{m_1 R}{m_X(R) - 1} = \rho \implies R \approx \frac{6(1 - \rho)m_1 m_2}{2(1 - \rho)m_1 m_3 + 3\rho m_2^2} = \frac{6\rho m_2}{2\rho m_3 + 3\lambda m_2^2} = R_{DeV}.$$

Exercice 3.24. a) Trouver le coefficient d'ajustement R au cas des sinistres ayant

a) une loi uniforme sur $[0, 1]$

b) valeur constante a

c) une loi exponentielle de paramètre μ , translatée à droite par a , avec mass p en a .

Exercice 3.25. Vérifier l'identité de Gerber par simulations.

Remarque 3.7. On peut montrer que si le coefficient d'ajustement existe, alors le dénominateur en (3.23) converge vers une constante quand $u \rightarrow \infty$, donnant naissance à l'approximation asymptotique de Cramér Lundberg :

$$\Psi(u) \sim C e^{-\gamma u}, \text{ où} \tag{3.25}$$

$$C = \frac{\kappa'(0)}{-\kappa'(-\gamma)} = \frac{1 - \rho}{\rho \gamma} \frac{1}{\int_0^\infty x e^{\gamma x} f_e(x) dx} = \frac{\theta}{\gamma} \frac{1}{E_e^{(\gamma)}[C]}, \quad f_e(x) = \frac{\bar{F}(x)}{m_1}.$$

Cette approximation est valable ssi l'équation Cramér Lundberg (3.19) admet une solution négative, et $\kappa'(-\gamma) > -\infty$ (notons que $\kappa'(0) = E_0 X(1) =$

$c - \lambda m_1 > 0$, et $\kappa'(-\gamma) < 0$ par la convexité de κ . Essentiellement, il s'agit de retenir seulement le terme exponentiel dominant (par exemples dans les exercices du chapitre 5.3).

Les composantes de l'approximation (3.25) sont les héros principaux de la théorie de la ruine : $\rho = \Psi(0)$, le coefficient d'ajustement γ (qui est aussi la singularité dominante de la transformée de Laplace $\widehat{\Psi}(s)$, la "densité d'équilibre" $f_e(x)$ et la "densité ajustée" $\tilde{f}_e(x) = e^{\gamma x} f_e(x)$, avec transformée de Laplace $\widehat{\tilde{f}_e}(s) = \rho \widehat{f}_e(s - \gamma)$ avec singularité dominante en $s = 0$ (et masse de probabilité $\widehat{\tilde{f}_e}(0) = \widehat{f}_e(-\gamma) = \rho^{-1}$). Nous le reverrons tous plus tard.

Exercice 3.26. a) Calculer $\phi(b) = E_0[e^{-q\tau_b^+}]$ en utilisant une martingale de Wald

$$M(t) = e^{sX(t) - \kappa(s)t},$$

avec s choisi judicieusement.

b) Soit $\bar{X}(t) = \sup_{\{0 \leq s \leq t\}} X(s)$, et soit \mathcal{E}_q une v.a. exponentielle de taux q . Montrer que $\bar{X}_{\mathcal{E}_q}$ a une loi exponentielle, avec un taux qu'on déterminera.

Exercice 3.27. Le processus de risque dual. Soit $X(t) = u - t + c \sum_{i=1}^{N_c(t)} I_i$ un processus de risque dual, où I_i sont i.i.d., $\mathcal{L}(I_i) = \text{Expo}(\lambda)$.

Trouver une martingale de Wald $M_t = e^{-\theta X(t)}$. Calculer la probabilité de ruine

R : θ est la solution négative de l'équation de Cramér-Lundberg $\kappa(\theta) = 0$, $\theta = \mu c - \lambda = \mu c(1 - \rho)$. $P[T_0 < \infty] = e^{-\theta u}$.

3.7 Conditionnement sur le premier escalier en bas, l'équation de renouvellement et la formule de Pollaczek-Khinchine

Soit $Y = -X(\tau)$ la sévérité de ruine. Le calcul de la loi de l'escalier en bas

$$F_{\tau, Y}(t, y) = P_0[\tau < t, Y \leq y]$$

avec reserves initiales $u = 0$ est un pb. fondamental de la théorie de la ruine.

Il s'avère que dans le cas $t = \infty$ on a la formule fondamentale :

$$P_0[-X(\tau) > y, \tau < \infty] = \frac{\lambda}{c} \int_z^\infty \bar{F}_C(u) du := \rho \int_y^\infty f_e(z) dz, \quad (3.26)$$

où $\rho = \frac{\lambda m_1}{c}$, et $f_e(z) = \frac{\int_z^\infty \bar{F}_C(u) du}{m_1}$ est appelée densité d'équilibre des sinistres. En decomposant encore, on a

$$P_0[\tau < \infty] = \rho, \quad P_0[-X(\tau) > y | \tau < \infty] = \int_y^\infty f_e(z) dz, \quad f_{Y_1 | X(0)=0, \tau < \infty}(z) = f_e(z).$$

La démonstration de cette formule est difficile, mais importante; plus tard nous en donnerons plusieurs démos.

Démo 1 : On vérifie la formule d'abord pour les lois de type phase, et on passe à la limite.

Démo 2 : Par conditionnement sur le premier sinistre : voir Guérrin, et (?).

Nous allons donner dans l'exercice (3.28) une démonstration indirecte, en supposant connue la formule de Pollaczek-Khinchine .

Une fois la formule (3.26) démontrée, tout devient simple, car en conditionnant sur le premier escalier an bas σ_1 , nous trouvons les équations de renouvellement :

$$\Psi(x) = \rho \bar{F}_e(x) + \rho \int_0^x \Psi(x-z) f_e(z) dz, \quad (3.27)$$

$$\bar{\Psi}(x) = (1-\rho) + \rho \int_0^x \bar{\Psi}(x-z) f_e(z) dz. \quad (3.28)$$

Exercice 3.28. a) Trouver la formule de Pollaczek-Khinchine pour la transformée de Laplace $\Psi(s)$, à partir de (3.28).

b) Démontrer (3.28) à partir de la formule de Pollaczek-Khinchine .

Réponse: b) Le conditionnement sur la taille Y_1 de la première perte (dépassement en bas de la position initiale) donne :

$$\bar{\Psi}(x) = P[\sigma_1 = \infty] + P[\sigma_1 < \infty] \int_0^x \bar{\Psi}(x-y) f_{Y_1|\sigma_1 < \infty}(y) dy.$$

La transformée de Laplace satisfait

$$\begin{aligned} \widehat{\bar{\Psi}}(s) &= \frac{P[\sigma_1 = \infty]}{s} + P[\sigma_1 < \infty] \widehat{\bar{\Psi}}(s) \widehat{f}_{Y_1|\sigma_1 < \infty}(s) \implies \\ \widehat{\bar{\Psi}}(s) &= \frac{P[\sigma_1 = \infty]}{s(1 - P[\sigma_1 < \infty] \widehat{f}_{Y_1|\sigma_1 < \infty}(s))}. \end{aligned}$$

Comparant avec la formule de Pollaczek-Khinchine $\widehat{\bar{\Psi}}(s) = \frac{1-\rho}{s(1-\rho \widehat{f}_{Y_1|\sigma_1 < \infty}(s))}$ implique que la densité du premier dépassement en bas $f_{Y_1|\sigma_1 < \infty}(z) = f_e(z) = \frac{\bar{F}_C(z)}{m_1}$, que $\rho = \Psi(0)$ est la probabilité de revisiter le niveau initial, et que $1-\rho = \bar{\Psi}(0)$ est la probabilité de ne jamais revenir au niveau initial.

Exercice 3.29. Résoudre l'équation (3.28) dans le cas des sinistres exponentielles.

Remarque 3.8. Les équations intégrales de type (3.27), (3.28) apellées équations de renouvellement, apparaissent aussi dans la théorie des marches aléatoires discrètes, et figurent notamment dans les chapitres 11,12,14 et 18 dans la "bible des probabilistes", écrite par Feller.

En particulier, elles interviennent dans le modèle de Sparre-Andersen, où on suppose que les inter-arrivées des sinistres t_1, t_2, \dots sont indépendants de sinistres et ont une distribution continue arbitraire avec densité $a(t)$, et avec esperance finie. En fait, l'équation (3.27) est évidemment valable pour le modèle de Sparre-Andersen "stationnaire" (en commençant au moment de l'arrivée d'un sinistre), mais dans ce cas l'identification de $f_{Y_1}(z)$ est plus compliquée.

3.8 La série de Dubordieu-Beekman

Remarque 3.9. Pollaczek-Khinchine à partir de (3.28). *The equation (3.28) is a particular case of renewal/convolution equation (which are further particular cases of Volterra equations of second kind) :*

$$v(x) = g(x) + \lambda \int_0^x v(x-y)f(y)dy, \quad x \geq 0 \quad (3.29)$$

For these equations, the Laplace transform of the solution :

$$\widehat{v}(s)(1 - \lambda \widehat{f}(s)) = \widehat{g}(s)Eq\widehat{v}(s) = \frac{\widehat{g}(s)}{1 - \lambda \widehat{f}(s)}, \quad (3.30)$$

is expandable in a geometric series, and the original function itself may be expanded in a convolutions series

$$v(x) = \int_0^x g(x-y)U(dy) = \int_0^x g(x-y) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f^{*k}(y) \right) dy,$$

where $U(dy) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f^{*k}(y)dy$ is called the renewal measure.

La solution :

$$\overline{\Psi}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho) \rho^n F_e(u)^{*n} \iff \Psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \rho) \rho^n \overline{F}_e(u)^{*n} \quad (3.31)$$

$$\rho = \Psi(0) = \frac{\lambda m_1}{c}, \quad 1 - \rho = \overline{\Psi}(0)$$

réfléchie le fait que le nombre des escaliers a une loi géométrique, et que la ruine arrive ssi la somme totale des hauteurs des dépasse u .

Cette interprétation a été découverte par Dubordieu(1952), Benes(1957) et Kendall(1957), après la découverte de la formule Pollaczek-Khinchine § .

§. The "ladder series decomposition" (3.31) is sometimes called the Beekman-Pollaczek-Khinchine formula (even though the last two researchers only provided the Laplace transform (3.30), not its inversion.

Chapitre 4

Les lois de type phase continues et de type exponentielle de matrice

4.1 Aperçu historique

La loi exponentielle, avec fonction de survie $\bar{F}(t) = e^{bt} \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$, $b < 0$, est la loi la plus importante parmi les lois concentrées sur \mathbb{R}_+ . Elle a été du début une grande favorite dans les probas appliquées (files d'attente, actuariat, fiabilité, etc), par exemple pour la modélisation des temps d'atteinte, grâce a ses propriétés spéciales, comme l'absence de mémoire. Mais, comme typiquement il n'est pas possible d'ajuster une distribution exponentielle au données, des alternatives ont été proposé du début.

Serie des "phases" exponentielles. Erlang (1905), a proposé de modéliser les temps d'atteinte par sommes des v.a. exponentielles i.i.d. du même taux λ , qu'il voyait comme des "séries des phases exponentielles" (chaque phase ayant la remarquable propriété de manque de mémoire).

Exercice 4.1. 1. Montrer que La transformée de Laplace de la loi d'Erlang

$$E_{n,\lambda} = \sum_{i=1}^n E_{\lambda}^{(i)} \text{ est}$$

$$\left(\frac{1}{1 + s/\lambda}\right)^n.$$

2. Calculer la moyenne, variance et coefficient de variation $c_v^2 = \frac{\text{Var}(X)}{(E[X])^2}$ de la loi d'Erlang $E_{n,\lambda}$.
3. Calculer le mode de la densité.
4. Tracer approximativement les graphes des densités $E_{k,\frac{k}{2}}$ pour $k = 3$ et $k = 7$.

5. (*) Montrer que le coefficient de variation d'une convolution de deux lois ayant coefficient de variation plus petit que 1 est plus petit que 1 et plus grand que $\frac{1}{2}$.

Une autre famille très importante est celle des lois "hyperexponentielles", avec densité

$$f(t) = \sum \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \lambda_i > 0, \alpha_i > 0, \sum \alpha_i = 1,$$

qui peuvent-etre vues comme le résultat d'un choix avec probabilités α_i d'une entre plusieurs phases avec taux λ_i .

Exercice 4.2. Calculer

1. les moments d'ordre $n, n = 1, 2, \dots$ et
2. le coefficient de variation $c_v^2 = \frac{\text{Var}(X)}{E(X)^2}$ d'une variable aléatoire hyperexponentielle, d'ordre k .

La classe \mathcal{R} des lois avec transformées de Laplace rationnelles. D.R. Cox (1955) étudie les lois series et hyperexponentielles, qu'il regarde comme temps de passage par un réseau des phases parallèles, et aussi des lois obtenues en composant des phases en série et/ou en parallèle. Il identifie comme propriété analytique essentielle le fait que leurs transformées de Laplace sont rationnelles

$$f^*(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m p_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i s^i}, p_0 = q_0, \quad (4.1)$$

et il introduit dans l'article phare "A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes" la classe des densités \mathcal{R} ayant des transformées de la forme (4.1). En particulier, une densité $f(t)$ de cette classe est facilement obtenable à partir de sa transformée de Laplace $f^*(s)$ (qui est souvent plus facile à trouver), par décomposition en fractions simples, et inversion des transformées simples de la forme $(\frac{1}{1+s/\lambda})^n$. Chaque densité de la classe \mathcal{R} peut-être décomposée ainsi comme une combinaison des densités exponentielles et d'Erlang, sauf que les exposants λ_i peuvent être complexes.

Exercice 4.3. a) Montrez que si une variable continue X à valeurs en sur \mathbb{R}_+ a une densité avec transformée de Laplace rationnelle (4.1), alors $m \leq n - 1$, et $a_0 = b_0$.

b) Montrez que si X est continue, sauf un possible atom en 0 avec masse a_{-1} , alors $a_0/b_0 + a_{-1} = 1 \implies a_0 \leq b_0$, et $m \leq n$.

Réponse: a) $m \leq n - 1 \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow I} f^*(s) = 0$, qui est une conséquence du théorème de convergence dominée.

Remarque 4.1. La classe \mathcal{R} est incontournable dans des nombreuses applications, apparaissant par exemple comme resultat des approximations de Padé de la transformée de Laplace, ou par la méthode des moments.

Remarque 4.2. Il a été longtemps un problème ouvert (sauf les cas $n = 2$ et $n = 3$) de décider quand une combinaison d'exponentielles est nonnegative (ou quand une transformée de Laplace rationnelle (4.1) a une inverse nonnegative). La commande *CheckMEPositive* de *BUTools* offre aujourd'hui cette possibilité, et aussi le programme *SOPE*, dans le cas des exposants réels (par contre *SOPE* permet aussi la resolution des problèmes d'optimisation convexe).

Représentations matricielles. En même temps avec Cox, Jensen (1954) etudie les lois des temps d'absorption τ des processus de sauts Markoviens, ou de passage par des réseaux, appelées aujourd'hui lois de type phase (\mathcal{PH}). Il trouve qu'elles ont la représentation (4.2) ci-dessous – voir Section 4.2 :

Définition 4.1. Densités de type phase et de type exponentielle de matrice. a) Une densité $f(t), t \in [0, \infty)$ est appelée de type phase si :

$$f(t) = \vec{\beta} e^{Bt} \mathbf{b}, \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \hat{f}(s) = \vec{\beta} (sI - B)^{-1} \mathbf{b}, \quad (4.2)$$

où B est une matrice sous-génératrice satisfaisant $B_{ij} \geq 0$ for $i \neq j$, $B\mathbf{1} \leq \mathbf{0}$, $\vec{\beta}$ est un vecteur ligne, et $\mathbf{b} = -B\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ sont des vecteurs colonne. Ces hypothèses impliquent $f(t) \geq 0, \forall t \geq 0, \int_0^\infty f(t)dt = 1$.

b) Une densité qui a une représentation (4.2), mais avec des composantes $\vec{\beta}, B, \mathbf{b}$ qui ne sont pas nécessairement comme en part a), est appelée densité de type exponentielle de matrice.

Exemple 4.1. Une représentation de la densité d'Erlang $E_{n,\lambda}$ est obtenue avec $\vec{\beta} = (1, 0, 0, \dots)$ et

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \lambda \\ \vdots & & \vdots & \ddots & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.3. La densité et la fonction de survie d'un temps d'arrêt τ d'un processus de Markov absorbant en temps continu ont toutes les deux des représentations matricielles :

$$\bar{F}_\tau(t) = \vec{\beta} e^{tB} \mathbf{1} \Leftrightarrow f(t) = \vec{\beta} e^{tB} \mathbf{b}, \mathbf{b} = -B\mathbf{1}. \quad (4.3)$$

La transformée de Laplace est rationnelle, de la forme

$$f^*(s) = \vec{\beta}(sI - B)^{-1}\mathbf{b} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i s^i}$$

Si une telle représentation est disponible avec B étant une matrice sous-génératrice, et $\vec{\beta}$ nonnegatif, aucun besoin de vérifier que $f(t)$ est nonnegative, cela étant automatique.

Des représentations matricielles sont aussi possibles pour la classe \mathcal{R} de Cox (en utilisant la "matrice compagnon" du polynôme $q(s)$ au dénominateur), et donc $\mathcal{PH} \subset \mathcal{R}$ [§]. Les lois de la classe \mathcal{R} avec transformées de Laplace rationnelles sont aussi nommées exponentielles de matrice ou matrice-exponentielle.

Remarque 4.4. Pour qu'une densité $f(t)$ soit de type matrice-exponentielle, il est nécessaire que :

1. Toutes ses valeurs propres satisfont $\Re(\sigma_i) < 0, \forall i$, et il existe une valeur propre réelle σ_1 tq $\max_i \Re(\sigma_i) = \sigma_1$ (ce qui est facile à vérifier en calculant les racines du dénominateur), et
2. $f(t) \geq 0, \forall t$, qui est un problème ouvert pour $n \geq 4$.

Dans le cas des densités de type phase, ces contraintes sont satisfaites automatiquement, mais pour les densités de type matrice-exponentielle elles doivent être vérifiées cas par cas, ce qui est tout à fait difficile pour la deuxième propriété.

4.2 Processus de Markov avec un état absorbant

Exercice 4.4. Le serveur sans mémoire. Pour un processus de Markov en

§. Si la transformée d'une fonction est rationnelle :

$$f^*(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i s^i}, \quad (4.4)$$

alors l'inverse peut être représentée comme $f(t) = \vec{\beta}e^{tB}\mathbf{e}_n$, où $\vec{\beta} = (p_0, \dots, p_{n-1})$ et

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -q_0 & \dots & \dots & \dots & -q_{n-1} \end{pmatrix}$ est la "matrice compagnon" du polynôme $q(s)$ au dé-

nominateur. En effet, on vérifie d'abord que (4.4) implique $b(D)[f(t)] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f}'(t) = B\mathbf{f}(t)$, où $f(t)$ est le vecteur formé par $f(t)$ et ses premières $n - 1$ dérivées. La condition initiale

est fourni par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ q_{n-1} & 1 & 0 & \dots & \dots \\ q_{n-2} & q_{n-1} & 1 & \dots & \dots \\ q_1 & q_2 \dots & q_{n-1} & 1 & \dots \end{pmatrix} \mathbf{f}'(0) = \mathbf{b}$. Résolvant le système EDO linéaire

avec cette condition produit la représentation désirée.

temps continu a deux états $\{1, \partial\}$ avec $G_{\partial,1} = 0$ (∂ est absorbant), $G_{1,\partial} = \lambda$, soit τ temps d'absorbtion.

1. Calculer $P_t = e^{tG}$, par exemple par les équations de Kolmogorov $P'_t = P_t G$, et remarquez que

$$e^{tG} = \begin{pmatrix} \bar{F}_\tau(t) & F_\tau(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer la résolvante/transformée de Laplace du semigroupe $\int_0^\infty e^{-st} e^{tG} dt = (sI - G)^{-1}, \forall s > 0$.
3. (*) Calculer l'espérance de τ , et la transformée de Laplace $E[e^{-s\tau}]$, en conditionnant sur toutes les possibilités après un intervalle infinitesimal dt ("conditionnement sur le premier pas"). Rederiver $E[\tau]$, en utilisant $Ee^{-s\tau} = \int_0^\infty e^{-st} f_\tau(t) dt = 1 - sE[\tau] + \dots$

Remarque 4.5. La transformée de Laplace $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ est très importante en probabilités, par exemple pour calculer les moments (pour cela, il est plus convenable d'utiliser la fonction génératrice des moments $\phi(s) = \int(e^{st} f(t) dt = \hat{f}(-s)$). Il est facile de vérifier que les transformées des fonctions de répartition $F(t)$ et survie $\bar{F}(t)$ sont respectivement

$$\hat{F}(s) = \frac{f(s)}{s}, \quad \hat{\bar{F}}(s) = \frac{1 - f(s)}{s}$$

L'exercice ci-dessus illustre le fait que la densité exponentielle peut être vue comme le temps d'absorbtion d'un processus de Markov avec matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par : $G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$. La possibilité de donner ce genre de représentation définit la classe des densités de type phase.

Motivés par cette relation, considérons le problème de caractériser la distribution du temps de passage τ par un réseau Markovien général, jusqu'à l'absorbtion dans un état "cimetier" absorbant.

Soit G la matrice génératrice (de taux de transitions) d'un processus ayant un état absorbant :

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (-\mathbf{B})\mathbf{1},$$

et soit $B = \tilde{G}$ la matrice sous-stochastique obtenue en effaçant la ligne et colonne de l'état absorbant dans la matrice stochastique G du semigroupe stochastique initial. B est une matrice sous-stochastique (ayant la somme de chaque ligne ≤ 1 , avec au moins une ligne où l'inégalité est stricte). Réciproquement, chaque matrice sous stochastique a une extension unique a

une matrice stochastique, obtenue par l'ajout d'une ligne de 0 et d'une colonne qui complete la somme de chaque ligne à 1.

Le prochain théorème fournit la relation entre les semigroupes (sous)stochastiques e^{tG} , e^{tB} , et le temps d'arrêt τ obtenu en arrêtant le processus au moment de son arrivée dans l'état absorbant (qui peut être choisi arbitrairement).

Théorème 4.1. *Soit τ le temps d'absorption d'un processus de Markov avec un état absorbant, à matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par :*

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (-\mathbf{B})\mathbf{1}$$

a) Alors,

$$e^{tG} = \begin{pmatrix} e^{t\mathbf{B}} & \mathbf{1} - e^{t\mathbf{B}}\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\mathbf{B}} & (P_i(\tau \leq t), i \in \mathcal{T}) \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{cases} P_i(\tau \leq t) = (e^{tG})_{i,n+1} \\ P_i(\tau > t) = \bar{e}_i e^{t\mathbf{B}} \mathbf{1} = (e^{t\mathbf{B}} \mathbf{1})_i \end{cases}$$

En forme vectorielle, les fonction de survies des temps d'absorption sont :

$$\bar{\mathbf{F}} = (\bar{F}_i(t) = \mathbb{P}_i[\tau > t], i \in \mathcal{T}) = e^{t\mathbf{B}}\mathbf{1}$$

et les densités sont

$$\mathbf{f} = e^{t\mathbf{B}}\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = (-\mathbf{B})\mathbf{1} \quad (4.5)$$

Avec une distribution initiale $\vec{\beta}$ concentré sur les états transitoires, on a

$$P_{\vec{\beta}}(\tau > t) = \vec{\beta} e^{t\mathbf{B}} \mathbf{1}$$

b) La relation entre les résolvantes est :

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} = \begin{pmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} & s^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & s^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dem : a) Un moment de réflexion nous montre qu'en effet la matrice

$$\mathbf{P}_t = (P_t(i, j) = \mathbb{P}_i[t < \tau, X_t = j], i, j \in \mathcal{T}) = e^{t\mathbf{B}}$$

contienne les **probabilités de survie jusqu'au temps t , jointes avec la position finale j , et conditionnées par les positions de départ i .** Les

probabilités de survie jusqu'au temps t , conditionnées par les positions de départ i , sont donc

$$\vec{e}_i e^{t\mathbf{B}} \mathbf{1}$$

En tenant compte des probabilités de départ, on trouve :

$$\bar{F}_\tau(t) = \vec{\beta} e^{t\mathbf{B}} \mathbf{1}$$

b) Par définition, la dernière colonne de $e^{t\mathbf{G}}$ est $F_\tau(t)$ et sa transformée $\hat{F}_\tau(s) = s^{-1} H f_\tau(s) = s^{-1} (s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \mathbf{b}$ où on a utilisé la remarque 4.5 et (4.5).

Corollaire 4.1. Les caractéristiques fondamentales des distributions de type phase (ou matrice-exponentielle). a) La matrice des transformées de Laplace $P^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_t dt$ des probabilités de survie conditionnées par les positions de départ et jointes avec la position d'arrivée au temps t vaut

$$\mathbf{P}^*(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}$$

Soit

$$\mathbf{l} = (l_i(s) = E_i e^{-s\tau} = \int_0^\infty e^{-st} f_i(t) dt = \hat{f}_i(s), i \in \mathcal{T})$$

les transformés de Laplace du temps d'absorption, conditionné par la position de départ. Alors

$$\mathbf{l} = (s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \mathbf{b}.$$

b) Avec une distribution initiale $\vec{\beta}$ concentré sur les états transitoires, on trouve

$$\vec{\mathbb{E}}_{\vec{\beta}} e^{-s\tau} = \vec{\beta} (s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \mathbf{b}.$$

c) le vecteur \mathbf{t} d'espérances de τ , à partir de tous les états transients, est

$$\mathbf{t} = E[\tau] = (-\mathbf{B})^{-1} \mathbf{1},$$

et le vecteur des moments d'ordre k est

$$E[\tau^k] = k! (-\mathbf{B})^{-k} \mathbf{1}$$

Dem : a) Soit

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

la matrice rectangulaire obtenu en effaçant la ligne de l'élément absorbant. On peut appliquer le conditionnement sur la position après un intervalle infiniésimal. Posant $\tilde{\mathbf{l}} = (\mathbf{l}, 1)$, les équations sont

$$\begin{cases} l_\partial = 1 \\ \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{l}} - s\tilde{\mathbf{l}} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \mathbf{B}\mathbf{l} + \mathbf{b} - s\mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{l} = (s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \mathbf{b}$$

c) Pour $k = 1$, le resultat suit directement de l'équation $\mathbf{B}\mathbf{t} + \mathbf{1} = 0$ ■

Remarque 4.6. En utilisant la décomposition de Jordan, on voit que dans le cas "générique" des distributions de type phase diagonalisable, ces distributions peuvent-etre décomposées comme combinaisons (possiblement nonconvexes) des exponentielles.

Exercice 4.5. Pour les processus absorbants "serie" en temps continu a trois états 1, 2, ∂ définis respectivement par

$$a)G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b)G = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et distribution initiale $(1, 0, 0)$, calculer :

1. la "résolvante"

$$(sI - G)^{-1} = \begin{pmatrix} (sI - B)^{-1} & \frac{1}{s}\mathbf{f}^*(s) \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (sI - B)^{-1} & \mathbf{F}^*(s) \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix},$$

2. le vecteur des transformées de Laplace $\mathbf{l}(s) = (sI - B)^{-1}\mathbf{b}$ et le vecteur $\mathbf{f}(t) = e^{tB}\mathbf{b}$ des densités du temps d'absorption τ .

3. Le vecteur d'espérances de τ $\mathbf{t} = (-B)^{-1}\mathbf{1}$.

Sol : a)

$$(sI - B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+\lambda} & \frac{\lambda}{(s+\lambda)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+\lambda} \end{pmatrix} \quad \mathbf{l}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2} \\ \frac{\lambda}{s+\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_{E_{2,\lambda}}(t) \\ f_{E_{1,\lambda}}(t) \end{pmatrix}, \quad (1, 0)\mathbf{f}(t) = f_{E_{2,\lambda}}(t)$$

b)

$$(sI - B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+\lambda_1} & \frac{\lambda_1}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} \\ 0 & \frac{1}{s+\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1\lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} \\ \frac{\lambda_2}{s+\lambda_2} \end{pmatrix}$$

On obtient une distribution "hypoexponentielle/Erlang generalisé/série/convolution d'exponentielles", aussi exprimable comme melange nonconvex d'exponentielles

$$f(t) = (1, 0)\mathbf{f}(t) = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Remarque 4.7. Les transformées de Laplace des réseaux serie. Rémarquons que les transformées de Laplace ci-dessus peuvent être obtenues sans calcul, en prenant les produits des transformées pour les phases qui restent jusqu'à

l'absorbtion. Cette remarque reste evidemment vrai pour les réseaux serie de dimension arbitraire. Pour un réseau série avec matrice sous-génératrice

$$B = \text{Bidiag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -\lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\lambda_n \end{pmatrix},$$

le vecteur des transformées de Laplace est

$$\mathbf{l}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\dots(s+\lambda_n)} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_{n-1} \lambda_n}{(s+\lambda_{n-1})(s+\lambda_n)} \\ \frac{\lambda_n}{s+\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Les moments sont aussi explicits. Pour $n = 3$, on trouve :

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} \\ 2 \left(\frac{1}{\mu_1 \mu_3} + \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{1}{\mu_3 \mu_2} + \frac{1}{\mu_2^2} \right) \\ 3! \left(\frac{1}{\mu_1^3} + \frac{1}{\mu_2^3} + \frac{1}{\mu_3^3} + \frac{1}{\mu_2 \mu_1^2} + \frac{1}{\mu_3 \mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2 \mu_3} + \frac{1}{\mu_2 \mu_3^2} + \frac{1}{\mu_2^2 \mu_1} + \frac{1}{\mu_3^2 \mu_1} + \frac{1}{\mu_2 \mu_3 \mu_1} \right) \end{pmatrix}$$

Avec $\mu_i = \mu, \forall i$ les formules simplifient : $m_1 = n\mu^{-1}, m_2 = n(n+1)\mu^{-2}, m_3 = n(n+1)(n+2)\mu^{-3}, \dots$

Les réseaux série sont très importants dans la modélisation des temps d'atteinte.

Exercice 4.6. Les réseaux parallel. *Pour le processus absorbant en temps continu defini par*

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calculer :

1. la "résolvante transiente" $(sI - B)^{-1}$,
2. la transformée de Laplace du temps d'absorbtion τ , avec distribution initiale $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$
3. la densité de τ
4. le vecteur \mathbf{t} d'espérances de τ , à partir de tous les états transients.
5. Calculez la transformée de Laplace du temps d'absorbtion τ pour un processus avec un état absorbant, ayant une diagramme parallèle arbitraire.

Conclusion : Les lois des temps de passage par des réseaux markoviennes sont des mélanges d'exponentielles et des lois d'Erlang avec des exposants possiblement complexes. Dans le cas des réseaux sans cycles – voir exercices ci-dessus – les exposants sont réels.

4.3 Sous-classes importantes des distributions exponentielle de matrice (*)

Rapellons que pour qu'une densité soit de type matrice-exponentielle il est nécessaire que toutes ses valeurs propres satisfassent $\Re(\sigma_i) < 0, \forall i$, et il existe une valeur propre réelle σ_1 tq $\max_i \Re(\sigma_i) = \sigma_1$. La possibilité la plus simple est que toutes les valeurs propres soient réelles négatives.

Théorème 4.2. *Supposons que $f(x)$ est une fonction de type exponentielle de matrice, avec toutes les valeurs propres satisfaisant $\sigma_i < 0, \forall i$, et que $f(x) > 0, \forall x > 0$. Alors, $f(x)$ admet une représentation comme temps d'absorption d'un processus de Markov avec graphe de communication série (ce qui est équivalent au fait qu'un peut ordonner les états tq la matrice de transition soit bidiagonale)[§]. Une telle densité avec valeurs propres réelles négatives s'appellent acyclique/Coxiennne/série/Erlang généralisé.*

Au cas où on a aussi des racines complexes, on est obligé d'utiliser des graphes qui contiennent aussi des cycles. L'idée la plus simple serait d'utiliser des matrices circulantes $B = \text{Circ}(-\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda > \sum_i \lambda_i$, mais il se trouve que ces matrices représentent seulement la loi exponentielle (en particulier, leurs moments sont $m_k = k!(-B)^{-k} \mathbf{1} = k!(\lambda - \sum_i \lambda_i)^{-k}$).

Exercice 4.7. *Vérifier cette affirmation en BUTools, avec $n = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$.*

Remarque 4.8. *Mocanu et Commault ont montré qu'on peut toujours trouver des représentations de forme "séries des blocs", avec chaque bloc représentant séparément une valeur propre réelle, ou une paire de valeurs propres complexes, par des lois d'"Erlang généralisé avec de feedback" (représentation monocyclique).*

Exercice 4.8. *a) Montrez que les statistiques d'ordres de n variables exponentielles i.i.d. ont des distributions d'Erlang généralisés, et déterminer leurs paramètres. b) (*) Investiguez le cas des statistiques d'ordres de n variables exponentielles indépendantes, mais avec des paramètres différents.*

Ind : a) Utilisez la propriété de manque de mémoire. b) Considérez le cas $n = 2$.

§. Ce théorème est déjà intéressant avec un graphe de communication acyclique (ce qui est équivalent au fait qu'un peut ordonner les états tq la matrice de transition soit triangulaire). Dans ce cas, il assure qu'on peut trouver une autre représentation bidiagonale, de dimension plus grande.

4.4 La positivité des combinaisons linéaires d'exponentielles

Définition 4.2. Une densité (c.-à-d. une fonction nonnegative et intégrable, avec intégrale 1) de la forme :

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^K w_k e^{-c_k t} \geq 0, & \forall t \geq 0 \\ 0, & \forall t < 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

sera appelée hyperexponentielle généralisée (GHE). Si tous les coefficients w_k sont positifs, $f(t)$ sera appelée hyperexponentielle.

Exercice 4.9. Est-ce que la fonction

$$f(t) = 2(e^{-t}) - 6(2e^{-2t}) + 5(3e^{-3t}) = 2e^{-t}g(t)$$

est positive sur $t \in [0, \infty)$, et donc une densité ?

Réponse: Non, car la valeur minimale $g(t) = 2 - 12e^{-t} + 15e^{-2t}$ obtained when $e^{-t} = \frac{2}{5}$, is $g(t^*) = -\frac{2}{5} < 0$.

Remarque 4.9. Cette approche marche toujours pour trois termes. Pour quatre et cinq termes, déjà dans le cas des exposants en progression arithmétique, on arrive au pb. de positivité sur $[0, 1]$ des polynômes de degré 3 et 4, qui ne sont pas faciles. Le cas général des progressions arithmétiques est abordable numériquement en utilisant des représentations matricielles et la programmation semi-définie.

Exercice 4.10. Est-ce que la fonction

$$f(t) = \frac{1}{4}e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t}$$

est non-négative sur $t \in [0, \infty)$?

Exercice 4.11. Montrer que pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la fonction

$$f(t) = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

est une densité, en calculant sa transformée de Laplace $f^*(s)$.

Réponse:

$$f^*(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1}{\lambda_1 + s} - \frac{1}{\lambda_2 + s} \right) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + s}.$$

Il suit que $f(t)$ est la densité d'une somme de deux variable aléatoire exponentielles, indépendantes.

Remarque 4.10. La transformée de Laplace, ainsi que la densité, sont des différences divisées de Newton.

$$f^*(s) = -\lambda_1\lambda_2\left(\frac{1}{\lambda+s}\right)_{[\lambda_1,\lambda_2]} \implies f(t) = -\lambda_1\lambda_2(e^{-\lambda t})_{[\lambda_1,\lambda_2]} =$$

$$-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}(\lambda_2 e^{-\lambda_2 t})$$

Cela continue d'être vrai (démonstration par récurrence) pour des sommes de n variables aléatoires exponentielles, indépendantes, et nous fournit des exemples de densités qui ne sont pas hyper-exponentielles, mais avec positivité évidente dans le «monde de Laplace».

Définition 4.3. La loi d'une somme indépendante des n variables exponentielles avec taux $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ est appelée Erlang généralisée. Sa transformée de Laplace est $\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{s+\lambda_i}$.

Exercice 4.12. Écrivez la fonction

$$f(t) = \frac{5}{6}e^{-t} - \frac{2}{6}e^{-2t} + e^{-3t}$$

avec transformée de Laplace

$$f^*(s) = \frac{9s^2 + 35s + 36}{6(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{5}{3(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{4}{3(s+2)(s+3)} + \frac{3}{2(s+3)} \quad (4.7)$$

comme une combinaison d'Erlang généralisé $E(1, 2, 3)$, $E(2, 3)$ et $E(3)$. Est-ce que cette fonction est une densité ?

Réponse: $f(t) = \frac{5}{18}E(1, 2, 3) + \frac{4}{18}E(2, 3) + \frac{1}{2}E(3)$ est un mélange convexe d'Erlang généralisé, donc une densité.

Définition 4.4. Nous appellerons une décomposition de type (??) d'une transformée de Laplace rationnelle avec singularités réelles décomposition de Cramér/Coxienne.

Exercice 4.13. a) Écrivez comme combinaison d'exponentielles la fonction $b(t)$ avec transformée

$$b^*(s) = \frac{6}{13} \frac{2s^2 + 10s + 13}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

b) Est-ce une densité ?

Réponse: a) La décomposition en fractions simples donne $b(t) = \frac{15}{13}e^{-t} - \frac{3}{13}(2e^{-2t}) + \frac{1}{13}(3e^{-3t}) \Leftrightarrow \bar{B}(t) = \frac{15}{13}e^{-t} - \frac{3}{13}e^{-2t} + \frac{1}{13}e^{-3t}$ et montre que ce n'est pas une densité hyperexponentielle. b) Oui, car les coefficients $\alpha_i = \frac{\beta_i}{\prod_{j=i}^n \lambda_j}$ de la décomposition Coxiennne sont $\alpha = \left\{ \frac{5}{13}, \frac{4}{13}, \frac{4}{13} \right\}$, donc positifs. Vérifier la réponse avec le package BUTools, en utilisant la commande : `APHRepresentation([\frac{15}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{1}{13}], diag([-1, -2, -3]))`

Remarque 4.11. *L'exercice antérieur suggère que les lois d'Erlang généralisées fournissent une meilleure base pour démontrer la positivité que les hyperexponentielles.*

Exercice 4.14. *Montrer que la fonction*

$$f(t) = 3(e^{-t}) - 3(2e^{-2t}) + 3e^{-3t}$$

est une densité, en calculant la transformée de Laplace et sa décomposition Coxiennne. Donner le vecteur initial et la matrice bidiagonale A dans la représentation Coxiennne de f(t).

Exercice 4.15. *a) Montrer que la fonction*

$$2e^{-t} - 6e^{-2t} + 6e^{-3t} = 2e^{-t} - 3(2e^{-2t}) + 2(3e^{-3t}) = 2e^{-t}g(t)$$

est une densité.

b) La transformée de Laplace est

$$f^*(s) = \frac{2(s^2 + 2s + 3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{2}{3} \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} - \frac{1}{3} \frac{6}{(s+2)(s+3)} + \frac{2}{3} \frac{3}{s+3}$$

Donner des bornes inférieures et supérieures pour l'ordre d de la représentation Coxiennne minimale, en utilisant BuToolsVerbose = 1 CheckMEPositive[α, A] de BUTools.

Réponse: a) $g(t) = e^t f(t)/2 = 1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t}$. $g'(t) = 3e^{-t} - 6e^{-2t} = 3e^{-t}(1 - 2e^{-t}) = 0 \Leftrightarrow t_* = \text{Ln}[2] > 0$. $g(t_*) = \frac{1}{8} > 0$ donc $g(t) > 0$ et $f(t)$ est une densité. b) $4 \leq d \leq 5$ (BUTools ne détermine pas l'ordre de la représentation minimale, qui est 4).

Exercice 4.16. *Est-ce que la fonction*

$$f(t) = 4(e^{-t}) - 6(2e^{-2t}) + 3(3e^{-3t})$$

est une densité? Est-ce une densité de type phase? Vérifier la réponse en BUTools avec CheckMEPositive[α, A].

Exercice 4.17 (*). *Est-ce que la fonction*

$$\bar{F}[t] = \frac{21}{5}e^{-2x} - \frac{35}{4}e^{-3x} + \frac{77}{12}e^{-4x} - \frac{13}{15}e^{-7x}$$

est une fonction de survie ? S'agit-il d'une loi Coxiennne, et si oui, de quel ordre ?

Réponse: En tentant notre chance avec la décomposition Coxiennne, on découvre que l'ordre est 4.

Exercice 4.18 (*). *Ecrivez des équations déterminant les coefficients β_i dans la décomposition Coxiennne*

$$\frac{N[s]}{[s - \gamma_1][s - \gamma_2][s - \gamma_3][s - \gamma_4]} = \frac{\beta_1}{[s - \gamma_1][s - \gamma_2][s - \gamma_3][s - \gamma_4]} + \frac{\beta_2}{[s - \gamma_2][s - \gamma_3][s - \gamma_4]} + \frac{\beta_3}{[s - \gamma_3][s - \gamma_4]} + \frac{\beta_4}{s - \gamma_4}$$

[utilisée pour décomposer la transformée de Laplace]. Donner des formules pour les β_i .

Réponse: $N(s) = \beta_1 + \beta_2(s - \gamma_1) + \beta_3(s - \gamma_1)(s - \gamma_2) + \beta_4(s - \gamma_1)(s - \gamma_2)(s - \gamma_3)$. Cette expansion est appelée le développement de «différences divisées» de Newton http://fr.wikipedia.org/wiki/Interpolation_newtonienne. En posant $s = \gamma_1, \gamma_2, \dots$, on obtient :

$$\begin{cases} \beta_1 = N[\gamma_1] \\ \beta_1 + \beta_2[\gamma_2 - \gamma_1] = N[\gamma_2] \\ \beta_1 + \beta_2[\gamma_3 - \gamma_1] + \beta_3[\gamma_3 - \gamma_2][\gamma_3 - \gamma_1] = N[\gamma_3] \\ \beta_1 + \beta_2[\gamma_4 - \gamma_1] + \beta_3[\gamma_4 - \gamma_2][\gamma_4 - \gamma_1] + \beta_4[\gamma_4 - \gamma_3][\gamma_4 - \gamma_2][\gamma_4 - \gamma_1] = N[\gamma_4] \end{cases}$$

$$\beta_1 = N[\gamma_1], \beta_2 := N[\gamma_1, \gamma_2] = \frac{N[\gamma_2] - N[\gamma_1]}{\gamma_2 - \gamma_1}, \beta_3 := N[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \frac{N[\gamma_1, \gamma_3] - N[\gamma_1, \gamma_2]}{\gamma_3 - \gamma_2},$$

$$\beta_4 := N[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4] = \frac{N[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4] - N[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]}{\gamma_4 - \gamma_3}.$$

β_i sont les «différences divisées» de Newton.

Chapitre 5

Le modèle de risque de Sparre-Andersen

Consider a Sparre-Andersen process generated by pairs of independent interarrival times $A_k, k = 0, 1, \dots$ and with possibly dependent, identically distributed interarrival-claims pairs (A_k, C_k) . We suppose that the interarrival times $A_k, k = 1, 2, \dots$ are identically distributed, denote by $A(t)$ their common cdf of the interarrival, and denote by

$$\hat{a}(\delta) := \int_0^\infty e^{-\delta t} A(dt), \quad \delta \geq 0$$

their Laplace transform. We may allow the initial arrival A_0 to have a possibly different cdf $\tilde{A}_0(t)$. We call this case a **delayed Sparre-Andersen model**, and denote by $\hat{a}_0(\delta)$ the Laplace transform of the initial arrival.

Exercice 5.1. *Assume that the waiting times W_1, W_2, \dots are independent and identically distributed random variables with cdf $F(x)$ and density function $f(x)$. Given $N(t) = i$ and $T_i = s$ for some $s \leq t$, what is the conditional probability of a claim occurring between points in time t and $t + dt$? (This generalization of a Poisson process is called a renewal process.)*

5.1 L'équation de Lundberg généralisée pour le modèle de Sparre-Andersen

L'idée essentielle pour le modèle de Sparre-Andersen/renouvellement, due à De Finetti, est de regarder le processus seulement au moments $T_n = \sum_{i=1}^n A_i$. En ces moments, le processus $X(t)$ est simplement une marche aléatoire

$$S_n = u - \sum_{i=1}^n (C_i - cA_i)$$

La recherche de martingales de Wald de la forme $M_n = e^{sS_n}$ ramène alors à la brique fondamentale du modèle de Sparre-Andersen, **l'équation Cramér Lundberg généralisée** (CLg) :

$$0 = 1 - Ee^{-s(C_i - cA_i)} \implies \widehat{f}_C(s)\widehat{a}(-cs) = 1. \quad (5.1)$$

Le coefficient d'ajustement du processus SA est simplement celui de $C_i - cA_i$.

Remarque 5.1. Dans le cas de Cramér Lundberg, on retrouve le résultat classique : $Ee^{-s(C_i - cA_i)} = \widehat{f}_C(s)\widehat{f}_A(-cs) = \widehat{f}_C(s)\frac{\lambda}{\lambda - cs} = 1$.

Remarque 5.2. La première forme de l'équation est valable aussi avec dépendance entre A_i et C_i . La deuxième forme est valable avec (A_i, C_i) indépendants ($\widehat{a}, \widehat{f}_C$ sont les transformées de Laplace des inter-arrivées et sinistres).

Remarque 5.3. Pour l'étude du processus tué avec un taux exponentiel q , on arrive à l'équation CLg

$$1 = Ee^{-(q-sc)A_i - sC_i} \implies \widehat{f}_C(s)\widehat{a}(q - cs) = 1. \quad (5.2)$$

Exemple 5.1. Avec paires (A_i, C_i) indépendants et C_i exponentiellement distribués de taux μ , le coefficient d'ajustement satisfait l'équation de Kendall (un cas particulier de CLg, qui intervient aussi sans la théorie des files d'attente) :

$$\begin{aligned} 1 &= \widehat{a}(q + c\gamma)\widehat{f}_C(-\gamma) = \widehat{a}(q + c\gamma)\frac{\mu}{\mu - \gamma} \implies \\ \rho &= \rho(q) := 1 - \frac{\gamma}{\mu} = \widehat{a}(q + c\gamma) = \widehat{a}(q + c\mu(1 - \rho)). \end{aligned} \quad (5.3)$$

La fonction $\rho(q)$ est la transformée de Laplace de la densité d'une des caractéristiques les plus importants du processus, le "downward ladder time/temps de ruine à partir de 0".

Remarque 5.4. Il serait possible de faire intervenir à ce point l'analyse classique de marches aléatoires (voir par exemple Feller), qui est basée sur une "factorisation de Wiener-Hopf" de $1 - \widehat{f}_C(s)\widehat{a}(q - cs)$, i.e. la séparation de racines et poles avec partie réelle positive de racines et poles avec partie réelle négative. Ici, nous allons contourner cette approche algébrique, en supposant des :

1. sinistres exponentielles qui assurent l'unicité d'une racine complexe avec partie réelle négative $-\gamma \in \mathbb{R}_-$. Si cette racine existe (le cas des sinistres avec "queues légères"), on appelle $\gamma \in \mathbb{R}_+$ **coefficient d'ajustement**.
2. Un cas plus général où la factorisation peut être encore contournée est celui des sinistres de type phase, qui permettent l'utilisation des propriétés probabilistes comme le manque de mémoire (conditionné par la phase), et ramène aux généralisations matricielles des équations scalaires du premier cas.

5.2 Le modèle de Sparre-Andersen avec sinistres exponentielles

Exercice 5.2. *Montrer que la probabilité de ruine $\psi(u)$, en commençant au moment de l'arrivée d'un sinistre, pour un processus avec sinistres exponentielles de paramètre μ et densité des arrivées $a(t)$ avec espérance finie, est de la forme*

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\gamma}{\mu}\right)e^{-\gamma u},$$

où $-\gamma \in \mathbb{R}_-$ est l'unique racine avec partie réelle négative de l'équation Cramér-Lundberg généralisée.

The Laplace transform of the ruin time in the case of exponential claims has a remarkably simple formula, which is exponential in the initial reserves.

Proposition 5.1. *a) Sparre-Andersen process with exponential claims $C_i \sim \mathcal{E}(\mu)$.*

a) In the zero-delayed case with i.i.d. possibly defective interarrivals-claims pairs $\{(A_i, C_i), i \geq 0\}$, the killed ruin probability takes the form :

$$\boxed{\hat{\psi}(q; u) = E_u \left[e^{-q\tau}, \tau < \infty \right] = \hat{\rho} e^{-\gamma u} = \hat{\rho} e^{-u\mu(1-\hat{\rho})}.} \quad (5.4)$$

where the exponent $\gamma = \gamma(q)$ a positive solution to the CLg (5.2) and the prefactor $\hat{\rho} = \hat{\rho}(q)$ is related to γ by the Kendall equation :

$$\hat{a}(q + c\gamma) \frac{\mu}{\mu - \gamma} = 1 \iff \hat{\rho} = 1 - \frac{\gamma}{\mu} = \hat{a}(q + c\gamma) \in (0, 1). \quad (5.5)$$

b) Delayed SA process. When A_0 has a different law, (5.4) must be modified to :

$$\boxed{\hat{\psi}(q; u) = \hat{a}_0(q + c\gamma) e^{-\gamma u}} \quad (5.6)$$

where $\gamma = \gamma(q)$ satisfies again the GLE (5.5).

We present now a proof that uses a martingale argument for both a) and b), and which may be extended to the more general case of ARMA claims.

Proof. Both equations are an easy consequence of the optional stopping theorem applied to the exponential martingale

$$M_n = e^{-\sum_{i=1}^n ((q+c\gamma)A_i - \gamma C_i)}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Indeed, consider the more general martingale

$$M_n = z^n e^{-\sum_{i=1}^n ((q+c\gamma)A_i - \gamma C_i)}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

where γ satisfies the **generalized Lundberg equation**

$$1 - zEe^{-(q+\gamma c)A_i+\gamma C_i} = 0 = 1 - z\hat{a}(q + c\gamma)\hat{f}_C(-\gamma) = 1 - z\hat{a}(q + c\gamma)\frac{\mu}{\mu - \gamma} \quad (5.8)$$

Note that $\sum_{i=0}^{N_\tau} A_i = \tau$, $\sum_{i=0}^{N_\tau} (cA_i - C_i) = U_\tau - u$ and $\gamma > 0$. Now

$$E[M_0] = 1 = E[z^{N_\tau} e^{-q\tau - \gamma(U_\tau - u)} \mathbb{1}_{\tau < \infty}] = e^{\gamma u} \hat{\psi}(q, z; u) \frac{\mu}{\mu - \gamma},$$

where $\hat{\psi}(q, z; u) = E[z^{N_\tau} e^{-q\tau} \mathbb{1}_{\tau < \infty}]$, and (5.4) follows by taking $z = 1$.

For (5.6), one applies again the optional stopping, but with the time n starting from 1 :

$$E[M_1] = z \hat{a}_0(q + c\gamma) \frac{\mu}{\mu - \gamma} = e^{\gamma u} \hat{\psi}(q, z; u) \frac{\mu}{\mu - \gamma}.$$

Remarque 5.5. *Both equations (5.4), (5.6) continue to hold if the pairs (A_i, C_i) , $i = 1, \dots$ have dependent components with exponential marginal for C_i , with $\gamma > 0$ being a root of the generalized Lundberg equation*

$$Ee^{-(q+\gamma c)A_i+\gamma C_i} = 1$$

(by the memoryless property of the exponential).

Remarque 5.6. *Note (?) that the form*

$$\frac{\hat{\rho}}{\hat{a}(q + c\mu(1 - \hat{\rho}))} = z \quad (5.9)$$

of the generalized Kendall equation (5.8) with exponential claims may be solved for $\hat{\rho}(z)$ via the Lagrange series expansion. The resulting series in z yields one possible approach for resolving (5.4).

Remarque 5.7. *Le processus de Sparre-Andersen avec sinistres exponentielles est plus gérable et parfois plus réaliste peut être que son "jumeau", le processus de Cramér Lundberg.*

Ajoutons aussi que la recherche sur les processus de Sparre-Andersen et récemment Sparre-Andersen perturbé a ramené dans les derniers 10 ans à la théorie des processus MAP spectralement négatifs, une généralisation de la théorie des processus de Lévy spectralement négatifs – voir par exemple la thèse et articles d'Ivanovs.

5.3 The ruin probability of Sparre-Andersen processes with phase type jumps and independent jump-arrivals

The SA (renewal) model with jumps C_i of **phase-type** $(\vec{\beta}, B, M)$ and **independent jump-arrivals** is beautifully reviewed in (? , Ch. IX.4).

Remarque 5.8. *When ruin may happen only by jump, one key idea is to consider row vectors of expectations and probabilities, joint with the phase at ruin. These will be denoted by $\vec{\mathbb{E}}, \vec{\mathbb{P}}$.*

A multivariate ruin formula analogous to (5.4) holds then :

Proposition 5.2. *a) It holds that (? , Pr. 4.1, Ch. IX.4), (? , (2.12)) :*

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{E}}_u[z^{N_\tau} e^{-q\tau}, U(\tau) \leq -y] &= \vec{\psi}(q; u, z) e^{By} \\ &= (\vec{\rho} e^{\Gamma u}) (e^{By}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$= \vec{\rho} e^{(B + \mathbf{b}\vec{\rho})u} e^{By}, \quad (5.11)$$

where $\vec{\psi}(q; u, z) = (\hat{\psi}_1(q; u, z), \dots, \hat{\psi}_m(q; u, z))$ with

$$\hat{\psi}_i(q; u, z) = E_u[z^{N_\tau} e^{-q\tau} \mathbb{1}_{\tau < \infty, C_\tau = i}]$$

for $i = 1, \dots, m$, and C_τ denotes the phase of the ruin causing claim at crossing. Furthermore, $\Gamma = \Gamma(q) = B + \mathbf{b}\hat{\rho}(q)$.

b) The Kendall equation for the "ladder time LT " $\vec{\rho}$ becomes (? , p. 21, Remark 2)

$$\begin{aligned} \vec{\rho}(z, q) &= \vec{\mathbb{E}}_0[z^{N_\tau} e^{-q\tau}] = z\vec{\beta} \int_0^\infty e^{-t(qI - c\Gamma)} dA(t) \\ &= \begin{cases} z\vec{\beta} \hat{a}(qI - c\Gamma) & c > 0 \\ z\hat{a}(q) \vec{\beta} & c = 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Exemple 5.2. *For example, with Poisson arrivals, we have*

$$\vec{\rho}(z, q) = z\lambda\vec{\beta} ((\lambda + q)I - c\Gamma)^{-1} = z\frac{\lambda}{c}\vec{\beta} (\phi(q)I - B)^{-1},$$

where $\phi(q)$ is the unique nonnegative root of the Cramér Lundberg equation.

Remarque 5.9. *This equation may be solved iteratively, or by spectral decomposition, which involves a) finding the precisely m roots $-\gamma_j, j = 1, \dots, m$ of the Cramér Lundberg equation having negative real part, where m is the order of the matrix-exponential type claims, and b) solving a linear system.*

Remarque 5.10. (??) provide further generalizations of the De-Finetti formula (5.4) to a Gerber-Shiu function involving both the prior surplus and the severity of ruin.

Remarque 5.11. Note that

$$\hat{\rho}_i(q; z) = E_0[z^{N_\tau} e^{-q\tau} \mathbb{1}_{\tau < \infty, C_\tau = i}], \quad i = 1, \dots, m$$

is the LT/killed probability of crossing in phase i at first recrossing of the initial level, and that

$$\left(e^{u\Gamma(q)} \right)_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, I \quad (5.13)$$

is the matrix of LT/killed ruin probabilities conditional on a start vertically down in i 'th phase and joint with crossing level u below in j 'th phase.

Finally, the probabilistic interpretation of (5.12) is that $\vec{\rho}(z, q)$ may be decomposed as the product of the phase distribution at the first jump occurring at time t by the transition matrix of phases after after the infimum of the process has dropped by ct .

Remarque 5.12. For $z = 1$ and Poisson arrivals with $\hat{a}(s) = \lambda(\lambda + s)^{-1}$, the equation (5.12) factors :

$$\begin{aligned} (\lambda + q)\vec{\rho} - c\vec{\rho}(B + \mathbf{b}\vec{\rho}) - \lambda\vec{\beta} &= \\ (c\vec{\rho} - \lambda\vec{\beta}(B - \Phi(q)I)^{-1})(\mathbf{b}\vec{\rho} + B - \Phi(q)I) & \\ \implies \vec{\rho} = \frac{\lambda}{c}\vec{\beta}(\Phi(q)I - B)^{-1}, & \end{aligned}$$

yielding the well-known compound Poisson (and Levy) formula—see for example Avram and Usabel (2003).

Exercice 5.3. Refaire les exercices de la section 5.3 par le théorème d'arrêt des martingales.

5.4 La ruine quand les sinistres sont de type phase : la formule d'Asmussen

Supposons que la loi des sinistres est de **type phase** $(\vec{\beta}, B)$, avec fonction de survie $\bar{F}(t) = \vec{\beta}e^{t\mathbf{B}}\mathbf{1}$ (et densité $f(t) = \vec{\beta}e^{t\mathbf{B}}\mathbf{b}$, $\mathbf{b} := (-B)\mathbf{1}$).

Théorème 5.1. Supposons des sinistres de type phase $(\vec{\beta}, B)$.

a) Soit $\vec{\Psi}(u) = (\Psi_1(u), \dots, \Psi_J(u))$, où $\Psi_j(u) = P_u[\{\tau < \infty\}, J(\tau) = j]$, est la probabilité de ruine en supposant que la ruine arrive en phase j . Alors

$$\vec{\Psi}(u) = \vec{\rho}e^{\Gamma u}, \quad \vec{\rho} = \frac{\lambda}{c}\vec{\beta}(-B)^{-1}, \quad \Gamma = B + \mathbf{b}\vec{\rho}. \quad (5.14)$$

En particulier,

$$\vec{\rho} = \vec{\Psi}(0) = (\Psi_1(0), \dots, \Psi_J(0)) = (r_1, \dots, r_J), \quad r_j = P_0[\{\tau < \infty\}, J(\tau) = j]$$

est le vecteur des probabilités des diverses phases à la fin d'un "escalier en bas", après "une excursion en haut", au premier moment où le niveau initial est franchi de nouveau.

b) Les probabilités de ruine avec à partir de u sont :

$$\Psi(u) = \vec{\rho} e^{\Gamma u} \mathbf{1}. \quad (5.15)$$

c) Nous allons nous intéresser aussi dans les probabilités de ruine quand un saut en bas (sinistre) est en train d'avoir lieu au moment initial $t = 0$. Pour cela, introduisons une matrice d'inconnues

$$\Phi_j(i, u), \quad i = 1, \dots, J, \quad j = 1, \dots, J \quad (5.16)$$

où les inconnues $\Phi_j(i, u), i = 1, \dots, J, j = 1, \dots, J$ représentent les probabilités de ruine avec la ruine arrivant en phase j , en commençant avec un sinistre en phase i . Alors

$$\Phi(u) = e^{\Gamma u}. \quad (5.17)$$

d) Les probabilités de ruine quand un saut en bas (sinistre) est en train d'avoir lieu au moment initial $t = 0$ sont

$$\vec{\Psi}_-(u) = \vec{\beta} \Phi(u) = \vec{\beta} e^{\Gamma u}. \quad (5.18)$$

Remarque 5.13. Le vecteur des probabilités

$$\vec{\rho} = (P_0[\{\tau < \infty\}, J(\tau) = j], j = 1, \dots, J)$$

joue un rôle important dans la théorie de la ruine, permettant d'obtenir la **loi de l'escalier en bas** :

$$P_0[\{\tau < \infty\}, -X(\tau) > y] = \vec{\rho} e^{By} \mathbf{b},$$

(car $(e^{By} \mathbf{b})_j = P_0[\{-X(\tau) > y | \tau < \infty\}, J(\tau) = j]$).

Demo probabiliste : c) La clé est la consideration de la phase du processus Markovien de "phase" $J(\bar{X}_t) \in \{1, \dots, J\}$ "aux moments où le minimum du processus descend". Cela révèle la formule

$$\Gamma = B + \mathbf{b} \vec{\rho}$$

pour la matrice sous-génératrice de la phase, et finalement

$$\Phi(u) = e^{u\Gamma}, \quad \vec{\Psi}_-(u) = \vec{\rho} \Phi(u) = \vec{\rho} e^{u\Gamma}.$$

b) est une conséquence immédiate de a).

d) Est une conséquence immédiate de c), et la forme du résultat a) est aussi une conséquence immédiate de c).

Il nous reste seulement de montrer que $\vec{\rho} = \frac{\lambda}{c} \vec{\beta} (-B)^{-1}$.

Pour cela, faisons un conditionnement sur le temps $t_1 = t$ du premier saut en bas :

$$\vec{\Psi}(u) = \vec{\rho} e^{u\Gamma} = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \vec{\Psi}_-(u+ct) dt = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \vec{\beta} e^{(u+ct)\Gamma} dt. \quad (5.19)$$

Après simplification de $e^{u\Gamma}$ (ou en supposant du début $u = 0$) on trouve l'équation :

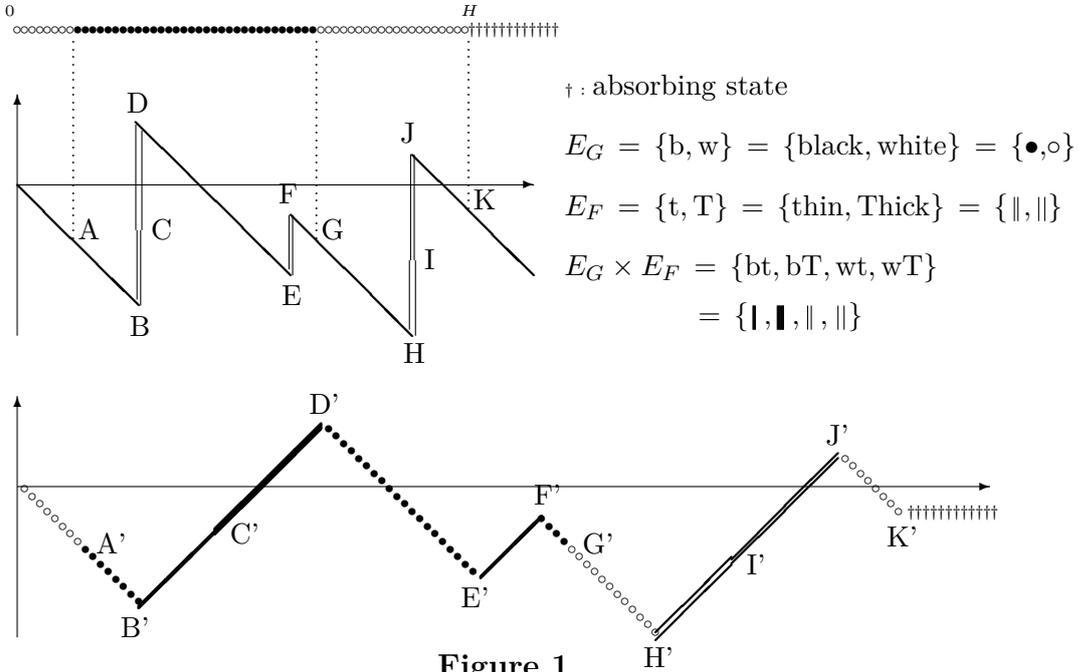
$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \vec{\beta} e^{\Gamma ct} dt E q \rho = \lambda \vec{\beta} (\lambda I - c\Gamma)^{-1} = \tilde{\lambda} \vec{\beta} (\tilde{\lambda} I - \Gamma)^{-1} \\ \vec{\rho} (\tilde{\lambda} I - (B + \mathbf{b}\vec{\rho})) - \tilde{\lambda} \vec{\beta} &= (\vec{\rho} B + \tilde{\lambda} \vec{\beta}) (I - \mathbf{1}\vec{\rho}) = 0 \end{aligned}$$

où $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{c}$ §. La solution

$$\vec{\rho} = \tilde{\lambda} \vec{\beta} (-B)^{-1} \quad (5.20)$$

est obtenue en annulant le premier facteur.

Remarque 5.14. La formule (5.20) remplace l'inversion de la transformée de Laplace avec la résolution d'un système linéaire pour $\vec{\rho}$.



§. Plus généralement, si X contient une composante spectrale positive X_+ avec symbole $\kappa_+(s)$, alors $\tilde{\lambda} = \kappa_+(\lambda)$

Démo algébrique (*) : La formule (5.15) est bien sur équivalente à la formule de Pollaczek-Khinchine

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}\vec{\beta}(-B)^{-1}(sI - B - \mathbf{b}\vec{\rho})^{-1}\mathbf{1} &= \frac{1}{s} - \frac{1 - \rho}{s(1 - \tilde{\lambda}\vec{\beta}(sI - B)^{-1}\mathbf{1})} = \frac{\rho - \tilde{\lambda}\widehat{F}(s)}{s(1 - \tilde{\lambda}\vec{\beta}(sI - B)^{-1}\mathbf{1})} \\ &= \frac{1}{s(1 - \tilde{\lambda}\widehat{F}(s))} \tilde{\lambda}\vec{\beta}((-B)^{-1} - (sI - B)^{-1})\mathbf{1} = \frac{1}{1 - \tilde{\lambda}\widehat{F}(s)} \tilde{\lambda}\vec{\beta}(-B)^{-1}(sI - B)^{-1}\mathbf{1},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité des résolvantes

$$(sI - G)^{-1} - (s'I - G)^{-1} = (s' - s)(sI - G)^{-1}(s'I - G)^{-1}. \quad (5.21)$$

La vérification demande encore l'identité Sherman–Morrison pour l'inverse d'une modification de rang 1 d'une matrice :

$$(A - \mathbf{b}\vec{\rho})^{-1} = A^{-1} + \frac{1}{1 - \vec{\rho}A^{-1}\mathbf{b}}A^{-1}\mathbf{b}\vec{\rho}A^{-1} = A^{-1} \left(I + \frac{1}{1 - \vec{\rho}A^{-1}\mathbf{b}}\mathbf{b}\vec{\rho}A^{-1} \right) \quad (5.22)$$

Utilisant (7.7) avec $A = (sI - B)$, et en remarquant aussi $\vec{\rho}(sI - B)^{-1}\mathbf{b} := \vec{\rho}\widehat{f}(s) = \tilde{\lambda}\widehat{F}(s)$

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}\vec{\beta}(-B)^{-1}(sI - B)^{-1} \left(I + \frac{1}{1 - \vec{\rho}(sI - B)^{-1}\mathbf{b}}\mathbf{b}\vec{\rho}(sI - B)^{-1} \right) \mathbf{1} &= \\ \tilde{\lambda}\vec{\beta}(-B)^{-1}(sI - B)^{-1} \left(I + \frac{1}{1 - \tilde{\lambda}\widehat{F}(s)}\mathbf{b}\vec{\rho}(sI - B)^{-1} \right) \mathbf{1} &= \\ \vec{\rho}(sI - B)^{-1}\mathbf{1} + \frac{\tilde{\lambda}\widehat{F}(s)}{(1 - \tilde{\lambda}\widehat{F}(s))}\vec{\rho}(sI - B)^{-1}\mathbf{1} &= \vec{\rho}(sI - B)^{-1}\mathbf{1} \frac{1}{1 - \tilde{\lambda}\widehat{F}(s)}\end{aligned}$$

on trouve notre identité.

Exercice 5.4. Redémontrer à partir de (5.15) que pour des sinistres ayant une loi Erlang(2, μ), la probabilité de ruine est

$$e^{-u\mu} (\rho \cosh(u\mu\sqrt{\rho}) + \sqrt{\rho} \sinh(u\mu\sqrt{\rho}))$$

Chapitre 6

Le processus de Cramér-Lundberg avec perturbation Brownienne

Consider the Cramér Lundberg process with Brownian perturbation

$$X(t) - u = \sigma B(t) + ct - \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i,$$

with Laplace exponent

$$\kappa(s) = ps + \frac{\eta_{2,\sigma}}{2} s^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (-s)^k \frac{\lambda m_k}{k!}, \quad (6.1)$$

where λm_k are the moments of the Lévy density, $\eta_{2,\sigma} = \lambda m_2 + \sigma^2$, and $p = c - \lambda m_1 > 0 = \lambda m_1 \theta$ is the Levy drift/profit rate.

For this process, we have, besides $\Psi(u)$, two unknowns of interest : the probability of "creeping ruin" by diffusion $\Psi_d(u)$, and that of "ruin by jump" $\Psi_j(u)$. The respective IDE's and "obvious boundary conditions" are :

$$G\Psi_j(u) + \lambda \bar{F}(u) = 0 \quad \Psi_j(0) = 0 \quad (6.2)$$

$$G\Psi_d(u) = 0, \quad \Psi_d(0) = 1 \quad (6.3)$$

$$G\Psi(u) + \lambda \bar{F}(u) = 0, \quad \Psi(0) = 1 \quad (6.4)$$

Taking Laplace transform, putting $D = \frac{\sigma^2}{2}$ and using the fact that the factor s of $\kappa(s)$ must appear also in the RHS (since the positive loading condition implies that $s = 0$ is not a singularity) yields

$$\begin{aligned} \kappa(s) \widehat{\Psi}_j(s) &= D(\Psi'_j(0)) - \lambda \widehat{F}(s), & D\Psi'_j(0) - \lambda m_1 &= 0 \\ \kappa(s) \widehat{\Psi}_d(s) &= D(s + \Psi'_d(0)) + c, & D\Psi'_d(0) + c &= 0 \\ \kappa(s) \widehat{\Psi}(s) &= D(s + \Psi'(0)) + c - \lambda \widehat{F}(s), & D\Psi'(0) + c - \lambda m_1 &= 0 \end{aligned}$$

Solving for the Laplace transforms yields :

$$\widehat{\Psi}_j(s) = \frac{\tilde{\lambda}(m_1 - \widehat{F}(s))}{\kappa(s)} = \frac{\lambda(m_1 - \widehat{F}(s))}{s(s + \tilde{c} - \tilde{\lambda}\widehat{F}(s))}, \quad (6.5)$$

$$\widehat{\Psi}_d(s) = \frac{Ds}{\kappa(s)} = \frac{D}{Ds + c - \lambda\widehat{F}(s)} = \frac{1}{s + \tilde{c} - \tilde{\lambda}\widehat{F}(s)} \quad (6.6)$$

$$\widehat{\Psi}(s) = \frac{Ds - \lambda(\widehat{F}(s) - m_1)}{\kappa(s)} \iff \widehat{\Psi}(s) = \frac{c - \lambda m_1}{\kappa(s)} = \frac{\kappa'(0)}{\kappa(s)}, \quad (6.7)$$

where $\tilde{\lambda}, \tilde{c}$ indicate scaled values divided by $\frac{\sigma^2}{2}$.

Remarque 6.1. *The last formula shows, as well-known, that the Pollaczek-Khinchine formula is insensitive to the form of the spectrally negative Levy process involved, when written in terms of the symbol $\kappa(s)$.*

Remarque 6.2. *The second formula implies that*

$$\widehat{\Psi}_d(s) = \frac{\sigma^2/2}{\kappa'(0)} \widehat{\phi}(s) = \tilde{p}^{-1} \widehat{\phi}(s), \quad \widehat{\Psi}_j(s) = \frac{1 - \widehat{\phi}(s)}{s} - \tilde{p}^{-1} \widehat{\phi}(s), \quad \tilde{p} = \frac{p}{\sigma^2/2} \quad (6.8)$$

where $\phi(u)$ is the density of the continuous part of the aggregated loss $L = \sup_t \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i - ct - \sigma B(t)$, with transform

$$\widehat{\phi}(s) = 1 - s\widehat{\Psi}(s) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho\widehat{f}_e(s) + s/\tilde{c}} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p} - \tilde{\lambda}(\widehat{F}(s) - m_1) + s} \quad (6.9)$$

Thus, knowing $\widehat{\phi}(s)$ or $\widehat{\Psi}_d(s)$ determines all the other transforms. For example, $\widehat{\Psi}_j(x) = \int_0^x \widehat{\Psi}_d * (u)g(x-u)du$, where $g(x) = m_1 - 1 + \int_x^\infty \widehat{F}(u)du$.

In conclusion, we recover the results of Dufresne and Gerber

Proposition 6.1. *The probabilities of ruin by diffusion $\Psi_d(u)$ and by jump $\Psi_j(u)$ satisfy the boundary conditions*

$$\boxed{\Psi_d(0) = 1, \Psi_j(0) = 0, \Psi'_d(0) = -\tilde{c}, \Psi'_j(0) = \tilde{\lambda}m_1}, \quad (6.10)$$

and their Laplace transforms satisfy

$$\tilde{p}\widehat{\Psi}_d(s) = \phi(s), \quad \widehat{\Psi}_j(s) = \frac{1 - \tilde{p}\widehat{\Psi}_d(s)}{s} - \widehat{\Psi}_d(s) = \frac{1 - \phi(s)}{s} - \frac{\phi(s)}{\tilde{p}} \quad (6.11)$$

where $\widehat{\phi}(s) = \frac{1-\rho}{1-\rho\widehat{f}_e(s)+\frac{\sigma^2}{2c}s}$, $\tilde{p} = \frac{p}{\sigma^2/2}$.

Exercice 6.1. *Trouver les probabilités de ruine du processus perturbé (par diffusion et par saut), avec des sauts exponentiels de taux β , avec exposant de Lévy*

$$\kappa(s) = \frac{\sigma^2 s^2}{2} + cs - \lambda \frac{s}{s + \beta}.$$

Solution :

1. $\Psi(x)$ satisfait l'IDE :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2} \Psi''(x) + c\Psi'(x) + \lambda \left(\int_0^x \Psi(x-z) \beta e^{-\beta z} dz + e^{-\beta x} - \Psi(x) \right) &= 0 \\ \Psi(0) = 1, \quad \Psi(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

2. Les formules pour les transformées de Laplace sont :

$$\bar{\Psi}^*(s) = \frac{\kappa'(0)}{\kappa(s)} = \frac{c - \lambda/\beta}{s(\frac{\sigma^2}{2}s + c - \frac{\lambda}{\beta+s})} \implies \hat{\phi}(s) = (\tilde{c} - \tilde{\lambda}/\beta) \frac{\beta + s}{(s + \tilde{c})(\beta + s) - \tilde{\lambda}}.$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{\kappa'(0)}{\kappa(s)} = \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda/\beta}{s(\frac{\sigma^2}{2}s + c - \frac{\lambda}{\beta+s})} = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{c - \lambda/\beta}{\frac{\sigma^2}{2}s + c - \frac{\lambda}{\beta+s}} \right) \\ &= \frac{1}{s} \frac{\frac{\sigma^2}{2}s + \frac{\lambda s}{\beta(\beta+s)}}{\frac{\sigma^2}{2}s + c - \frac{\lambda}{\beta+s}} = \frac{\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\lambda}{\beta(\beta+s)}}{\frac{\sigma^2}{2}s + c - \frac{\lambda}{\beta+s}} = \frac{1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\beta(\beta+s)}}{s + \tilde{c} - \frac{\tilde{\lambda}}{\beta+s}} = \frac{\beta + s + \frac{\tilde{\lambda}}{\beta}}{(\beta + s)(s + \tilde{c}) - \tilde{\lambda}} \end{aligned}$$

$$\hat{\Psi}_d(s) = \frac{\sigma^2/2}{p} \hat{\phi}(s) = \frac{\beta + s}{(s + \tilde{c})(\beta + s) - \tilde{\lambda}} = \frac{s + \beta}{(s + \gamma_1)(s + \gamma_2)}, \quad (6.12)$$

$$\hat{\Psi}_j(s) = \hat{\Psi}(s) - \hat{\Psi}_d(s) = \frac{\frac{\tilde{\lambda}}{\beta}}{(\beta + s)(s + \tilde{c}) - \tilde{\lambda}} = \frac{\frac{2\lambda}{\sigma^2\beta}}{(s + \gamma_1)(s + \gamma_2)} \quad (6.13)$$

où γ_1, γ_2 sont les valeurs absolues des racines négatives de l'équation Cramér Lundberg "simplifiée" :

$$s^2 + s(\tilde{c} + \beta) + \tilde{c}\beta - \tilde{\lambda} = 0$$

qui satisfont $\gamma_1 < \beta < \gamma_2$.

3. It follows that

$$\begin{aligned} \Psi_j(u) &= \frac{\tilde{\lambda}}{\beta} \frac{e^{-\gamma_1 u} - e^{-\gamma_2 u}}{\gamma_2 - \gamma_1} \\ \Psi_d(u) &= \frac{\beta - \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_1 u} + \frac{\gamma_2 - \beta}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_2 u} \\ \Psi(u) &= \frac{1 - \gamma_1/\beta}{1 - \gamma_1/\gamma_2} e^{-\gamma_1 u} + \frac{1 - \gamma_2/\beta}{1 - \gamma_2/\gamma_1} e^{-\gamma_2 u}, \end{aligned}$$

The equality $\Psi(u) = \Psi_d(u) + \Psi_j(u)$ may be checked using $\gamma_1 + \gamma_2 = \tilde{c} + \beta$, $\gamma_1\gamma_2 = \tilde{c}\beta - \tilde{\lambda}$.

Remarque 6.3. The ladder decomposition, $\sigma > 0$. A beautiful probabilistic interpretation of the last Pollaczek-Khinchine formula (3.12) was discovered by Dufresne-Gerber, and recently rederived in an elementary way by Kella, by considering Then, writing (6.9) as :

$$\phi(s) = \frac{1}{1 + s/(c/D)} \frac{1 - \rho}{1 - \rho \widehat{f}_e(s) \frac{1}{1+s/(c/D)}} \quad (6.14)$$

reveals the fact that L is an independent sum of a "first creep at the current infimum", which is an exponential of rate $\frac{2c}{\sigma^2}$, and of an alternating geometric sum of jump ladders and further upcreeps – see (? , Fig 2), (?).

Remarque 6.4. La recherche sur les processus de Cramér Lundberg et Cramér Lundberg perturbé, influencée aussi par l'essor des mathématiques financières dans les derniers 40 ans, a culminé récemment dans la théorie des processus de Lévy spectralement négatifs – voir par exemple les monographs de Bertoin et Kyprianou.

6.1 Approximations de type Padé pour les probabilités de ruine du processus de Cramér-Lundberg perturbé

To satisfy the boundary conditions $\Psi_d(0) = 1, \Psi_j(0) = 0, \Psi'_d(0) = -\tilde{c}, \Psi'_j(0) = \tilde{\lambda}m_1$, as well as the Dufresne-Gerber equations (6.11), we must use at least a (1, 2) Padé approximation.

Let us look for (1, 2) Padé approximations of the form

$$\widehat{\Psi}_j(s) = \frac{a_j}{s^2 + b_1s + b_0}, \quad \widehat{\Psi}_d(s) = \frac{s + a_d}{s^2 + b_1s + b_0}$$

satisfying thus $\lim_{s \rightarrow \infty} s\widehat{\Psi}_j(s) = \Psi_j(0) = 0$, and $\lim_{s \rightarrow \infty} s\widehat{\Psi}_d(s) = \Psi_d(0) = 1$. The Dufresne-Gerber equations (6.11) impose two more condition $b_0 = \tilde{p}a_d, b_1 = a_d + a_j + \tilde{p}$, leaving only two coefficients a_j, a_d to determine.

We determine now the coefficients a_j, a_d by equating the first coefficients in the Padé approximation of $\widehat{\Psi}_d(s)$ around 0, using $\widehat{F}(s) = m_1 - \frac{m_2}{2}s + \frac{m_3}{3!}s^2 + \dots$

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_d(s) &= \frac{1}{s + \tilde{c} - \tilde{\lambda}\widehat{F}(s)} = \frac{1}{\tilde{p} + (1 + \tilde{\lambda}\frac{m_2}{2})s - \tilde{\lambda}\frac{m_3}{3!}s^2 + \dots} \approx \frac{s + a_d}{s^2 + (a_d + a_j + \tilde{p})s + a_d\tilde{p}} \\ (a_d + s)(\tilde{p} + (1 + \tilde{\lambda}\frac{m_2}{2})s - \tilde{\lambda}\frac{m_3}{3!}s^2 + \dots) &\approx s^2 + (a_d + a_j + \tilde{p})s + a_d\tilde{p} \end{aligned}$$

This yields :

$$\begin{cases} a_j = a_d\tilde{\lambda}\frac{m_2}{2} \\ a_d = \frac{3m_2}{m_3} \end{cases}$$

Théorème 6.1. *Let*

$$a_d = \frac{3m_2}{m_3}, \quad a_j = a_d \tilde{\lambda} \frac{m_2}{2} = \frac{3\lambda m_2^2}{\sigma^2 m_3} \quad (6.15)$$

and let $-\gamma_1, -\gamma_2$ denote the roots of

$$s^2 + (a_d + a_j + \tilde{p})s + a_d \tilde{p} = 0 \quad (6.16)$$

Then :

1. The discriminant of (6.16) is always non-negative. Assuming w.l.o.g. $\gamma_1 < \gamma_2$, it holds that and $0 < \gamma_1 < a_d < \gamma_2$.
2. The approximations for the "creeping ruin" and "ruin by jump"

$$\begin{aligned} \Psi_d(x) &= \frac{a_d - \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_1 x} + \frac{\gamma_2 - a_d}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_2 x} \\ \Psi_j(x) &= \frac{a_j}{\gamma_2 - \gamma_1} [e^{-\gamma_1 x} - e^{-\gamma_2 x}], \end{aligned} \quad (6.17)$$

satisfy (6.11), the first two conditions in (6.10) $\Psi_d(0) = 1, \Psi_j(0) = 0$, fit the first two moments of the aggregate loss L , and are admissible.

3. In terms of moments, the Laplace transforms are :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_d(s) &= \frac{6m_2 + 2sm_3}{2m_3 s^2 + (3\lambda m_2^2 + 6m_2 + 2pm_3)s + 6pm_2} \\ \hat{\Psi}_j(s) &= \frac{3\lambda m_2^2}{2m_3 s^2 + (3\lambda m_2^2 + 6m_2 + 2pm_3)s + 6pm_2} \end{aligned}$$

Proof : 1. Let us note that $s^2 + (a_d + a_j + \tilde{p})s + a_d \tilde{p}$ is negative at $s = -a_d$ (since $(a_d)^2 + (a_d + a_j + \tilde{p})(-a_d) + a_d \tilde{p} = -a_d a_j < 0$, and a_d and a_j are positive. In particular, the discriminant must be non-negative and $\gamma_1 < a_d < \gamma_2$.

2. Laplace inversion yields now (6.17). Furthermore, Ψ_j is admissible by the assumption $\gamma_1 < \gamma_2$ and Ψ_d is admissible as sum of positive terms.

Remarque 6.5. *The data approximation and stationary excess approximation are of the same form, with $a_d = m_1^{-1}, a_j = \lambda m_1$, and $a_d = \tilde{m}_1^{-1} = \frac{2m_1}{m_2}, a_j = \lambda \tilde{m}_1 = \lambda \frac{m_2}{2m_1}$, respectively. Our approximation, which uses the third moment as well, is in some sense a generalization of DeVyllder's.*

Remarque 6.6. *In the case of exponential claims of rate β , all three approximations are exact, reducing to the well-known formulas*

$$\begin{aligned} \Psi_j(u) &= \frac{\frac{2\lambda}{\sigma^2 \beta}}{\gamma_2 - \gamma_1} (e^{-\gamma_1 u} - e^{-\gamma_2 u}) \\ \Psi_d(u) &= \frac{\beta - \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_1 u} + \frac{\gamma_2 - \beta}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_2 u} \end{aligned}$$

For example, with $\frac{\sigma^2}{2} = 1, \lambda = \frac{1}{2}, p = 1$, and exponential claims of rate 1, the Cramér Lundberg roots are $\gamma_1 = 1/2, \gamma_2 = 2, a_d = 1, a_j = \frac{1}{2}$, and the ruin probabilities are

$$\begin{aligned}\Psi_j(x) &= \frac{1}{3}(e^{-x/2} - e^{-2x}) \\ \Psi_d(x) &= \frac{1}{3}e^{-x/2} + \frac{2}{3}e^{-2x} \\ \Psi(x) &= \frac{2e^{-x/2}}{3} + \frac{e^{-2x}}{3}.\end{aligned}$$

Ren (2005) donne une **représentation de type phase** pour les probabilités de ruine du processus de Cramér-Lundberg avec perturbation Brownienne :

$$\begin{aligned}\psi(u) &= (1, 0, 0, \dots)e^{uQ} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -\frac{c}{\sigma^2/2} & \frac{c}{\sigma^2/2} \frac{\lambda}{c} \beta (-B)^{-1} \\ \mathbf{b} & B \end{pmatrix} \\ \psi_d(u) &= (1, 0, 0, \dots)e^{uQ} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_j(u) = (1, 0, 0, \dots)e^{uQ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dans notre exemple $c = \frac{3}{2}, \tilde{l} = \frac{1}{2}, \vec{\rho} = \frac{1}{2}$, et

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de Q $-\frac{1}{2}, -2$ coïncident avec les racines Cramér Lundberg négatives.

Chapitre 7

Probabilités de ruine en temps fini et sur un horizon infini

Les probabilités de ruine en temps fini $\Psi(t|u)$ (1.3) semblent être plus difficiles à calculer que ceux sur un horizon infini. Intuitivement, cela vient du fait qu'à chaque moment $s < t$ on a une nouvelle inconnue qu'il faut en tenir compte, le temps qui reste $t - s$. Techniquement, l'équation de Kolmogorov qu'elles satisfont est une équation intégro-différentielle **partielle** (par rapport à u et t). Les solutions explicites sont quasi-absentes, avec l'exception du cas des sinistres exponentielles – voir exemple ??.

Par contre, il s'avère que la transformée de Laplace en t

$$\psi(u) = E_u e^{-q\tau}$$

peut être aussi obtenue assez facilement par toutes les méthodes déjà vues pour calculer les probabilités de ruine : martingales de Wald, etc. Cela n'est pas surprenant, car la transformée de Laplace remplace la dérivée par rapport à t par multiplication.

Notons quelques différentes définitions possibles pour la transformée :

$$\begin{aligned} \psi(u) &= E_u e^{-q\tau} = \int_0^\infty e^{-qt} \Psi(dt, u) = \int_0^\infty e^{-qt} \psi(t|u) dt \\ &= \int_0^\infty q e^{-qt} P_u[\tau \leq t] dt = P_u[\tau \leq \mathcal{E}] \end{aligned} \quad (7.1)$$

où $\psi(t|u) = \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t|u)$ denote la densité du temps de ruine, où la deuxième ligne est obtenue en intégrant par parties, et où \mathcal{E} est une variable exponentielle indépendante de paramètre q .

Remarque 7.1. *Les dernières égalités suggèrent l'interprétation des probabilités de ruine d'un processus "terminé/tué" après une v.a. indépendante exponentielle \mathcal{E} de taux q , (ou, alternativement, tué en chaque intervalle dt avec probabilité qdt).*

Remarque 7.2. *Techniquement, $\psi(u)$ n'est pas plus difficile à obtenir que $\Psi(u)$, pour chaque q fixe (intuitivement, un horizon exponentiel et un horizon*

infini sont pareil, car le temps qui passe ne change rien, et on n'a pas besoin d'une montre !)

Finalement, en repetant le calcul pour plusieurs q et en inversant la transformée on arrive, avec un peu plus d'effort, a calculer $\psi(t|u)$!.

Exercice 7.1. a) Calculer, en utilisant une martingale de Wald les probabilités de ruine $\psi(u)$ d'un processus Cramér Lundberg sur un horizon de loi exponentielle $\mathcal{E}(q)$ de taux q , au cas où les sinistres ont une densité $\mu e^{-\mu x}$.

b) Démontrer l'identité de Gerber pour les processus de Cramér Lundberg tués.

Réponse: La transformée de Laplace $\psi_q(u)$ est obtenue en stoppant la martingale de Wald $M_t = e^{\theta X(t) - qt}$, où $\theta = \theta(q)$ est la solution négative de l'équation de Cramér-Lundberg $\kappa(\theta) = q$. On trouve que la probabilité de ruine avec sinistres exponentielles de taux μ , avant un horizon exponentiel \mathcal{E} est exponentielle :

$$\psi(x) = P_x[\tau < \mathcal{E}] = (1 + \frac{s_-}{\mu})e^{xs_-} = \frac{\lambda/c}{\mu + s_+}e^{xs_-},$$

où s_{\pm} sont les racines positive et négative de l'équation de Cramér-Lundberg :

$$\kappa(s) = q, \tag{7.2}$$

qui se réduit ici a une équation quadratique $cs^2 + s(c\mu - \lambda - q) - q\mu = 0$.

On peut aussi utiliser la formule (7.5).

7.1 La formule de Pollaczek-Khinchine pour le processus de Cramér Lundberg tué

Il s'avère que tous les fomules valables pour les processus de Lévy admettent des généralisations valables pour les processus de Lévy tués, obtenues essentiellement en remplaçant $\kappa(s)$ par $\kappa(s) - q$.

Théorème 7.1. Généralisation de la formule Pollaczek-Khinchine pour les processus de Lévy spectrallement négatifs tués :

$$\hat{\psi}(s)(cs - \lambda s \hat{F}(s) - q) = c\Psi(0) - \lambda \hat{F}(s) \Leftrightarrow$$

$$\hat{\psi}(s) = \frac{c\Psi(0) - \lambda \hat{F}(s)}{\kappa(s) - q} = \boxed{\lambda \frac{\hat{F}(\Phi) - \hat{F}(s)}{\kappa(s) - q}}, \quad \Psi(0) = \tilde{\lambda} \hat{F}(\Phi) \tag{7.3}$$

où $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{c}$, et où Φ est l'unique racine positive du denominateur[§].

§. La dernière formule continue d'être vraie pour le modèle Sparre-Andersen, avec arrivées type phase d'ordre n , si on remplace $\hat{F}(\Phi)$ avec le polynôme d'interpolation de

Dem : L'équation de Kolmogorov pour les processus de Lévy tués est :

$$\tilde{\mathcal{G}}\Psi(x) - (\lambda + q)\Psi(x) + \lambda\bar{F}_C(x) = 0, \quad \Psi(x) = 1, \text{ si } x < 0, \quad \Psi(\infty) = 0,$$

où $\tilde{\mathcal{G}}h(x) = ch'(x) + \lambda \int_0^x h(x-z)f_C(z)dz$.

Le terme de convolution dans cette dernière équation est finalement enlevé par une deuxième transformée de Laplace.

Remarque 7.3. L'inconnue $\Psi(0)$ a été éliminé encore une fois par le "truc de la simplification de la fausse singularité" en Φ .

Remarque 7.4. En comparant la formule encadrée $\hat{\psi}(s) = \lambda \frac{\hat{F}(\Phi) - \hat{F}(s)}{\kappa(s) - q}$ avec son cas particulier $q = 0$, nous voyons que la différence est que la singularité apparente $s = 0$ du cas particulier $\hat{\Psi}(s) = \lambda \frac{\hat{F}(0) - \hat{F}(s)}{\kappa(s)}$ s'est déplacée en Φ .

Exercice 7.2. a) Obtenir une équation ID pour les probabilités de ruine $\psi_q(u)$ d'un processus Cramér Lundberg sur un horizon de loi exponentielle $\mathcal{E}(q)$ de taux q , ainsi que la transformée de Laplace $\hat{\psi}_q(s) = \int_0^\infty e^{-su}\psi_q(u)du$, au cas où les arrivées des sinistres ont une "sous-densité" $\lambda'e^{-\lambda x}$, $\lambda' \leq \lambda$ de masse totale $\frac{\lambda'}{\lambda} \leq 1$.

b) Qu'est-ce qu'on obtient au cas particulier des sinistres ayant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$ de taux μ ?

Remarque 7.5. Comme $\hat{\psi}(s)$ est une transformée de Laplace double, il est intéressant de calculer aussi les transformée de Laplace

$$\hat{\rho} = \int_0^\infty e^{-qt}\psi(t;0)dt = \lim_{s \rightarrow \infty} s\hat{\psi}(s) = \tilde{\lambda}\hat{F}(\Phi) = 1 - \frac{\tilde{q}}{\Phi}$$

(?).

Remarquons que l'équation

$$\Phi(1 - \tilde{\lambda}\hat{F}(\Phi)) = \tilde{q} \iff \hat{\rho} = \tilde{\lambda}\hat{F}\left(\frac{\tilde{q}}{1 - \hat{\rho}}\right)$$

peut être résolue par inversion de Lagrange-Burmman ou par des méthodes itératives.

Newton $p_N(s)$ d'ordre $n - 1$ de $\hat{F}(s)$, qui passe par les racines avec partie réelle positive de l'équation de Lundberg généralisée. Cela est vrai aussi pour des fonctions Gerber-Shiu (qui généralisent les probas de ruine). On trouve :

$$\hat{\phi}(s) = \frac{p_N(s) - a_1(q - cs)\hat{w}(s)}{a_1(q - cs)\hat{f}_Z(s) - a_2(q - cs)}, \quad (7.4)$$

where $\hat{a}(s) = \frac{a_1(s)}{a_2(s)}$ denotes an irreducible representation of the Laplace transform $\hat{a}(s) = Ee^{-sA_1}$ as quotient of polynomials.

7.2 La ruine du processus Cramér Lundberg tué, avec des sinistres de type phase

Théorème 7.2. *Les probabilités de ruine d'un processus de Cramér Lundberg tué, avec sinistres de type phase $(\vec{\beta}, B)$, satisfont :*

$$P_{q,u}[\tau < \infty] = \vec{\rho} e^{(B + \mathbf{b}\vec{\rho})u} \mathbf{1}, \quad \vec{\rho} = \vec{\rho}(q) = \frac{\lambda}{c} \vec{\beta} (\Phi - I - B)^{-1}, \quad (7.5)$$

où Φ est l'unique racine positive s de l'équation de Cramér Lundberg $\kappa(s) = q, q > 0$.

Démo : Repetons la démo du cas particulier Théorème 5.1 (avec $q = 0$).

Démo algébrique (*) : La formule (5.15) est bien sur équivalente à la formule de Pollaczek-Khinchine

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} \vec{\beta} (-B)^{-1} (sI - B - \mathbf{b}\vec{\rho})^{-1} \mathbf{1} &= \frac{1}{s} - \frac{1 - \rho}{s(1 - \tilde{\lambda} \vec{\beta} (sI - B)^{-1} \mathbf{1})} = \frac{\rho - \tilde{\lambda} \widehat{F}(s)}{s(1 - \tilde{\lambda} \vec{\beta} (sI - B)^{-1} \mathbf{1})} \\ &= \frac{1}{s(1 - \tilde{\lambda} \widehat{F}(s))} \tilde{\lambda} \vec{\beta} ((-B)^{-1} - (sI - B)^{-1}) \mathbf{1} = \frac{1}{1 - \tilde{\lambda} \widehat{F}(s)} \tilde{\lambda} \vec{\beta} (-B)^{-1} (sI - B)^{-1} \mathbf{1}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité des résolvantes

$$(sI - G)^{-1} - (s'I - G)^{-1} = (s' - s)(sI - G)^{-1}(s'I - G)^{-1}. \quad (7.6)$$

La vérification demande encore l'identité Sherman–Morrison pour l'inverse d'une modification de rang 1 d'une matrice :

$$(A - \mathbf{b}\vec{\rho})^{-1} = A^{-1} + \frac{1}{1 - \vec{\rho} A^{-1} \mathbf{b}} A^{-1} \mathbf{b} \vec{\rho} A^{-1} = A^{-1} \left(I + \frac{1}{1 - \vec{\rho} A^{-1} \mathbf{b}} \mathbf{b} \vec{\rho} A^{-1} \right) \quad (7.7)$$

Utilisant (7.7) avec $A = (sI - B)$, et en remarquant aussi $\vec{\rho}(sI - B)^{-1} \mathbf{b} := \vec{\rho} \widehat{f}(s) = \tilde{\lambda} \widehat{F}(s)$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} \vec{\beta} (-B)^{-1} (sI - B)^{-1} \left(I + \frac{1}{1 - \vec{\rho}(sI - B)^{-1} \mathbf{b}} \mathbf{b} \vec{\rho} (sI - B)^{-1} \right) \mathbf{1} &= \\ \tilde{\lambda} \vec{\beta} (-B)^{-1} (sI - B)^{-1} \left(I + \frac{1}{1 - \tilde{\lambda} \widehat{F}(s)} \mathbf{b} \vec{\rho} (sI - B)^{-1} \right) \mathbf{1} &= \\ \vec{\rho} (sI - B)^{-1} \mathbf{1} + \frac{\tilde{\lambda} \widehat{F}(s)}{(1 - \tilde{\lambda} \widehat{F}(s))} \vec{\rho} (sI - B)^{-1} \mathbf{1} &= \vec{\rho} (sI - B)^{-1} \mathbf{1} \frac{1}{1 - \tilde{\lambda} \widehat{F}(s)} \end{aligned}$$

on trouve notre identité.

Remarque 7.6. *La formule (7.5) réduit le calcul des probas de ruine à une suite de résolutions de l'équation de Cramér Lundberg, suivi par des résolutions d'un système linéaire pour $\vec{\rho}(q), q = q_1, q_2, \dots$ et une suite d'inversions de la transformée de Laplace.*

Chapitre 8

Approximations pour les probabilités de ruine

8.1 Inversion numérique de la transformée de Laplace

Remarque 8.1. *Le théorème de Pollaczek-Khinchine rend claire l'importance de l'inversion de transformées de Laplace dans la théorie classique de la ruine. Malheureusement, l'inversion de la transformée de Laplace est un problème mal posé dans le sens que la moindre erreur numérique peut ramener aux erreurs embarrassantes. C'est surtout le cas en probabilités, où on s'intéresse d'habitude en densités, et on n'aime pas les fonctions de densité négatives ...*

Quatre algorithmes populaires d'inversion sont ceux de Talbot, Gaver-Stehfest, Post-Widder et Weeks – voir

http://www.pe.tamu.edu/valko/public_html/cv/ValkoPDF/2004AV-IJNME-Multi.pdf

Pour simplicité, mentionnons aussi un algorithme "symbolique-numérique" : approximation rationnelle (par exemple de Padé) de la transformée de la densité d'intérêt, décomposition en fractions simples et inversion en somme d'exponentielles – voir point 1 du prochain exercice.

L'inversion des fonctions des densité monotones et avec tous les moments ramène d'habitude aux bons résultats. Par contre, les densités avec support fini, les fonctions q et les densités avec queues longues sont plus problématiques, comme illustré par les points 2,3,4 du prochain exercice.

Exercice 8.1. Probabilités de ruine par l'inversion numérique de la transformée de Laplace.

1. *Trouver la formule pour les transformées de Laplace des probabilités de survie perpétuelle et de ruine pour un processus de Cramér Lundberg avec paramètre ρ , au cas des sinistres C_i ayant*
 - (a) *une loi $\Gamma[5/2, 5/2]$*
 - (b) *une loi $U[0, 2]$*

- (c) la valeur constante $C_i = 1$.
- (d) une loi Pareto avec fonction de survie $\bar{F}(x) = (1 + \frac{x}{\beta})^{-k}$, $x > 0, k > 1$ avec transformée de Laplace $\hat{f}(s) = k(\beta s)^k e^{\beta s} \Gamma(-k, \beta s)$ et moyenne $\frac{\beta}{k-1}$. $x_0 = \frac{1}{2}, k = 2, E[X] = \frac{k}{k-1} x_0 = 1$
- (e) une loi Pareto avec fonction de survie $\bar{F}(x) = (\frac{x}{x_0})^{-k}$, avec $x_0 = \frac{1}{2}, k = 2, E[X] = \frac{k}{k-1} x_0 = 1$
2. Trouver les probabilités de ruine correspondantes pour $\rho = \frac{4}{5}$ dans tous les exemples ci-dessus, en utilisant votre algorithme et logiciel favori (par exemple ilaplace et INVLAP de Matlab).
3. Pour la loi de Weibull avec fonction de survie $\bar{F}(x) = e^{-(\frac{x}{\mu})^k}$, avec $k = 2, E[X] = \mu \Gamma(1 + 1/k) = 1, \mu = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, tracer l'approximation de Cramér Lundberg.
- Refaire l'exercice, si possible, pour la loi de Weibull avec $k = \frac{1}{2}$.
4. Tracer tous les cas ci-dessus sur le même graph pour $\rho = \frac{4}{5}$ et comparer les résultats.

8.2 Sinistres discrètes : l'algorithme de Panjer

Voir Les lois composées, pg.19 https://cran.r-project.org/doc/contrib/Charpentier_Dutang_actuar surtout la commande aggregateDist du package actuar et 5.3, 5.4, 8 <https://perso.univ-rennes1.fr/helene.guerin/enseignement/NotesCoursACT3251.pdf>
Projet : Implementer le code :

```
Panjer <- fonction(a,b,fX,fS0,type,vartype,print) {
# range of X
rX <- length(fX)-1
# initialisation of our results vectors
pmf <- c(fS0)
df <- c(fS0)
if(type==1) { # if we want the first s recursions
for(i in 1:vartype){ # i=s
temp <- sum((a+b*(1:min(i,rX))/i)*fX[(1:min(i,rX))+1]*pmf[i-(1:min(i,rX))+1])
pmf <- c(pmf, temp/(1-a*fX[1])) # we divide only at the end
df <- c(df,df[i]+pmf[i+1]) # the df...
} # end i loop
i <- vartype+1 # useful to know how many recursions we did for below
} else { # if we focus on the df
i <- 1 # since we use while, we need to create our own counter
while(df[i]<(1-vartype)){ # we can use while here
temp <- sum((a+b*(1:min(i,rX))/i)*fX[(1:min(i,rX))+1]*pmf[i-(1:min(i,rX))+1])
```

```

pmf <- c(pmf, temp/(1-a*fX[1]))
df <- c(df,df[i]+pmf[i+1])
i <- i+1 # increment the counter
# the number of recursions is simply i in this case (for below)
} # end while
}
# printing results
if(print==1) {
results <- data.frame(x=0:(i-1),fS=pmf,FS=df)
print(results)
} # end if
#returning results
array(c(pmf,df),c(i,2))
}

```

as for discretisation

```

discretisation <-function(densityorcdf,type,h,m){
if(type==1) { #cdf
pmf <- c()
pmf <- c(densityorcdf(h/2))
for(i in 1:(m-1)) {
pmf <- c(pmf,densityorcdf(h*i+h/2)-densityorcdf(h*i-h/2))
}
pmf <- c(pmf,1-densityorcdf((m-.5)*h))
pmf } else { pmf <- c() #density
pmf <- c(as.double(integrate(densityorcdf,0,h/2)[1]))
for(i in 1:(m-1)) {
pmf <- c(pmf,as.double(integrate(densityorcdf,h*i-h/2,h*i+h/2)[1]))
}
pmf <- c(pmf,as.double(integrate(densityorcdf,(m-.5)*h,Inf)[1]))
pmf }# end else
} # end function

```

Utiliser pour reproduire les resultats en exemple 2, Dickson, D.C.M (1995), 'A review of Panjer's recursion formula and its applications', British Actuarial Journal, 1(1), pp.107-124.

8.3 Approximation de DeVylder pour les probabilités de ruine du processus de Cramér-Lundberg

L'approximation de DeVylder repose sur une idée simple et brillante qui consiste à remplacer le processus du risque

$$X(t) - u = pt - \sum_{i=1}^{N_t} (C_i - EC_i) = \theta \lambda m_1 t - \sum_{i=1}^{N_t} (C_i - EC_i)$$

par un processus de risque alternatif $\tilde{U}(t)$ plus simple, pour le quel la probabilité de ruine est plus facile à calculer.

Jusqu'à maintenant, on a réussi à implémenter cette idée seulement en utilisant un processus $\tilde{U}(t)$ avec remboursement exponentiels, de moyenne qu'on denotera par \tilde{m} .

Une possibilité est de choisir $\tilde{U}(t)$ tel que les premiers moments ou cumulants de deux processus coïncident. En suite, on applique la formule exacte pour la ruine de $\tilde{U}(t)$.

Désignons par $\mathcal{K}_k(Y)$ les cumulants d'ordre k d'une v.a. Y , i.e. les coefficients de l'expansion Taylor :

$$\log(\mathbb{E}e^{uY}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{K}_k(Y) \frac{u^k}{k!}$$

Rappelons que les cumulants sont une transformation des moments ($\mathcal{K}_1(Y) = \mathbb{E}Y$, $\mathcal{K}_2(Y) = \text{Var}(Y)$, $\mathbb{E}(Y^3) = \mathcal{K}_3(Y) + 3\mathcal{K}_2(Y)\mathcal{K}_1(Y) + \mathcal{K}_1^3(Y)$, ...) ayant des propriétés intéressants, comme l'additivité des cumulants des variables indépendants.

Proposition 8.1. a) Pour un processus de Poisson composé $L(t)$, on a la relation :

$$\mathcal{K}_k(L(t)) = \int_0^t \mathcal{K}_k[X(ds)] ds = \lambda t \int x^k f(x) dx, \quad \forall k \geq 1.$$

b)

$$\mathcal{K}_1(L(t)) = pt, \mathcal{K}_2(L(t)) = t(\sigma^2 + \lambda \int x^2 f(x) dx), \mathcal{K}_k(L(t)) = (-1)^k \lambda t \int x^k f(x) dx, \quad \forall k \geq 3.$$

Sol : a) est immédiat, par l'expansion de la fonction génératrice des cumulants¹. Mais, attention : on ne peut pas calculer les cumulants par conditionnement (i.e par la loi de l'espérance totale), car les cumulants ne sont pas des espérances : pour comprendre l'erreur, voir l'exercice 10.1 sur la variance !

1. une autre démonstration de cette égalité provient de la considération suivante : $E[dX(t)^k] = \lambda dt E[Z^k] + (1 - \lambda t) \cdot 0$

Note : La dernière formule continue a être valable au delà du cas Poisson composé, sous la condition que l'intégral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \min(1, |x|) \nu(dx) < \infty,$$

qui assure aussi que les chemins du processus ont variation finie. Le cas des mesures de Lévy générales (??) demande une approche plus sophistiquée, par exemple en utilisant les martingales.

L'approximation de DeVyllder. Soit \tilde{p} , $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\theta}$ et \tilde{m} les nouveaux paramètres du processus $\tilde{U}(t)$, représentant respectivement le taux de profit, le taux moyen d'arrivée des sinistres, le coefficient relatif de sécurité et la moyenne des montants de remboursements des sinistres. L'approximation s'obtiendra donc en appliquant la formule exacte pour le processus $\tilde{U}(t)$, avec les nouveaux paramètres.

En demandant que les cumulants calculés en Proposition 8.1 soient égaux, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} p = \theta \lambda m_1 = \tilde{p} = \tilde{\theta} \tilde{\lambda} \tilde{m} \\ \lambda m_2 = 2 \tilde{\lambda} \tilde{m}^2 \\ \lambda m_3 = 6 \tilde{\lambda} \tilde{m}^3 \end{cases} \quad (8.1)$$

Après résolution du système on trouve :

$$\tilde{m} = \frac{m_3}{3m_2}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{m_2}{2\tilde{m}^2} \lambda = \frac{9m_2^3}{2m_3^2} \lambda, \quad \tilde{\theta} = \frac{\lambda m_1}{\tilde{\lambda} \tilde{m}} \theta = \frac{2m_1 m_3}{3m_2^2} \theta.$$

On applique alors la formule exacte de la probabilité de ruine pour des cas de remboursements exponentiels avec les nouveaux paramètres \tilde{m} et $\tilde{\theta}$.

Proposition 8.2. a) Soit le processus de Cramér-lundberg $X(t) = u + c t - \sum_{i=0}^{N(t)} C_i$. L'approximation de De Vylder de sa probabilité de ruine est donnée par :

$$\Psi_{DV}(u) = \frac{1}{1 + \tilde{\theta}} \exp\left(-\frac{u \tilde{\theta} \mu}{1 + \tilde{\theta}}\right) \quad (8.2)$$

où $\mu = \frac{3m_2}{m_3}$, $\tilde{\theta} = \frac{2pm_3}{3\lambda m_2^2} = \frac{2m_1 m_3}{3m_2^2} \theta$, représentent respectivement le taux des remboursements exponentiels, et le coefficient relatif de sécurité dans le processus $\tilde{X}(t)$ associé.

b) La transformée de Laplace de l'approximation est :

$$\Psi_{DV}^*(s) = \frac{a}{s + b} = \frac{\frac{3\lambda m_2^2}{3\lambda m_2^2 + 2pm_3}}{s + \frac{6pm_2}{3\lambda m_2^2 + 2pm_3}} = \frac{3\lambda m_2^2}{s(3\lambda m_2^2 + 2pm_3) + 6pm_2}$$

Demo : b) est une application immédiate de a), mais comme déjà vu, il est en fait plus facile a obtenir directement, comme une approximation de Padé(0,1) en 0.

Exercice 8.2. *Considerons maintenant l'approximation originale, par des processus Cramér Lundberg avec des sinistres exponentielles, mais en ajoutant aussi une perturbation Brownienne. Soit \tilde{p} , $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\theta}$, σ et \tilde{m} les nouveaux paramètres du processus $\tilde{U}(t)$, représentant respectivement le taux de profit, le taux moyen d'arrivée des sinistres, le coefficient relatif de sécurité, le coefficient de diffusion et la moyenne des montants de remboursements des sinistres.*

En demandant que les cumulants soient égaux, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} p = \theta \lambda m_1 = \tilde{p} = \tilde{\theta} \tilde{\lambda} \tilde{m} \\ \lambda m_2 / 2 = \sigma^2 / 2 + \tilde{\lambda} \tilde{m}^2 \\ \lambda m_3 / 3! = \tilde{\lambda} \tilde{m}^3 \\ \lambda m_4 / 4! = \tilde{\lambda} \tilde{m}^4 \end{cases} \quad (8.3)$$

Après résolution du système on trouve :

$$\tilde{m} = \frac{m_4}{3m_3}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{m_3}{3! \tilde{m}^3} \lambda, \quad \sigma^2 / 2 = \lambda m_2 / 2 - \tilde{\lambda} \tilde{m}^2, \quad \tilde{p} = p \Leftrightarrow \tilde{\theta} = \frac{\lambda m_1}{\tilde{\lambda} \tilde{m}} \theta = \frac{2m_1 m_3}{3m_2^2} \theta ; \text{ la positivité de tous les paramètres est facile à vérifier.}$$

8.4 Approximations de type Padé pour les probabilités de ruine du processus de Cramér-Lundberg

Les probabilités de ruine sont explicites symboliquement pour les lois mélange d'exponentielle (par une factorization du denominateur), ou, de manière équivalente, pour les lois qui ont une transformée de Laplace rationnelle, et en particulier pour les lois de type phase.

Par conséquent, il est très naturel pour une loi arbitraire de commencer par une approximation rationnelle de sa transformée de Laplace, et en suite d'inverser symboliquement.

L'approximation rationnelle la plus simple est celle de Padé, qui est implémentée normalement (ou pas difficile a implementer) dans tous les logiciels symboliques. Malheureusement, il y a un "piège" qui fait que cette méthode n'aboutit pour l'approximation des densités qui ne sont pas complètement monotones.

Exemple 8.1. *L'approximation de premier ordre Padé(0,1) d'une transformée d'une densité est $\tilde{f}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$, $\lambda = m_1^{-1}$, et correspond a une approximation par*

une loi exponentielle du même premier moment. En effet, $(1 - m_1 s + \dots)(\lambda + s) \approx \lambda \implies 1 - \lambda m_1 = 0 \iff \lambda = m_1^{-1}$.

Exemple 8.2. L'approximation de deuxième ordre Padé(1,2) peut-être écrite en fonction des déterminants Hankel des moments :

$$\begin{aligned} \tilde{f}^*(s) &= \frac{b_0 + (b_1 - b_0 \mu_1)s}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2} = \frac{s(\mu_3 - 2\mu_1 \mu_2 + \mu_1^3) + (\mu_2 - \mu_1^2)}{s^2(\mu_1 \mu_3 - \mu_2^2) + s(\mu_3 - \mu_2 \mu_1) + \mu_2 - \mu_1^2} \\ &= \frac{s(\mu_3 - 2\mu_1 \mu_2 + \mu_1^3) + (\mu_2 - \mu_1^2)}{(\mu_1 \mu_3 - \mu_2^2)(s + \gamma_1)(s + \gamma_2)}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

$b_2 = \mu_1 \mu_3 - \mu_2^2, b_1 = \mu_3 - \mu_1 \mu_2, b_0 = \mu_2 - \mu_1^2.$

Remarque 8.2. Si les racines $-\gamma_1, -\gamma_2$ sont distinctes, en inversant (8.4) on trouve que $\tilde{f}(x)$ est une combinaison de deux exponentielles. Pour que l'inverse soit une densité, il est nécessaire que les racines de $b(s)$ soient réelles (et donc le discriminant positif), et négatives.

Exercice 8.3. Trouvez des conditions suffisantes pour que l'inverse de (8.4) soit une densité.

Exercice 8.4. Vérifiez que le polynôme quadratique $b(s)$ du dénominateur de (8.4) est

$$b(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 = \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ s^2 & -s & 1 \end{pmatrix}$$

(cette formule "Hankel modifié" est valable pour tous les ordres).

Exercice 8.5. Calculez les moments $\tilde{m}_k = k = 1, 2, \dots$ de la densité $f_e(x)$ de l'excess stationnaire des sinistres.

Remarque 8.3. L'approximation de Padé autour du 0 est seulement une parmi des nombreuses possibilités d'approximation rationnelle. Une autre serait d'inclure le comportement de $\hat{\Psi}(s)$ à ∞ .

En effet, le comportement quand $s \rightarrow \infty$ est facile à obtenir, ce qui ouvre le chemin pour des approximations Padé en deux points, qui approximent $\hat{\Psi}(s)$ en 0 et aussi à ∞ . Par exemple,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\kappa(s)}{s} = c - \lambda \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}_C(x) dx = c, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s) = \frac{ps}{\kappa(s)} = \frac{p}{c}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{\Psi}(s) = 1 - \frac{p}{c} = \frac{\lambda m_1}{c}$$

Exercice 8.6. Démontrer rigoureusement la première limite ci-dessus.

Exercice 8.7. Trouver une approximation $\tilde{U}(t)$ avec sinistres exponentielles, qui impose aussi la limite $\lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{\Psi}(s) = \Psi(0) = 1/(1 + \theta)$, i.e. chercher une approximation de la forme

$$\hat{\Psi}(s) \approx \frac{1/(1 + \theta)}{s + b_0}.$$

Réponse: On trouve

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(s) &\approx \frac{1}{\frac{\theta}{\widetilde{m}} + s(\theta + 1)}, \quad \widetilde{m} = \widetilde{m}_1 = \frac{m_2}{2m_1} \iff \\ \Psi(x) &\approx \frac{1}{\theta + 1} e^{-\frac{\theta}{\theta+1}x/\widetilde{m}} = \frac{1}{\theta + 1} e^{-\frac{\theta}{\theta+1} \frac{2m_1}{m_2}x}.\end{aligned}$$

Remarque 8.4. A formal expansion

$$\widehat{\Psi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \sum_{k=0}^\infty \Psi^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^\infty \Psi^{(k)}(0) s^{-k-1}$$

allows expanding $\widehat{\Psi}(s)$ at infinity. Here,

$$\Psi(0) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma > 0 \\ \frac{\nu_1}{c} & \text{if } \sigma = 0 \end{cases}$$

is well known, and the derivatives at 0 : $\Psi'(0) = \frac{\nu_0}{c}(\frac{\nu_1}{c} - 1)$, $\Psi''(0) = \dots$ may be obtained recursively, by differentiating the integro-differential equation for $\Psi(x)$. With $K = L = 2$, and imposing both the correct limiting value and the first derivative at ∞ , we find a second order three moments approximation

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(s) &\approx \frac{N'_{22}}{D'_{22}}, \quad N'_{22} = \lambda (6m_2m_1^2 + 3m_2^2) + \lambda s (3m_1m_2^2 - 2m_1^2m_3), \\ D'_{22} &= 12pm_1^2 + 6pm_2 + (6\lambda m_2m_1^2 + 6pm_2m_1 + 3\lambda m_2^2 + 2pm_3) s \\ &+ (3\lambda m_2^2m_1 - 2\lambda m_3m_1^2 - 2pm_3m_1 + 3pm_2^2) s^2 = sN'_{22} + \\ &p(3m_2^2 - 2m_1m_3) s^2 + p(6m_1m_2 + 2m_3) s + p(12m_1^2 + 6m_2).\end{aligned}$$

Les approximations rationnelles appliquées aux transformées de Laplace s'avèrent très utiles en probabilité. Le calcul des approximations de Padé-Hermite est surtout facile, par un système linéaire qui utilise seulement les premiers moments de la loi d'intérêt, et, éventuellement, les premiers coefficients Taylor de la densité autour de 0.

8.5 Trois choix d'approximations rationnelles pour les probabilités de ruine

Dans l'actuariat nous avons un premier dilemme de choisir ce qu'on approxime : $f^*(s)$, $\widehat{f}_e(s)$, ou $\widehat{\Psi}(s)$. On verra que ce dilemme équivaut celui de choisir whether one imposes or not the known initial conditions for $\Psi(0)$ and $\Psi'(0)$ (which correspond to limit conditions on $\widehat{\Psi}(s)$ as $s \rightarrow \infty$). Un deuxième dilemme est de choisir l'ordre de l'approximation.

The three resulting strategies are :

1. Applying Padé[n-1,n] to $\widehat{\Psi}(s)$ with some symbolic program. Alternatively, one may solve the system for the Padé[n-1,n] approximation, using the first $2n$ ruin moments $\Psi_0 = \frac{\widetilde{m}_1}{\theta}$, $\Psi_1 = \frac{\widetilde{m}_2}{2\theta} + (\frac{\widetilde{m}_1}{\theta})^2, \dots, \Psi_{2n-1}$.

For example, at $n = 1$, we find :

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{p}{s(p + \lambda m_2 s/2 - \lambda m_3 s^2/6 + \dots)} = \\ &= \frac{\lambda m_2/2 - \lambda m_3 s/6 + \dots}{p + \lambda m_2 s/2 - \lambda m_3 s^2/6 + \dots} \approx \frac{a}{s + b} \\ &\Leftrightarrow as(p + \lambda m_2 s/2 - \lambda m_3 s^2/6 + \dots) \\ &\approx (s + b)(\lambda m_2 s/2 - \lambda m_3 s^2/6 + \dots) \\ &\Leftrightarrow ap = b\lambda m_2/2, am_2/2 = m_2/2 - bm_3/6 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{3\lambda m_2^2}{3\lambda m_2^2 + 2pm_3}, b = \frac{6pm_2}{3\lambda m_2^2 + 2pm_3} \end{aligned}$$

This yields the famous De Vylder approximation

$$\Psi(x) \approx ae^{-bx} \quad (8.5)$$

It works well for large x , cf. Grandell (2000), but doesn't fit the known values of $\Psi(0), \Psi'(0)$.

Since we are approximating the survival function of \mathcal{P} which is representable as a geometric compound sum, we will call this approach the *aggregate loss approximation*.

2. two point Padé, using the first $2n-1$ moments $\Psi_k, k = 0, 1, \dots, 2n-2$ plus the condition $\Psi(0) = \rho$. This turns out equivalent to fitting the stationary excess density using its moments $\widetilde{m}_k, k = 0, 1, \dots, 2n-1$ of $\widehat{f}_e(s)$ – see Theorem 8.1 below – and will be called *stationary excess approximation*.
3. two point Padé, using the first $2n-2$ moments $\Psi_k = \int_0^\infty x^k \Psi(x) dx, k = 0, 1, \dots, 2n-3$ plus the two conditions $\Psi(0) = \rho, \Psi'(0) = -\frac{\rho(1-\rho)}{m_1}$. This turns out equivalent to fitting the claims density from its moments $m_k, k = 0, 1, \dots, 2n-1$ – see Theorem 8.1 below, and will be called *input approximation*.

Théorème 8.1. Three Padé approximations of ruin probabilities for the Cramér Lundberg process.

a) The stationary excess approximation. *Fitting the first $2n-1$ moments $\Psi_k = \int_0^\infty x^k \Psi(x) dx, k = 0, 1, \dots, 2n-2$ plus the condition $\Psi(0) = \rho$ is equivalent to fitting $\widehat{f}_e(s)$ from the first $2n$ moments $\widetilde{m}_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}, k = 0, 1, \dots, 2n-1$ of $f_e(x)$, and then inserting $\widehat{f}_e(s)$ in the Pollaczek-Khinchine formula.*

b) The input density approximation. *The Padé(n-1,n) approximation obtained by fitting the first $2n$ moments $m_k, k = 0, 1, \dots, 2n-1$ of $f(x)$, and inserting $\widehat{f}(s)$ in the Pollaczek-Khinchine formula, is equivalent to either of :*

1. fitting $\widehat{f}_e(s)$ from the first $2n - 1$ moments $\widetilde{m}_k = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}$, $k = 0, 1, \dots, 2n - 2$ of $f_e(x)$ and the condition $f_e(0) = \frac{1}{m_1}$, and then inserting $\widehat{f}_e(s)$ in the Pollaczek-Khinchine formula.
2. fitting the first $2n - 2$ moments Ψ_k , $k = 0, \dots, 2n - 3$ of $\Psi(x)$, plus the initial conditions

$$\Psi(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\widehat{\Psi}(s) = \rho$$

$$\Psi'(0) = -\frac{\rho(1 - \rho)}{m_1} \iff f_e(0) = \frac{1}{m_1}.$$

Proof : We sketch now the proof of (b)(2) (the proofs of the other two points are similar and omitted). Let $a(s)/b(s)$ denote an approximation of the input density transform, and check that the corresponding Padé approximation of the stationary excess density transform $\widehat{f}_e(s) = \frac{1 - \widehat{f}(s)}{\mu_1 s}$ may be written as indicated in Box 1, and satisfies the limiting relation there.

$$\begin{aligned} \widehat{f}_e(s) &= \frac{b(s) - a(s)}{\mu_1 s b(s)} \\ &= \frac{b_0 + s b_1 + \dots + b_n s^n - (b_0 + (b_1 - b_0 \mu_1)s + \dots + (b_{n-1} - b_{n-2} \mu_1 + \dots + (-1)^{n-1} \mu_{n-1} b_0) s^{n-1})}{\mu_1 s b(s)} \\ &= \frac{b_0 + (b_1 - b_0 \mu_2 / \mu_1)s + \dots + b_n / \mu_1 s^{n-1}}{b(s)} \implies f_e(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \widehat{f}_e(s) = \frac{1}{\mu_1} \end{aligned}$$

The result follows then from :

$$\begin{aligned} s\widehat{\Psi}(s) &= \rho \frac{1 - \widehat{f}_e(s)}{1 - \rho \widehat{f}_e(s)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \rho \\ s(s\widehat{\Psi}(s) - \rho) &= -\rho(1 - \rho) \frac{s \widehat{f}_e(s)}{1 - \rho \widehat{f}_e(s)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -\frac{\rho(1 - \rho)}{m_1} \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 8.5. All the three approaches above may be viewed as classic Padé approximations, applied respectively to $\widehat{\Psi}(s)$, the equilibrium transform $\widehat{f}_e(s)$ or the claims $\widehat{f}(s)$ transform.

All the classic exponential mixture approximations recalled in the abstract turn out to be particular cases of our three schemes.

Remarque 8.6. It is possible to use any rational approximation of the Laplace transform (like (?), admissible three moments approximations (?), etc), at all the three levels.

Remarque 8.7. Estimation non-paramétrique. The input method may be immediately applied, by computing the empirical survival function of the

claims, its Laplace transform, and inverting the Pollaczek-Khinchine formula numerically.

To apply the equilibrium method, we only need to note that the empirical equilibrium survival function of the claims is given by

$$\bar{F}_{e,n}(x) = (n\widehat{m}_1)^{-1}Z_{(n)} + Z_{(n-1)} + \dots + Z_{(k+1)} - kx,$$

where $Z_{(1)} < \dots < Z_{(n)}$ are the order statistics of the claims and $Z_{(k)} < x < Z_{(k+1)}$.

Exemple 8.3. 1. For $n = 1$, $\widehat{f}(s) = \widehat{f}_e(s) \approx \frac{1}{1+sm_1}$. The input density Padé (0,1) approximation of $\widehat{f}(s)$ is :

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(s) &\approx \frac{\rho}{s} \frac{1 - \frac{1}{1+sm_1}}{1 - \rho \frac{1}{1+sm_1}} = \frac{\rho}{s + (1-\rho)/m_1} \iff \\ \Psi(x) &\approx \rho e^{-x(1-\rho)/m_1}.\end{aligned}$$

It fits $\Psi(0), \Psi'(0)$.

2. The (0,1) stationary excess approximation based on $\widehat{f}_e(s) \approx \frac{1}{1+\widetilde{sm}_1}$ yields :

$$\widehat{\Psi}(s) \approx \frac{\rho}{s+(1-\rho)/\widetilde{m}_1} \iff \Psi(x) \approx \rho e^{-x(1-\rho)/\widetilde{m}_1}.$$

This is also known as the Renyi approximation, and it is exact asymptotically in the limit $\rho \rightarrow 1$ when \widetilde{m}_1 exists see (?), (? , (31)). It fits $\Psi(0)$, but it doesn't fit $\Psi'(0)$.

Exemple 8.4. For $n = 1$, $f^*(s) = \widehat{f}_e(s) \approx \frac{1}{1+sm_1}$ and the one moment Padé (0,1) approximation (8.4) of $f^*(s)$ is equivalent to :

$$\widehat{\Psi}(s) \approx \frac{\rho}{s} \frac{1 - \frac{1}{1+sm_1}}{1 - \rho \frac{1}{1+sm_1}} = \rho \frac{1}{s + (1-\rho)/m_1} \iff \Psi(x) \approx \rho e^{-x(1-\rho)/m_1}$$

Or, en appliquant l'approximation exponentielle directement a la densité d'excess stationnaire $f_e(x)$, on trouve

$$\Psi(x) \approx \rho e^{-x(1-\rho)/\widetilde{m}_1},$$

l'approximation de **Renyi** (ici on tient pas compte de la valeur connue de $\Psi'(0)$).

Finally, a third approximation is De Vylder's, a two-moments approximation based on $\Psi_k, k = 0, 1$, which fits neither $\Psi'(0)$, nor $\Psi(0)$:

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{p}{s(p + \lambda m_2 s/2 - \lambda m_3 s^2/6 + \dots)} = \frac{\lambda m_2/2 - \lambda m_3 s/6 + \dots}{p + \lambda m_2 s/2 - \lambda m_3 s^2/6 + \dots} \approx \frac{a}{s+b} \\ \iff as(p + \lambda m_2 s/2 - \lambda m_3 s^2/6 + \dots) &\approx (s+b)(\lambda m_2 s/2 - \lambda m_3 s^2/6 + \dots) \\ \iff ap = b\lambda m_2/2, am_2/2 = m_2/2 - bm_3/6 &\iff a = \frac{3\lambda m_2^2}{3\lambda m_2^2 + 2pm_3}, b = \frac{6pm_2}{3\lambda m_2^2 + 2pm_3}\end{aligned}$$

Exemple 8.5. For $n = 2$, the three moments Padé (1, 2) approximation (8.4) of $f^*(s)$ is equivalent to :

$$\begin{aligned}\widehat{f}_e(s) &= \frac{1 - f^*(s)}{\mu_1 s} \approx \frac{b_0 + b_2/m_1 s}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2} \iff \\ \widehat{\Psi}(s) &= \frac{\rho}{s} \frac{1 - \widehat{f}_e(s)}{1 - \rho \widehat{f}_e(s)} \approx \frac{\rho}{m_1} \frac{b_2 m_1 s + b_1 m_1 - b_2}{\widetilde{b}_0 + \widetilde{b}_1 s + b_2 s^2}\end{aligned}$$

where $\widetilde{b}_1 = b_1 - \rho b_2/m_1$, $\widetilde{b}_0 = (1 - \rho)b_0$.

A second approximation may be got by approximating directly $\widetilde{f}_e(s)$.

Proof : The identity $\widehat{f}_e(s) = \frac{1 - f^*(s)}{\mu_1 s}$ yields :

$$\begin{aligned}\widehat{f}_e(s) &= \frac{b(s) - a(s)}{\mu_1 s b(s)} \\ &= \frac{b_0 + s b_1 + \dots + b_n s^n - (b_0 + (b_1 - b_0 \mu_1) s + \dots + (b_{n-1} - b_{n-2} \mu_1 + \dots + (-1)^{n-1} \mu_{n-1} b_0) s^{n-1})}{\mu_1 s b(s)} \\ &= \frac{b_0 + (b_1 - b_0 \mu_2/\mu_1) s + \dots + b_n/\mu_1 s^{n-1}}{b(s)} \implies f_e(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \widehat{f}_e(s) = \frac{1}{\mu_1}\end{aligned}$$

For the second result, we use

$$\begin{aligned}s \widehat{\Psi}(s) &= \rho \frac{1 - \widehat{f}_e(s)}{1 - \rho \widehat{f}_e(s)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \rho \\ s(s \widehat{\Psi}(s) - \rho) &= -\rho(1 - \rho) \frac{s \widehat{f}_e(s)}{1 - \rho \widehat{f}_e(s)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -\frac{\rho(1 - \rho)}{m_1} \blacksquare\end{aligned}$$

8.6 Approximating a ruin probability by using diatomic claims

For the purpose of approximating a ruin probability by using an m-point claim size distribution with the same first few moments, we will confine ourselves to the first three moments of the distribution. So we will only use atomic claims in the special case $m = 2$, since a two-point distribution has three free parameters, the location of both mass points and one mass, and thus allows us to fit the first three moments of the distribution. An R-implementation is given below ; it is based on the formula

$$\overline{\Psi}(u) = \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{k_1, \dots, k_m \geq 0} (-z)^{k_1 + \dots + k_m} e^z \prod_{j=1}^m \frac{p_j^{k_j}}{k_j!},$$

where $z = \frac{\lambda}{c}(u - k_1 x_1 - \dots - k_m x_m)_+$.

```

psi <- function (u, theta, x, y, px)#the claims are x with probability
  #px, and y with probability 1-px.
{ if (px<0||px>1||theta<=0||x<=0||y<=0||u<0) stop("bad params")
mu <- x*px + y*(1-px)
ss <- 0
for (k in 0:(u/x))
{ n <- 0:(u-k*x)/y)
h <- 1/mu/(1+theta) * (u - k*x - n*y)
tt <- sum((-h)^(k+n)*exp(h)*(1-px)^n/factorial(n))
ss <- ss + px^k / factorial(k) * tt }
return(1 - theta/(1+theta)*ss) }
psi(2.5,0.5,1,2,0.5) ## 0.2475216

```

To determine a random variable X with a two-point distribution with x, y as mass points and $p_x = \Pr[X = x]$, three non-linear equations with as many unknowns must be solved. Analytical expressions exist, but here we will proceed differently. We note that a two-point distribution with mass points equal to x and y , mean μ and variance σ^2 satisfies $y = \mu + \sigma^2/(\mu - x)$, $p_x = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (\mu - x)^2}$. Then by varying x , we ensure that also the skewness is right. The last part is achieved by a call of the function `uniroot`. To fit the third moment $E[X^3] = x^3 p_x + y^3 (1 - p_x)$, we use the identity $E[X^3] = E[((X - \mu) + \mu)^3] = \gamma \sigma^3 + 3\mu \sigma^2 + \mu^3$.) The mass points with given μ, σ^2, γ , and the approximate $\Psi(u)$ are found by the following R code :

```

mu <- 1.5; sig2 <- 0.25; gam <- 0;
mu3 <- gam * sig2^1.5 + 3 * mu * sig2 + mu^3
mu3.diff <- function(x)
{ y <- mu + sig2/(mu-x); px <- sig2 / (sig2+(x-mu)^2)
px*x^3 + (1-px)*y^3 - mu3 }
x <- uniroot(mu3.diff, low=0, up=mu*0.9999999)$root
psi(2.5, 0.5, x, mu + sig2/(mu-x), sig2 / (sig2+(x-mu)^2))

```

The smaller of x and y obviously must be less than μ . That is why we look for a zero of `mu3.diff` in the interval $(0, \mu)$. The last line produces the approximate ruin probability for the given first three moments.

Chapitre 9

Examen d'entraînement

1. Soit $f_e(x) := \frac{\bar{F}(x)}{m_1}$, $m_1 = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx$ la densité d'équilibre associée à une densité $f(x)$, avec fonction de survie $\bar{F}(x)$. a) Calculer la densité d'équilibre $f_e(x)$ associée à $f(x)$, où $f(x)$ est la densité uniforme sur $[0, 1]$. Tracer son graphe, superposé sur celui de la densité $f(x)$. b) Donner les transformées de Laplace $\hat{f}(s)$ et $\hat{f}_e(s)$.
2. Soit $X(t)$ un processus de Cramér-Lundberg

$$Y(t) = u + ct - S(t), \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i, \quad (9.1)$$

où $N_\lambda(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ , et les sinistres $C_i \geq 0$ sont i.i.d. avec densité $f(x)$ et fonction de survie $\bar{F}(x)$. On rappelle la formule de Pollaczek-Khinchin pour la transformée de Laplace des probabilités de ruine

$$\hat{\Psi}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} \Psi(y) dy = \rho \frac{(1 - \hat{f}_e(s))/s}{1 - \rho \hat{f}_e(s)}.$$

- (a) Supposons que les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}_C(x) = \frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{2}{3}e^{-5x}$, et que $\rho = \frac{11}{15}$.
 - (b) Calculez l'espérance des sinistres $m_1 = EC_1$, et $f_e^*(s) = \bar{F}_C^*(s)/m_1$ (la transformée de la severité de ruine avec réserves initiales $u = 0$).
 - (c) Calculez la probabilité de ruine $\Psi(u)$.
3. L'approximation de Padé la transformée de Laplace d'une densité $f(x)$ dont on connaît $f(0)$, $f'(0)$ est de la forme

$$\hat{f}^{(n)}(s) = \frac{f(0)s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0},$$

avec (admis) $a_{n-2} = f'(0) + f(0)b_{n-1}$ (on peut aussi ajouter $b_0 = a_0$ si $f(x)$ est une densité).

- a) Calculer $\hat{f}^{(2)}(s)$ pour $f(x)$ la densité uniforme sur $[0, 1]$. b) Trouver $f^{(2)}(x)$ en utilisant $\mathcal{L}[e^{-at} \cos(bt)] = \frac{a+s}{b^2+(a+s)^2}$, $\mathcal{L}[e^{-at} \sin(bt)] = \frac{b}{b^2+(a+s)^2}$.
 c) Est-ce que cette approximation est toujours positive? Si non, trouver la limite inférieure du domaine d'inadmissibilité.
 d) Calculer $\hat{\Psi}(s)$ et $\hat{\Psi}^{(2)}(s)$ pour des sinistres avec densité $f(x)$ uniforme sur $[0, 1]$, en utilisant $\Psi(0) = \rho$, $\Psi'(0) = -\frac{\rho(1-\rho)}{m_1}$.
 e) Trouver l'approximation de Padé $\Psi^{(2)}(x)$ pour la probabilité de ruine $\Psi(u)$ avec sinistres de densité uniforme sur $[0, 1]$, et $\rho = 1/2$.

Solutions

1. b) $\hat{f}(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$, $\hat{f}_e(s) = \frac{e^{-s}-1+s}{s^2/2}$.
 2. a) L'espérance des sinistres est $m_1 = \frac{11}{45}$, $\rho = \frac{11}{15}$, $\hat{f}_e(s) = \frac{15}{11(s+3)} + \frac{30}{11(s+5)}$,
 et $f_e(x) = \frac{15}{11}e^{-3x} + \frac{30}{11}e^{-5x}$.
 b) La transformée de Laplace est

$$\begin{aligned} \psi^*(s) &= \frac{1}{s} - \frac{8/15}{s(1 - (\frac{3}{2(s+5)} + \frac{1}{2(s+3)})} = \frac{11s + 43}{15(s+1)(s+4)} \\ &= \frac{1}{45(s+4)} + \frac{32}{45(s+1)} \end{aligned}$$

et la probabilité de ruine est $\Psi(u) = \frac{1}{45}e^{-4u} + \frac{32}{45}e^{-u}$.

3. a) $\frac{s+2}{s^2+2s+2}$ b) $e^{-t}(\cos(t)+\sin(t))$. c) $3\pi/4 = 2.35619$ d) $\frac{2\rho(s+2\rho-2)}{2s^2+((\rho-4)\rho+3)s-12(\rho-1)^2}$
 e) $\frac{1}{616} \left(231e^{\left(-\frac{9}{64} - \frac{7\sqrt{33}}{64}\right)u} + 41\sqrt{33}e^{\left(-\frac{9}{64} - \frac{7\sqrt{33}}{64}\right)u} + 231e^{\left(-\frac{9}{64} + \frac{7\sqrt{33}}{64}\right)u} - 41\sqrt{33}e^{\left(-\frac{9}{64} + \frac{7\sqrt{33}}{64}\right)u} \right)$
 f) $\hat{f}(s) = 1 - \frac{s}{2} + \frac{s^2}{3!} \dots$, $\hat{f}_e^{(2)}(s) = 1 - \frac{s}{3} + \frac{2s^2}{4!} \dots$
 $s + b_0 \approx (1 - \frac{s}{2} + \frac{s^2}{3!} - \dots)(s^2 + b_0s + b_0) = b_0 + s\frac{b_0}{2} \implies b_0 = 2 \implies$
 $\hat{f}^{(2)}(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2}$.
 $s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots b_1s + b_0f(0)s^{n-1} + (f'(0) + f(0)b_{n-1})s^{n-2} + \dots + b_0$
 g) $f^{(2)}(x) = e^{-t}(\cos(x) + \sin(x))$, $\frac{2}{3}e^{-4t}(2 \cos(2t) + 11 \sin(2t))$

Chapitre 10

Processus de Lévy : marches aléatoires en temps continu

Motivation : Les processus de Lévy sont la généralisation des marches aléatoires discrètes au cas des temps continus (et possiblement espace d'états continus). Le processus de Poisson en fournit un exemple. Mais, on a du mal à donner une définition "explicite" analogue à "somme des sommands i.i.d." ("intégrale des petits accroissements i.i.d." n'est pas si facile à formaliser).

10.1 Définition, propriétés de linéarité et l'exposant de Lévy

On denotera par

$$X_I = X_{[s,t]} := X(t) - X(s)$$

l'accroissement/increment d'un processus X sur un intervalle $I = [s, t]$. Les marches aléatoires discrètes $X_n, n \in \mathbb{N}$ et certains processus en temps continu $X(t), t \in \mathbb{R}_+$ que nous verrons plus tard (le processus de Poisson composé, le mouvement Brownien, ...) partagent la propriété d'avoir des increments indépendants $X_{[s,t]}$ sur d'intervalles disjoints. Sur chaque interval $I = [s, t]$, la distribution dépend seulement de la longueur $t - s$ de l'intervalle (et pas du point initial s). Ces propriétés fournissent la définition des processus de Lévy :

Définition 10.1. *Un processus $X(t)$ s'appelle processus A.S.I. (à accroissements/increments stationnaires et indépendants) si :*

- L'increment $X_{[t,s]} := X(t) - X(s)$ sur un intervalle $[s, t]$ est indépendant des increments sur d'autres intervalles $[s', t']$ disjoints de $[s, t]$.
- La distribution du increment $X_{[s,s+t]} = X(s+t) - X(s)$ est identique à la distribution du increment initiale $X_{[0,t]} = X(t) - X(0)$, pour chaque $s \in \mathbb{R}_+$.

Remarque 10.1. *Il est facile de vérifier que le mouvement linéaire $X(t) = ct$ et le processus de Poisson satisfont ces propriétés.*

Note : En temps discret, les processus a.s.i. s'appellent de préférence marches aléatoires et en temps continu, processus de Lévy. Le théorème suivant montre que les propriétés ci-dessus impliquent que l'espérance, variance, et la fonction génératrice des cumulants des processus de Lévy sont des fonctions additives en temps.

Théorème 10.1. *Pour chaque $t, s \in \mathbb{R}_+$: a) l'espérance $m(t) = \vec{\mathbb{E}}X(t)$ d'une marche aléatoire/processus de Lévy $X(t)$ avec $X(0) = 0$ est additive :*

$$m(t + s) = m(t) + m(s)$$

et linéaire

$$m(t) = tm(1)$$

b) la variance $v(t) = \vec{\mathbb{E}}(X(t) - m(t))^2$ est additive :

$$v(t + s) = v(t) + v(s)$$

et linéaire

$$v(t) = tv(1)$$

c) La fonction génératrice des moments d'un processus de Lévy $X(t)$ avec $X(0) = 0$ $M(t) = M_\theta(t) := \vec{\mathbb{E}}e^{\theta X(t)}$ est multiplicative

$$M(t + s) = M(t) M(s)$$

pour chaque t, s où elle est bien définie. d) Déduisez qu'elle doit être de la forme : $M(t) = e^{t\kappa(\theta)}$ pour une certaine fonction $\kappa(\theta)$ (appelée exposant de Lévy, où fonction génératrice des cumulants).

Demo : a) (b) : On décompose $X(t + s) = X(s) + (X(t + s) - X(s))$. Prenant l'espérance (variance) on démontre la propriété $f(t + s) = f(t) + f(s)$. Finalement, pour conclure la linéarité, on s'appuie sur le lemme 10.1, et la mesurabilité de ces fonctions. c) Cette fois la décomposition $X(t + s) = X(s) + (X(t + s) - X(s))$ implique multiplicité. d) En prenant logarithmes, on transforme la multiplicité en additivité, c.-à-d. on conclut que $f(t) = \text{Log}M(t)$ satisfait $f(t + s) = f(t) + f(s)$.

Lemme 10.1. *Si une fonction continue ou monotone (en fait, mesurable suffisante) $f(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait pour chaque s, t , l'identité :*

$$f(t + s) = f(t) + f(s)$$

alors $f(t)$ est une fonction linéaire, c.-à-d.

$$f(t) = f(1)t.$$

Demo : On établit la linéarité d'une fonction additive d'abord les temps t naturels $t = 1, 2, 3, \dots$, en suite pour les temps t fractionnaires $t = 1/2, 1/3, \dots$, en suite pour les temps rationnels $t \in \mathbb{Q}$, et finalement on approche t réel par des temps rationnels.

Remarque 10.2. La fonction génératrice des cumulants/exposant de Laplace caractérise uniquement un processus de Lévy. Elle est une variation naturelle dans ce contexte de la fonction génératrice des moments/fonction caractéristique, qui a leurs tour réfléchissent le rôle fondamental de la fonction exponentielle dans l'analyse sur \mathbb{R}^d .

10.2 Exemple : le processus de Poisson composé

Définition 10.2. Le processus de Poisson composé

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i \quad (10.1)$$

est une somme des variables *i.i.d.* (indépendantes et identiquement distribuées) C_i , avec distribution cumulative et mgf notées par $F(z) = F_C(z)$, $M_C(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF(x)$, où $N_\lambda(t)$ est un processus de Poisson, indépendant de C_i .

Outrement dit, il s'agit des marches aléatoires avec increments qui arrivent après des temps exponentiels. Ce processus est utilisé par exemple pour modéliser le montant total des sinistres d'une compagnie d'assurances.

Exercice 10.1. a) Calculer $\mathbb{E}S_t$, et $\text{Var } S_t$ pour un processus de Poisson composé. b) Calculer la fonction génératrice des moments.

Solution : Considérons plus généralement des sommes aléatoires des variables identiques

$$S = \sum_{i=1}^N C_i,$$

avec N indépendant de C_i , et $P[N = k] = p_k, k \in \mathbb{C}_+$. En conditionnant sur le nb. des sauts, on trouve : a)

$$\mathbb{E}S = \sum_{j=0}^{\infty} p_j (j \mathbb{E}C_1) = \mathbb{E}C_1 \mathbb{E}N = \lambda t \int x f_C(x) dx$$

Si les C_i sont aussi indépendants, alors :

$$\begin{aligned} \text{Var } S &= \mathbb{E}(S)^2 - (\mathbb{E}S)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \mathbb{E}(\sum_{i=1}^j C_i)^2 - (\mathbb{E}N\mathbb{E}C_1)^2 \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j (j\mathbb{E}(C_1^2) + j(j-1)(\mathbb{E}C_1)^2) - (\mathbb{E}N\mathbb{E}C_1)^2 \\ &= \mathbb{E}N\text{Var } C_1 + \text{Var } N(\mathbb{E}C_1)^2 = \lambda t \mathbb{E}(C_1^2) \end{aligned}$$

b) Soit $M_C(u) = \mathbb{E}e^{uZ} = \int_0^{\infty} e^{ux} f(x) dx$ la fonction génératrice de moments de C_i . On trouve : $\mathbb{E}e^{uS_t} = \mathbb{E}e^{u(\sum_{i=1}^{N_t} C_i)} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j e^{uj} (M_C(u))^j = e^{\lambda t (M_C(u) - 1)} = e^{\lambda t (\int_0^{\infty} (e^{ux} - 1) f(x) dx)}$. En conclusion,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{uS_t} &= e^{t\kappa(u)}, \\ \kappa(u) &= \lambda(M_C(u) - 1) = \lambda \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} f(x) dx - 1 \right) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ux} - 1) \nu(dx) \end{aligned}$$

Il se trouve que la formule de la variance (un peu difficile à obtenir directement), admet une généralisation plus facile à démontrer – voir Proposition 8.1!

Exercice 10.2. Déterminer la fonction de covariance

$$\text{Cov}[X(t), X(t+s)]$$

d'un processus de Poisson composé $X(t), t \geq 0$.

Exercice 10.3. (Ross, Exercice 63) Une société d'assurance paie pour les déclarations de sinistres dans le cadre des contrats d'assurance vie selon un processus de Poisson de taux $\lambda = 5$ par semaine. Si le montant payé pour chaque contrat suit une distribution exponentielle de moyenne 2000, quelles sont la moyenne et la variance des montants payés par la société d'assurances dans un intervalle de quatre semaines ?

Exercice 10.4. (Ross, Exercice 66) L'arrivée des clients à un distributeur de billets suit un processus de Poisson de taux 12 per hour. Le montant retiré à chaque transaction est une variable aléatoire de moyenne 30 et écart-type 50 (un retrait négatif signifie que de l'argent a été déposé). La machine est utilisée 15 heures par jour. Approximez la probabilité que le montant total retiré par jour soit inférieur à 6000.

Chapitre 11

Martingales

Les martingales sont une famille des processus stochastiques, inspirée par la théorie des jeux, qui a trouvé des applications dans plusieurs branches des probabilités.

Le terme désigne dans la théorie des jeux une stratégie permettant de gagner à coup sûr dans un jeu équitable (comme le pile ou face).

Pour la **martingale mathématique**, on se place dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , avec une suite des variables $X_n, n \in \mathbb{N}$, qui représente la fortune d'un joueur au temps n , et une deuxième suite $Y_n, n \in \mathbb{N}$, qui représente des informations acquises au temps n . Par exemple, Y_n pourrait être la mise du jeu n , et alors

$$X_{n+1} = X_0 + \sum_{k=1}^n Y_k = X_n + Y_{n+1}$$

Si Y_i sont i.i.d., alors on est dans le cadre des probabilités classiques, mais justement les martingales généralisent ce cadre considérablement (les mises peuvent dépendre de "l'information du passé" $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$).

Un jeu est caractérisé par la suite $E[X_{n+1}|Y_1, Y_2, \dots, Y_n] = E[X_{n+1}|\sigma(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)] = E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. Il est appelé martingale (ou jeu juste) si $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0, \forall n$.

Exemple 11.1. Prenons un exemple de jeu dû à D'Alembert : on parie x euros sur pile. Si la pièce tombe sur pile, on ramasse $2x$ euros (soit un gain de x euros), et si elle tombe sur face, on perd tout. A chaque coup, on est libre de se retirer ou de continuer à jouer. Une stratégie gagnante à coup sûr est la suivante : au 1er coup, on mise 1 euro : si on gagne, on se retire (et on empoche 1 euro); sinon, on continue (et on a perdu 1 euro). au 2ème coup, on double la mise, 2 euros : si on gagne, on se retire, et on a gagné $2-1=1$ euro. Sinon on continue, on a perdu $2+1=3$ euros. au 3ème coup, on double encore la mise, en jouant 4 euros. Si on gagne, on se retire, avec en poche un gain de $4-3=1$ euro. Sinon, on continue la partie, et on double au coup suivant la mise, etc...

La théorie des martingales modélise en théorie des probabilités le concept de jeu équitable (ou juste), en stipulant que l'espérance du gain doit être 0 à chaque mise. Rémarquons que notre exemple est un jeu juste. Mais, comme pile va bien finir par tomber, on est sûr de finir par gagner 1 euro (à condition d'avoir une fortune infinie). Cela contredit l'intuition "qu'un ne peut pas gagner contre un jeu juste", qui est formalisée dans un théorème qui affirme que si un joueur a une fortune initiale finie, il n'existe pas de stratégie pour gagner à coup sûr, dans un jeu juste et "raisonnable".

On verra plus tard comment définir "raisonnable"; pour l'instant, remarquons que si pile met du temps à sortir, il va falloir miser beaucoup (si la pile sort qu'au 8^e tirage, alors on aura déjà misé $1+2+4+8+16+32+64+128=255$ euros, et tout cela pour gagner 1 euro).

La théorie des martingales jettera de la lumière sur ce paradoxe de "gagner dans un jeu juste", sans avoir aucun capital.

Rapellons les définitions de base de la théorie des martingales.

Définition 11.1. Une **filtration** est une suite croissante (au sens de l'inclusion) $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ de sous-tribus de \mathcal{A} , où \mathcal{T} est un ensemble ordonné (muni d'une relation d'ordre).

Définition 11.2. Un processus $X(t)$ est dit **adapté** à une filtration (\mathcal{F}_t) si $X(t)$ est (\mathcal{F}_t) -mesurable pour chaque t . La notation est $X(t) \in \mathcal{F}_t$.

Définition 11.3. Un jeu est une paire formée par une filtration \mathcal{F}_t et par une suite des v.a. $X(t) \in \mathcal{F}_t$.

Intuitivement, les tribus $\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}$ modélisent "l'évolution de l'information" disponible jusqu'au temps t , et $X(t)$ représentent la valeur d'un jeu, comme perçue au temps t . Par exemple, si la filtration $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_4$ est formé par les 5 étapes d'un jeu de poker Texas hold'em, les variables indicatrices I_0, I_1, \dots, I_4 dont la valeur est 1 si un joueur donné gagne sont adaptés à la filtration.

Nous allons introduire maintenant trois catégories des processus stochastiques, l'importance des quelles peut être comparés à celles des fonctions constantes, croissantes et décroissantes, dans le calcul déterministe.

Définition 11.4. Une suite des v.a. $X(t) \in \mathcal{F}_t, X(t) \in L_1(dP)$ est appelée *martingale/sur-martingale/ sous-martingale*

$$\text{ssi } \mathbb{E}[X_{t'} / \mathcal{F}_t] \begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases} X(t), \quad \text{quand } t' > t.$$

Définition 11.5. Martingales en temps discret. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , intégrables, indépendantes et centrées. Pour tout n de \mathbb{N} , la suite de tribus : $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ est une filtration.

Une suite $(X_n) \in (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ de variables aléatoires réelles intégrables est une martingale en temps discret par rapport à (\mathcal{F}_n) si elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n.$$

Exemple 11.2. Martingale "additive" = Somme de variables aléatoires indépendantes de moyenne 0. Si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes et centrées, alors la suite des sommes :

$$X_n = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n$$

est une martingale "additive" par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$.

Bien entendu, si les Y_i ne sont pas centrées mais de moyenne a alors $(X_n - na)_n$ est une martingale.

Exemple 11.3. Martingale multiplicative = Produit de variables aléatoires indépendantes de moyenne 1. Si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes avec moyennes 1, alors la suite des produits :

$$X_n = Y_0 \times Y_1 \times \dots \times Y_n = \prod_{k=0}^n Y_k$$

est une martingale "multiplicative" par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$.

En effet, prenant espérance conditionnelle de la formule recursive $X_{t+1} = X(t)Y_{t+1}$ donne :

$$\vec{\mathbb{E}}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \vec{\mathbb{E}}[X_t Y_{t+1} | \mathcal{F}_t] = X(t) \vec{\mathbb{E}} Y_{t+1} = X(t)$$

Là aussi, dans le cas où les Y_i ne sont pas de moyenne 1 mais de moyenne $a \neq 0$, on considèrera $X_n = a^{-n} \prod_{k=0}^n Y_k$.

Exemple 11.4. Soit $X_{n+1} = \begin{cases} \alpha + \beta X_n & \text{a.p. } X_n \\ \beta X_n & \text{a.p. } 1 - X_n \end{cases}$, où $X_0, \alpha, \beta \in (0, 1), \alpha + \beta = 1$.

Montrer que $X_n \in [0, 1]$ et que X_n est une martingale.

$$\mathbf{R} : \vec{\mathbb{E}}[X_{n+1} | X_n] = \beta X_n + \alpha X_n = X_n$$

Exemple 11.5. *c) Martingale obtenue par filtrage*

On se donne $\zeta \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$\mathbb{E}(\zeta | \mathcal{F}_n) = \zeta_n$$

$(\zeta_n)_n$ est une martingale.

Exercice 11.1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soient m et n deux entiers positifs tels que $m < n$, calculer $E((X_{m+1} - X_m)(X_{n+1} - X_n))$.

11.1 Le théorème d'arrêt des martingales

Nous présentons maintenant une des applications les plus importantes des martingales, dans la théorie des jeux.

Exercice 11.2. Montrer qu'une martingale additive ou multiplicative en temps discret X_n satisfait :

$$E[X_{k+n} | \mathcal{F}_n] = X_n, \forall k \geq 1,$$

où $F_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ est l'information au temps n .

Sol : La demo est très facile, car pour les martingales additives et multiplicatives, les espérances conditionnelles se réduisent à des espérances non-conditionnelles.

En effet

$$\begin{aligned} E[X_{k+n} | \mathcal{F}_n] &= E[X_n + \sum_{i=1}^k Z_{n+i} | \mathcal{F}_n] \\ &= X_n + E[\sum_{i=1}^k Z_{n+i}] = X_n \end{aligned}$$

The case of multiplicative martingales is similar.

Interprétation : Une somme $X(t) = \sum_{i=1}^t Z_i$, où $Z_i = u_i, l_i$ a.p. p_i, q_i , peut être vue comme les gains cumulés d'un joueur qui mise Z_i au temps i . Si le jeu est "juste" au sens que $\vec{\mathbb{E}}Z_i = 0$, alors il est évident que

$$\vec{\mathbb{E}}X(t) = 0, \forall t,$$

i.e. les gains espérés sont 0. Outrement dit, le joueur qui s'arrête à un temps fixe ne peut pas améliorer l'espace d'états de ses gains cumulés à un moment futur fixe, juste en variant les mises Z_i (tant que $\vec{\mathbb{E}}Z_i = 0$).

Il se pose alors la question si des mises plus sophistiquées, conditionnées par le passé, ou d'autres **stratégies d'arrêt** T , par exemple $T = \min(T_L, T_K)$, peuvent améliorer ses chances.

Les exercices ci-dessus nous montre que tant que le jeu est une martingale est que le temps d'arrêt et fixe, cela est impossible, et cela restera vrai pour des temps d'arrêt "raisonnables", cf. le théorème de Doob ci-dessous.

Exercice 11.3. *Montrer qu'une martingale en temps discret satisfait :*

$$\vec{\mathbb{E}}[X_{t+k} | \sigma(X_1, X_2, X(t))] = X(t) \quad \forall k \geq 1$$

Sol : On a besoin de la loi ET généralisé (prop. (8))

$$\vec{\mathbb{E}}[\vec{\mathbb{E}}[X | \mathcal{B}] | \mathcal{C}] = \vec{\mathbb{E}}[X | \mathcal{C}] \text{ si } \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \quad (11.1)$$

Pour $k = 2$ par exemple :

$$\vec{\mathbb{E}}[X_{t+2} | \mathcal{F}_t] = \vec{\mathbb{E}}[\vec{\mathbb{E}}[X_{t+2} | \mathcal{F}_{t+1}] | \mathcal{F}_t] = \vec{\mathbb{E}}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = X(t)$$

Alternativement, on peut utiliser l'idée de la demo du cas additif, car on peut toujours decomposer une martingale comme une somme des "différences de martingale" Z_i :

$$X_{t+k} = X(t) + \sum_{i=1}^k Z_{t+i},$$

tq $X(t) \in \mathcal{F}_t \implies Z_t \in \mathcal{F}_t$, et $\vec{\mathbb{E}}[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t] = 0$. Prenant espérance conditionnelle :

$$E[X_{t+k} | \mathcal{F}_t] = E[X(t) + \sum_{i=1}^k Z_{t+i} | \mathcal{F}_t]$$

et il nous reste a montrer $E[Z_{t+i} | \mathcal{F}_t] = 0, \forall i \geq 2$. On procède par recurrence. It is true for $i = 1$, so suppose we proved it up to $i = j$. Pour obtenir le résultat pour $j + 1$, on conditionne sur l'information supplémentaire au temps $t + j$ $E[Z_{t+j+1} | \mathcal{F}_t] = E[E[Z_{t+j+1} | \mathcal{F}_{t+j}] | \mathcal{F}_t] = E[0] = 0$.

Théorème 11.1. Optional stopping theorem *Si X est une martingale (resp. sur-martingale, sous-martingale) et T un temps d'arrêt alors $X^T = (X_{T \wedge n})_{n \geq 0}$ est appelée martingale (resp. sur-martingale, sous-martingale) arrêtée en T . C'est une martingale (resp. sur-martingale, sous-martingale). En particulier, on a pour tout entier n ,*

$$\mathbb{E}(X_n^T) = \mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_0), \quad (\text{resp. } \leq, \geq)$$

Remarque 11.1. *Ce théorème dit en outre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{T \wedge n}$ est dans \mathbb{L}^1 . Il ne suppose aucune condition sur le temps d'arrêt.*

Démonstration. *Démonstration du théorème de sur-martingales arrêtées*

On a juste à montrer le théorème pour X surmartingale puisque X sous-martingale équivaut à $-X$ sur-martingale et X est une martingale ssi c'est à la fois une sur-martingale et une sous-martingale.

1) $X_{T \wedge n}$ est \mathcal{F}_n -mesurable car

$$X_{T \wedge n}(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k(\omega) 1_{T(\omega)=k} + X_n(\omega) 1_{\{T(\omega) \geq n\}}$$

C'est une somme de variables aléatoires \mathcal{F}_n -mesurables.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{T \wedge n}$ est intégrable car $|X_{T \wedge n}| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |X_k|\right) + |X_n|$.

3) On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{T \wedge n} | \mathcal{F}_{n-1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_k 1_{T=k} | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(X_n 1_{T \geq n} | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 1_{T=k} \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{n-1}) + 1_{T \geq n} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} 1_{T=k} X_k + 1_{T \geq n} X_{n-1} = X_{T \wedge n-1} \end{aligned}$$

□

Si $(X_n)_n$ est une martingale et si T est un temps d'arrêt alors pour tout entier n , on a

$$\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_0)$$

A-t-on $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$? Un contre exemple est le suivant. Soit $(X_n)_n$ une marche aléatoire telle que $X_0 = 0$ et $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = 0$. $(X_n)_n$ est une martingale. Soit $T = \inf\{n \in \mathbb{N}; X_n = 1\}$ le temps d'entrée en 1. On a vu que c'était un temps d'arrêt (par rapport à la filtration naturelle de X). Pourtant, on a

$$\mathbb{E}(X_T) = 1 \neq \mathbb{E}(X_0) = 0$$

Remarque 11.2. *Le théorème 11.1 est la version la plus simple du fameux théorème d'arrêt des martingales, et va être aussi utilisé comme pas intermédiaire pour le démontrer.*

A very useful result of martingale theory, le théorème d'arrêt des martingales, states that no matter how clever the gambler tries to be, subject to some "reasonable restrictions" (like gambling for a time T with finite expectation and keeping the amount of your losses bounded), the gambler cannot escape the law

$$E[S_T] = S_0$$

Remarque 11.3. Cette propriété generalise $\vec{\mathbb{E}}S_t = S_0, \forall t$, qui est une conséquence immédiate de la définition, pour t fixe. The fact that we may extend this to the case of stopping times T has the interpretation that even the most clever stopping rules T (which obey some restrictions) cannot break the odds.

Remarque 11.4. Comme il n'existent pas des conditions nécessaires et suffisantes simples qui assurent la validité du théorème d'arrêt des martingales, nous donnons ci-dessous une réunion des plusieurs versions intéressantes (prises des livres de Williams, Grimmett et Ross).

Théorème 11.2. (Théorème d'arrêt des martingales) Si S_t est une martingale par rapport à une filtration \mathcal{F}_n , et T un temps d'arrêt ($\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$), alors

$$\vec{\mathbb{E}}[S_T | \mathcal{F}_0] = S_0$$

dans chacun des cas suivants :

1) $T < C$, où C est une constante.

2) $\vec{\mathbb{E}}T < \infty$, $\max_{\{1 < t < T\}} |S_t - S_{t-1}| \leq C$, où C est une constante. La condition d'une durée du jeu à espérance finie est plus faible, mais on rajoute la condition que les mises du jeu sont bornées (c'est moins fort que de supposer les gains/pertes restent bornées, comme dans le prochain cas.

3) $P[T < \infty] = 1 \Leftrightarrow P[T = \infty] = 0$, $\max_{\{1 < t < T\}} |S_t| \leq C$, où C est une constante. Le jeu fini sûrement, et les gains/pertes restent bornées.

4) $\vec{\mathbb{E}}T < \infty$, $\max_{\{1 < t\}} \vec{\mathbb{E}}[|S_t - S_{t-1}| | \mathcal{F}_{t-1}] \leq C$, où C est une constante.

5)

$$P[T < \infty] = 1 \Leftrightarrow P[T = \infty] = 0,$$

$$\vec{\mathbb{E}}|S_T| < \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\mathbb{E}}[S_n \mathbb{1}_{T > n}] = 0$$

Les premières trois cas sont rangés pédagogiquement dans ordre croissante des demandes sur S_t , et diminuante sur T . Le plus facile à vérifier semble le quatrième, et le plus général est par contre le dernier cas, qui illustre le fait que c'est le couple (T, S_T) qui doit être "raisonnable".

Dem : 5) On utilise la décomposition :

$$S_T = S_{\min[T, n]} + (S_{\min[T, n]} - S_{\min[T, n]}) \mathbb{1}_{T > n},$$

avec $n \rightarrow \infty$.

Exercice 11.4. En supposant que le théorème d'arrêt des martingales est applicable, calculer :

a) l'espérance $v(x) = \vec{\mathbb{E}}_x X_T$ des gains d'un joueur qui mise $Y_i = \pm 1$, avec $p_i = q_i = \frac{1}{2}$, dans les limites $[-L, K]$.

b) la probabilité de gagner $p(x) = \mathbb{P}_x[X_T = K]$.

c) Comment peut on justifier l'application du théorème d'arrêt des martingales ?

Remarque 11.5. Sur un interval fini, ce genre des problèmes peut être résolu facilement à partir de l'équation des différences obtenu par conditionnement sur le premier pas, qui est ici :

$$v_x = \frac{1}{2}v_{x+1} + \frac{1}{2}v_{x-1}, v_0 = 0, v_K = K.$$

Sol : a) L'application du théorème d'arrêt à la martingale $X(t)$ donne

$$v(x) = \vec{\mathbb{E}}_x X_T = X_0 = x$$

b)

$$\vec{\mathbb{E}}_x X_T = \vec{\mathbb{E}}_x X_0 = x = K \mathbb{P}_x\{X_T = K\} + L (1 - \mathbb{P}_x\{X_T = K\}) = x,$$

et donc

$$p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\} = \frac{(x - L)}{(K - L)}.$$

c) L'application pourrait être justifié par les cas 2) ou 3) du théorème d'arrêt. En effet, les conditions que les gains $|X(t)| \leq \max(|L|, K)$ et les mises sont bornées sont évidentes.

Par contre, les conditions $\vec{\mathbb{E}}_x T < \infty$ et $\mathbb{P}[T < \infty] = 1$ demandent plus de travail.

1. **Le calcul direct.** La meilleure justification ici est de passer à une autre méthode, car pour les marches aléatoires sur un interval fini on obtient facilement

$$\vec{\mathbb{E}}_x [T] = (K - x)(x + L) < \infty,$$

en résolvant le système obtenu par conditionnement sur le premier pas.

2. **La théorie spectrale PF (Perron Frobenius) des matrices sous-stochastiques (ou des chaînes de Markov finies, absorbés).** Une deuxième justification possible, beaucoup plus générale, est de citer le fait que la probabilité $\mathbb{P}[T = \infty]$ qu'une chaîne de Markov finie reste pour toujours dans les états transients est 0 (c'est une conséquence du théorème PF (de Perron Frobenius) en analyse).
3. **Les astuces.** Si le calcul direct de $\vec{\mathbb{E}}_x T$ n'est pas faisable, et si on n'est pas satisfait de citer Perron-Frobenius, on offre parfois des solutions probabilistes directes, comme par l'astuce "donnons du temps au temps" de

Brzezniak, Example 3.7. Notons par contre que cette solution, bien que intéressante conceptuellement, devrait être évitée dans des cas simples comme celui ci, car elle demande beaucoup d'effort !

Exemple 11.6. Le modèle Wright-Fisher *Il s'agit de modéliser l'évolution de la fréquence d'une gène A dans une population de taille finie N. On suppose que le nombre X_{n+1} des gènes A au moment n+1 a la loi Bin_{N,p_{X_n}}* où p_x = $\frac{x}{N}$, si X_n = x. Ainsi :

$$p_{ij} := P[X_{n+1} = j | X_n = i] = \binom{N}{j} p_i^j (1 - p_i)^{N-j}$$

Montrer que :

1. X_n est une martingale.
2. On observe "une population Wright-Fischer" jusqu'au moment T = min(T₀, T_N). Quelle est la probabilité f_i que la fréquence esperé de la gene speciale sera finalement 1 ?

Sol : a) $\vec{\mathbb{E}}[X_{n+1}/X_n] = Np_{X_n} = X_n$. b) $f_i = \frac{i}{N}$.

Comme dans l'exemple précédent, l'application du theoreme d'arrêt peut être justifié par les cas 2) ou 3). La seule différence est que E_xT n'est pas facile a obtenir, car le conditionnement sur le premier pas ramène à une equation de differences avec N termes ! On est donc obligés de citer PF (Perron-Frobenius).

11.2 "La martingale interdite"

The doubling "martingale" strategy. We examine now the strategy which gave martingales their names (nowadays outlawed in casinos).

A gambler with no initial capital has as goal to win 1 pound. His first bet is s₁ = 1 pound. If he loses, he bets whatever it takes to bring him up to 1 pound (s₂ = 2 pounds at the second bet, s₃ = 4 at the third, and in general s_n = 2ⁿ⁻¹ on the n'th bet. The stopping time is T₁. We note immediately that this strategy creates a dollar out of nothing and does not satisfy le théorème d'arrêt des martingales, i.e.

$$E_0 X_{T_1} = 1 > 0!!$$

We examine now les conditions du théorème d'arrêt des martingales. It is easy to check that p_k = P[T = k] = 2^{-k}, k = 1, 2, ... and thus both condition 1 a) (that $\sum_k p_k = 1$) and condition 2 a) (that $\vec{\mathbb{E}}T = \sum_k k p_k = 2 < \infty$) are satisfied. However, neither the cumulative fortune, nor the stakes are bounded, since the loss may double its value an arbitrary number of times and of course the gambling time does not have to be bounded. Thus, neither condition 1 b) nor 2 b) are satisfied.

Notice that this strategy seems quite efficient for the gambler (a sure win in a number of steps with expectation 2!). Also, practically, it seems at first safe for the bank too, since in practice the gamblers will have to limit the time they gamble by some finite number n , and then le théorème d'arrêt des martingales will apply (by any of the three conditions!). Note that the possible loss after the n 'th bet is $-2^n + 1$. The 0 expectation of le théorème d'arrêt des martingales means in practice roughly that the winnings of 2^n successful martingale gamblers will be outset by the huge loss of one misfortunate; the fear that this loss will not be honoured is what lead to the outlawing of this strategy.

More precisely, if all martingale gamblers bound their losses at $L = -2^n + 1$, then we are allowed to apply le théorème d'arrêt des martingales, and find as usual that the fraction of winning martingale gamblers $p_0 = \frac{L}{1+L} = \frac{2^n-1}{2^n}$ is very close to 1. The fraction of losers $1 - p_0 = 2^{-n}$ is very small, but the potential loss is huge $2^n - 1$, averaging thus to 0. When $L \rightarrow \infty$ the bad second case somehow disappears by indefinite postponement)!

Note : The expected duration may also be found to be $t_0 = E_0T = 2 - 2^{-n}$ by setting up a corresponding difference equation, for example. Donc, ici c'est S_t plutôt qui invalide la conclusion du théorème d'arrêt des martingales.

Remarque 11.6. *While the assumptions of le théorème d'arrêt des martingales may look at first technical, they have however a clear meaning : by using "reckless" strategies (with unbounded stakes or borrowing) for very long times, a gambler may "beat" the odds, as illustrated by the doubling strategy, originally called "martingale", which gave this field its name.*

11.3 Comment justifier l'application du théorème d'arrêt des martingales ? Exemples

Exercice 11.5. La ruine du joueur en utilisant les martingales : quelles chances de gagner et au bout de combien de temps ?

Soient X_1, X_2, \dots des v.a.i.i.d. avec $P(X = 1) = p, P(X = -1) = q = 1 - p$ et $0 < p < 1$. Supposons que x et b soient deux entiers avec $0 < x < b$. On définit

$$S_n := x + X_1 + \dots + X_n, \quad T := \inf\{n, S_n = 0 \text{ ou } S_n = b\}.$$

La fortune initiale du joueur de pile ou face est représentée par x et il compte s'arrêter s'il a atteint b ou 0. On peut aussi interpréter ce modèle comme un jeu à deux : alors la fortune initiale du premier joueur est x et celle du second est $b - x$. $S_n - x$ représente alors le gain cumulé du premier joueur et $x - S_n$ les pertes cumulées du second. Chacun des joueurs stoppe quand il est ruiné, i.e. quand $S_n = 0$ ou $S_n = b$. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

1) Calculer $p_x = \mathbb{P}(S_T = 0)$ et $t_x = E(T)$ par le théorème d'arrêt des martingales appliqué aux martingales $M_n = \rho^{S_n}$ et $N_n = S_n - nm$, avec des valeurs de ρ, m choisies tel que ce sont des martingales, et en supposant que le théorème d'arrêt est applicable

R : M_n est un produit de v. a. indépendantes, positives et de moyenne 1 ssi : $\vec{\mathbb{E}}[\rho^{Z_i}] = p\rho + q\rho^{-1} = 1$. Les racines sont $\rho = 1$ (pas intéressant) et $\rho = \frac{q}{p}$. N_n est une somme de v.a. aléatoires indépendantes sommables de moyenne nulle ssi $m = p - q$.

Le théorème d'arrêt donne : $p_x = \frac{1-\rho^x}{1-\rho^b}$, $t_x = \frac{x-Kp_x}{q-p}$.

2) Comment justifier l'application du théorème d'arrêt ?

R : La martingale de Wald M_n est bornée, et la deuxième martingale a des mises bornées. Comme au cas symétrique (Exercice 11.4), $\vec{\mathbb{E}}_x T < \infty$ est une conséquence du théorème PF. On peut aussi appliquer la méthode de 11.9 : "Tout ce qui a une chance raisonnable d'arriver se produira tôt ou tard".

Exercice 11.6. Calculer, en utilisant le théorème d'arrêt des martingales, les probabilités de ruine sur $[0, \infty)$ pour une marche avec $\left\{p_2 = \frac{3}{8}, p_1 = \frac{1}{8}, p_{-1} = \frac{1}{2}\right\}$

Sol : $\vec{\mathbb{E}}Z_1 > 0$ et la loi des grandes nombres implique $\mathbb{P}[T = \infty] > 0$ et donc aucun des cas du théorème d'arrêt ne s'applique pas, car le théorème d'arrêt ne permet pas des temps d'arrêt tq. $\mathbb{P}[T = \infty] > 0$!

Domage, car on trouve facilement une martingale de Wald $M_t = \rho^{X(t)}$, en résolvant $p(\rho) := \vec{\mathbb{E}}[\rho^{Z_i}] = \sum_i p_i \rho^i = 1$, $\rho \in (0, 1)$. Par une "application erronée" du théorème d'arrêt à cette martingale, on trouve la réponse raisonnable $\psi(x) = \rho^x$, avec une interprétation claire,

$$\rho = \mathbb{P}_x[T_{x-1} < \infty].$$

Heureusement, pour une "application correcte," il suffit de remplacer T par le temps d'arrêt borné $T_N = \min(T, N)$, avec $N \rightarrow \infty$. On trouve

$$\rho^x = \vec{\mathbb{E}}\rho^{X_{T_N}} = \rho^{X_N} \mathbb{P}_x[T > N] + \rho^0 \mathbb{P}_x[T \leq N] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x[T < \infty] = \psi(x) \quad (11.2)$$

(le premier terme converge vers 0, car $\mathbb{P}[X_N \rightarrow \infty] = 1$).

Exercice 11.7. Calculer la probabilité de ruine $\psi_x, x \in \mathbb{N}$, pour une marche sur les nombres naturelles, avec la distribution de chaque pas donné par : $\left\{p_{-1} = \frac{8}{10}, p_1 = \frac{1}{10}, p_2 = \frac{1}{10}\right\}$.

Exercice 11.8. Soit

$$X_n = x + \sum_{i=1}^n Z_i, \quad Z_i = \begin{cases} 1, & \text{avec probabilité } p_1 = \frac{8}{10} \\ -1, & p_{-1} = \frac{1}{10}, \\ -2, & p_{-2} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

avec Z_i i.i.d. Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \leq 0\}$

a) $E[Z_1] > 0$?

b) Calculer, en utilisant le théorème d'arrêt des martingales, les probabilités de ruine $\psi(x) = P_x[T_0 < \infty]$, $x \in \mathbb{N}$, pour cette marche. Montrer qu'elles sont positives.

Solution

a) $E(Z_1) = 1 \cdot \frac{8}{10} + (-1) \cdot \frac{1}{10} + (-2) \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2} > 0$

b) On décompose $\psi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x)$, $\phi_i(x) = \mathbb{P}_x[T < \infty, X_T = -i]$, $i = 0, 1$. On applique le théorème d'arrêt appliqué aux deux martingales arrêtées de Wald $M_t = r_i^{X(t)}$ (comme en (11.2)), où $p(r_i) = 0 \Leftrightarrow r_i^x = \sum_{j=0}^1 \phi_j(x) r_i^{-j}$, $r_i \in (0, 1)$. Ici, $r_1 = 1/2$, $r_2 = -1/4$. On résout le système de type Vandermonde.

Les probabilités de ruine sont :

$$\psi_x = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{4}\right)^x$$

Note : Voilà une solution directe, par conditionnement sur le premier pas :

$$\begin{aligned} \psi(x) = P_x[T_0 < \infty] &= \sum_{-2}^1 P[Z_1 = i] \cdot P_x[T_0 < \infty | x + Z_1 = x + i] \\ &= \sum_{-2}^1 P[Z_1 = i] \cdot P_{x+i}[T_0 < \infty] = \sum_{-2}^1 p_i \cdot \psi(x + i) \\ &= \frac{8}{10} \cdot \psi(x + 1) + \frac{1}{10} \cdot \psi(x - 1) + \frac{1}{10} \cdot \psi(x - 2), (x \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Les CF sont :

$$\begin{cases} \psi(\infty) &= 0 \\ \psi(0) &= 1 \\ \psi(-1) &= 1. \end{cases}$$

(il est aussi vrai que $\psi(-2) = 1, \dots$ mais -2 n'est pas dans l'espace d'états).

On cherche $\psi(x) = \rho^x$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \rho^x &= \frac{8}{10} \cdot \rho^{x+1} + \frac{1}{10} \cdot \rho^{x-1} + \frac{1}{10} \cdot \rho^{x-2} \\ \Rightarrow \rho^2 &= \frac{8}{10} \cdot \rho^3 + \frac{1}{10} \cdot \rho + \frac{1}{10} \\ \Rightarrow (\rho - 1)(2 \cdot \rho - 1)(4\rho + 1) &= 0 \\ \Rightarrow \psi(x) &= A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^x + A_2 \left(-\frac{1}{4}\right)^x \end{aligned}$$

$\psi(0) = \psi(-1) = 1$ sont satisfaites ssi $A_1 = \frac{5}{6}$, $A_2 = \frac{1}{6}$. Les probabilités de ruine sont :

$$\psi(x) = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^x$$

11.4 Comment démontrer qu'un temps d'arrêt T est fini p.s.

Quand l'espace d'états et la loi d'un temps d'arrêt ne sont pas explicites, il est quand-même possible de démontrer que T est fini p.s par l'astuce suivante :

Exercice 11.9. "Tout ce qui a une chance positive d'arriver après un nombre fini des pas se produira tôt ou tard" (*Williams, exercice E10.5 p. 233*)

Soit \mathcal{F} une filtration (avec $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$) et T un temps d'arrêt tels que pour un certain $N \in \mathbb{N}$ et un certain $\varepsilon > 0$,

$$\forall n, \mathbb{P}(T \leq n + N | \mathcal{F}_n) > \varepsilon, \text{ p.s.}$$

1) Montrer par récurrence en utilisant $\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN; T > (k-1)N)$ que pour $k = 1, 2, \dots$,

$$\mathbb{P}(T > kN) \leq (1 - \varepsilon)^k.$$

1) Réponse : On procède par récurrence. Quand $n = 0$, on a bien la propriété par hypothèse car $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et donc $\mathbb{P}(T > N) \mathbb{1}_\Omega = \mathbb{P}(T > N | \mathcal{F}_0) = 1 - \mathbb{P}(T \leq N | \mathcal{F}_0) \leq 1 - \varepsilon$. De plus,

$$\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN; T > (k-1)N) = \int_{T > (k-1)N} \mathbb{1}_{T > kN} = \int_{T > (k-1)N} \vec{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{T > kN} | \mathcal{F}_{(k-1)N})$$

(car l'ensemble $[T > (k-1)N]$ est $\mathcal{F}_{(k-1)N}$ -mesurable)

$$\leq (1 - \varepsilon) \mathbb{P}(T > (k-1)N) \text{ par hypothèse.}$$

2) En déduire que $\vec{\mathbb{E}}(T) < \infty$.

2) Réponse : On a

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{E}}(T) &= \sum_n n \mathbb{P}(T = n) \leq \sum_n n \mathbb{P}(T > n - 1) \\ &\leq \sum_k \sum_{(k-1)N \leq n \leq kN} n \mathbb{P}(T > n - 1) \\ &\leq N \sum_k kN \mathbb{P}(T > (k-1)N - 1) \\ &\leq N \sum_k kN \mathbb{P}(T > (k-2)N) \\ &\leq N^2 \sum_k k(1 - \varepsilon)^{k-2} < \infty \end{aligned}$$

Exemple 11.7. ABRACADABRA, cf. poly Morel : une très longue attente (Grimmett-Stirzaker One thousand exercises in probability, exercice 16 p. 124 et Williams, exercice E10.6 p. 233) On va résoudre par martingale le problème suivant :

Quelle est l'attente moyenne au jeu de pile ou face pour qu'une séquence préfixée se produise ?

Prenons l'exemple de la séquence PPP (pile trois fois).

Un très grand casino contient une infinité de joueurs G_1, G_2, \dots qui disposent chacun d'une fortune de 1 euro. Un croupier tire à pile ou face (probabilités p et $q = 1 - p$ toutes les secondes. Au temps n , le joueur G_n se met à parier de la manière suivante : il place 1 sur Pile. Le casino étant équitable, il touche en cas de succès $\frac{1}{p}$ (expliquer pourquoi). Il place alors à nouveau cette fortune sur Pile. Il continue ainsi à parier toute sa fortune sur Pile jusqu'à ce qu'il aie gagné trois fois de suite (PPP) ou qu'il perde tout. Dans les deux cas, il quitte alors le casino.

1) Soit S_n le profit (ou la perte) cumulé(e) du casino après le n -ième tirage. Montrer que S_n est une martingale.

1) Réponse : Soit Y_n la v.a. associée au n -ième tirage ($Y_n = F$ ou P) et $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Soit X_n la somme des gains et pertes des joueurs après le n -ième coup. Comme X_n est une fonction déterministe des résultats Y_n des n coups précédents, elle est \mathcal{F}_n -mesurable. Comme le jeu est équitable, la moyenne de X_n est nulle. De plus, le nombre de joueurs est plus petit que 3 et leur enjeu plus petit que p^{-3} . Donc X_n est sommable. S_n est donc l'exemple classique de martingale, à savoir une somme de v.a. sommables indépendantes et de moyenne nulle X_n .

2) Soit T le nombre de tirages effectués avant la première apparition de PPP. Montrer que T est un temps d'arrêt, montrer que $E(T) < \infty$. Utiliser le résultat de l'exercice 11.9.

2) Réponse : La décision $T = n$ est une fonction déterministe des résultats de Y_1, \dots, Y_n et est donc \mathcal{F}_n -mesurable. C'est donc un temps d'arrêt. Pour montrer que $E(T) < \infty$, il suffit de vérifier que l'hypothèse de l'exercice 11.9 est vérifiée : $\mathbb{P}(T \leq n + N | \mathcal{F}_n) > \varepsilon$, a.s.. On le montre pour $N = 3$. Notons $\Omega_n = \{P, F\}^n$ l'ensemble des résultats possibles pour les n premiers tirages. La tribu \mathcal{F}_n est engendrée par la partition en événements atomiques $B_i = [(Y_1, \dots, Y_n) = i]$, i décrivant Ω_n . Par la formule (PT), on a pour tout événement A , $\mathbb{P}(A | \mathcal{F}_n) = \sum_{i \in \Omega_n} \mathbb{P}(A | B_i) \mathbb{1}_{B_i}$. On choisit $A = [T \leq n + 3]$. En effet, une séquence PPP peut se produire aux trois coups suivants avec probabilité $\varepsilon = p^3$ et on a

$$\mathbb{P}(T \leq n + 3 | \mathcal{F}_n) \geq \sum_{i \in \Omega_n} \mathbb{P}([(X_{n+1}X_{n+2}X_{n+3}) = (PPP)] | B_i) \mathbb{1}_{B_i} = p^3 \sum_i \mathbb{1}_{B_i} = p^3.$$

3) En déduire que $\vec{E}(T) = p^{-1} + p^{-2} + p^{-3}$.

3) Réponse : On applique le théorème d'arrêt des martingales b) ou d). Donc

$E(S_T) = 0$. Mais, au moment où le jeu s'arrête, les joueurs G_1, \dots, G_n ont misé chacun -1 et seuls G_{n-2} , G_{n-1} et G_n ont gagné respectivement p^{-3} , p^{-2} et p^{-1} . Donc $E(S_T) = 0$ donne $p^{-1} + p^{-2} + p^{-3} - \vec{\mathbb{E}}T = 0$.

4) Adapter le raisonnement pour calculer le temps moyen d'attente de PFP.

4) Réponse : on trouve $\vec{\mathbb{E}}(N) = p^{-1} + p^{-2}q^{-1}$.

5) Dans le même esprit : le casino possède un singe qui tape au hasard sur les 26 touches majuscules à la vitesse de 60 caractères par minute. Montrer que le temps moyen d'attente de la séquence ABRACADABRA est $26^{11} + 26^4 + 26$. Donner un ordre de grandeur en années du temps d'attente.

6) Un paradoxe ? Les calculs précédents prouvent que le temps moyen d'attente de PP (deux fois Pile) dans le cas $p = \frac{1}{2}$ est égal à $2 + 4 = 6$ alors que le temps d'attente de PF est de 4. Ceci peut paraître contreintuitif, puisque les séquences PP et PF sont équiprobables ! De même, on vient de voir que le temps d'attente de ABRACADABRA est supérieur au temps d'attente de, disons, ABCDEF-GHIJK, qui est une séquence de même longueur et donc équiprobable. Discuter ce paradoxe. Vous convaincre par une simulation de pile ou face (utiliser directement une monnaie) que l'expérience confirme bien la différence de temps d'attente pour PP et PF.

11.5 Exercices

1. Montrer que pour un joueur qui joue "la martingale"

$$\vec{\mathbb{E}}S_{T-1} = -\infty$$

Ind : Calculer la loi de S_{T-1} .

2. **La marche aléatoire simple asymétrique, sur un interval infini.** Soit (Z_n) une suite de variables Bernoulli, indépendantes : $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(Z_n = -1) = q = 1 - p < p$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n) = \sigma(S_0, \dots, S_n)$. Soit enfin $T = \inf\{n \geq 0; S_n = 1\}$ qui est un temps d'arrêt.
 - a) Montrer que $\mathbb{P}[T < \infty] = 1$.
 - b) Calculer $\vec{\mathbb{E}}T$, en utilisant le théorème d'arrêt des martingales, et en supposant qu'on a déjà démontré $\vec{\mathbb{E}}T < \infty$.
3. **La marche aléatoire simple symétrique, sur un interval infini.** Soit (Z_n) une suite de Bernoulli de paramètre $1/2$, $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n) = \sigma(S_0, \dots, S_n)$, et $T = \inf\{n \geq 0; S_n = 1\}$. Ici, la conclusion du théorème d'arrêt pour la martingale S_n est fautive, car $\vec{\mathbb{E}}_0[S_T] = 1$. Comme les mises sont finies et le cas 2) ne s'applique pas, il suit que $\vec{\mathbb{E}}_0[T] = \infty$!

On verra maintenant que $\mathbb{P}_0[T = \infty] = 0$ (mais comme les pertes possibles sont infinies, le cas 3) ne s'applique non plus).

Nous allons calculer la distribution de T , en utilisant la **martingale exponentielle** de moyenne 1

$$M_n^\theta = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[e^{\theta Z_n}]} \right)^n \exp(\theta S_n) = \left(\frac{1}{\cosh \theta} \right)^n \exp(\theta S_n)$$

(les martingales de Wald sont les cas particuliers obtenues en choisissant θ tq $\mathbb{E}[e^{\theta Z_n}] = 1$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la martingale arrêtée en T $M_{T \wedge n}^\theta$. On a :

$$\mathbb{E}(M_{T \wedge n}^\theta) = 1 = \mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{\cosh \theta} \right)^{T \wedge n} \exp(\theta S_{T \wedge n}) \right)$$

Soit $\theta > 0$. On remarque que la martingale arrêtée est bornée uniformément par $(\cosh \theta)^{-1}$, et que \mathbb{P} presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{T \wedge n}^\theta = 1_{\{T < \infty\}} \frac{e^\theta}{(\cosh \theta)^T}$$

(car sur $\{T = \infty\}$ la martingale arrêtée converge vers 0). Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E} \left[1_{\{T < +\infty\}} \frac{1}{(\cosh \theta)^T} \right] = e^{-\theta}$$

En faisant tendre θ vers 0 et en utilisant le théorème de convergence monotone, on déduit que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$. On peut donc oublier l'indicatrice dans l'égalité précédente. Effectuant alors le changement de variables $\alpha = 1/\cosh(\theta)$, on obtient

$$\mathbb{E}(\alpha^T) = \frac{1}{\alpha} [1 - \sqrt{1 - \alpha^2}]$$

En particulier, on a

$$\mathbb{P}(T = 2m) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(T = 2m - 1) = (-1)^{m+1} C(1/2, m)$$

11.6 Marches aléatoires “infinitesimales” et le mouvement Brownien

Voir notes de Chang.

Marches aléatoires “infinitesimales” et mouvement Brownien.

Soit $X_t = X_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$ une marche aléatoire “infinitesimale” sur \mathbb{R} , i.e. une marche avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = D] = p$ et $P[Z_n = -D] = q = 1 - p$, ou $p, q = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{c}{\sigma}\sqrt{h})$, $D = \sigma = \sqrt{h}$, $h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ et $nh = t$.

1. Montrez que la fonction génératrice de moments de X_t , donné par $\vec{\mathbb{E}}e^{\theta X_t}$, converge vers $e^{t\kappa(\theta)}$ où $\kappa(\theta) = c\theta + \frac{\sigma^2\theta^2}{2}$, et donc elle exhibe la linéarité en t caractéristique aux processus de Lévy .
2. Montrez qu’il existe un processus de Lévy Gaussien $B_t =$ (appelé mouvement Brownien standard) avec $\kappa(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$, en spécifiant sa densité.
3. Montrez encore qu’il existe un processus de Lévy Gaussien $B_{c,\sigma^2}(t)$ (appelé mouvement Brownien de tendance c et variabilité σ) avec $\kappa(\theta) = c\theta + \frac{\sigma^2\theta^2}{2}$.
4. Montrez que l’espérance et la variance de la marche aléatoire infinitesimale X_t approchent ceux d’un mouvement Brownien $B_{c,\sigma^2}(t)$ de tendance c et variabilité σ ($B_{c,\sigma^2}(t) = x_0 + \sigma W_t + ct$, où W_t est le mouvement Brownien standard.)

Exercice 11.10. Calculer EX_t^α , $\alpha = 2, 4$ pour le mouvement Brownien et pour le processus de Poisson composé.

Un résultat important, mais difficile à démontrer, est :

Théorème 11.3. Un processus de Lévy a des chemins continus ssi sa fonction génératrice des cumulants est quadratique :

$$\kappa(\theta) = c\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2$$

Définition 11.6. a) Le processus de Lévy $B(t)$ avec fonction génératrice des cumulants quadratique de la forme :

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2$$

s’appelle mouvement Brownien standard.

b) Le processus de Lévy $B_{c,\sigma^2}(t)$ avec fonction génératrice des cumulants quadratique de la forme :

$$\kappa(\theta) = c\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2$$

s’appelle mouvement Brownien à tendance c et variance σ^2 .

Le mouvement Brownien est un processus très important en applications (par exemple mathématiques financières), mais il est aussi le plus difficile à étudier.

11.7 La décomposition de Lévy -Khinchine

Un résultat important, mais difficile à démontrer, est :

Théorème 11.4. *Un processus de Lévy a des chemins continus ssi il est un mouvement Brownien, c.-à-d. sa fonction génératrice des cumulants est quadratique $\kappa(\theta) = \mu\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2$.*

La partie qui reste d'un processus de Lévy après avoir "enlevé" une éventuelle composante Brownienne est un **processus des sauts pur avec espace d'états continu** \mathbb{R} . Ce type des processus de Lévy est caractérisé par une "mesure de Lévy", c.-à-d. une mesure $\nu(dz)$ satisfaisant

$$\nu[\{|z| \geq 1\}] < \infty, \quad \int_{\{|z| \leq 1\}} z^2 \nu(dz) < \infty, \quad (11.3)$$

et tel que $\nu(dz)$ fournit le taux d'arrivée des sauts de taille z . Le point de troncation 1 entre les "grands sauts" et les petits sauts est arbitraire. Remarquez que la masse totale de grands sauts est finie, mais celle des petits sauts pas forcément. Si en plus la masse des petits sauts est finie, on a faire avec un processus de Poisson composé, c.-à-d.

$$\nu(dz) = \lambda F(dz),$$

où $F(dz)$ est une cdf. Le cas général peut être approximé par des processus de Poisson composé, mais pour simplifier, nous allons travailler dans un premier temps seulement avec des processus qui sont sommes indépendantes d'un mouvement Brownien avec tendance et d'un processus de Poisson composé.

Un résultat fondamental, la décomposition de Lévy -Khinchine, nous assure que chaque processus de Lévy est la somme indépendante d'un mouvement Brownien avec tendance et d'un processus de Lévy des sauts (qui est une limite des processus de Poisson composés). Remarquons aussi qu'il y a une correspondance biunivoque entre les processus de Lévy et les mesures infiniment divisibles.

Chapitre 12

Le modèle de Cramér-Lundberg

Un exemple très important historiquement de processus de Lévy est le processus de réserves, ou de risque d'une compagnie d'assurance.

Définition 12.1. *Le processus de risque de Cramér Lundberg est un processus de la forme*

$$X(t) = u + c t - S(t), \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} Z_i, \quad (12.1)$$

où Z_i sont des variables aléatoires *i.i.d.* **nonnegatives**, et $N_\lambda(t)$ est un processus de Poisson indépendant de Z_i .

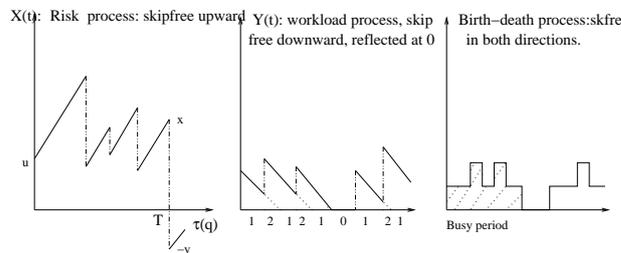


Figure 12.1 – Skip-free (spectrally one sided) processes

Le processus (12.1) modélise le capital d'une compagnie d'assurance en tenant compte des cotisations des assurés $c t$, du montant global $S(t)$ des sinistres Z_i à couvrir, et du capital initial de la compagnie $X(0) = u$. Le processus de Cramér-Lundberg est à cet effet la différence de deux sous processus : le processus des cotisations des assurés et le processus des sinistres à couvrir.

Remarque 12.1. *Le processus (12.1) vit naturellement en temps continu. Mais, il peut aussi être considéré en temps discret, s'il est observé que pour $t \in \mathbb{N}$, et aussi avec un espace d'états discret, si c est un entier.*

Remarque 12.2. Le processus $N(t)$ de Poisson de taux λ a est le choix le plus simple de processus de comptage. En le remplaçant avec un processus de comptage général, on arrive au modèle de Sparre-Andersen. Quand $N(t)$ suit une distribution de Poisson, alors le processus $S(t)$ représentant le montant global des sinistres est un cas particulier des processus de Poisson composé. Comme les sauts sont positifs, c'est aussi un cas particulier de subordonateur (c'est à dire de processus de Lévy non décroissant).

L'exposant de Laplace du processus de Cramér Lundberg est facile à obtenir, à partir de celui du processus de Poisson composé (10.2) :

$$\kappa(s) = cs + \lambda(f_Z^*(s) - 1) = cs + \int_0^\infty (e^{-sz} - 1)\lambda f_Z(z)dz = cs + \int_0^\infty (e^{-sz} - 1)\nu(dz) \quad (12.2)$$

où $\nu(dz) = \lambda f_Z(z)dz$ est appelée mesure de Lévy .

Taux de profit et coefficient relatif de sécurité. L'espérance du processus $X(t) - X(0)$ est linéaire en t :

$$E[X(t) - X(0)] = E_0[X(t)] = ct - E[N(t)] \cdot E[Z] = (c - \lambda m_1)t := p t \quad (12.3)$$

Par la loi des grands nombres, si le taux de profit $p = c - \vec{\mathbb{E}}S(1)$ est négatif, alors la ruine de la compagnie est certaine, ce qui n'est pas le cas dans le cas contraire. Le cas d'intérêt pratique est donc quand le taux de profit $p = c - \vec{\mathbb{E}}S(1)$ est positif.

Le coefficient relatif de sécurité est le profit relatif au risque, par unité de temps :

$$\theta = \frac{c - \vec{\mathbb{E}}S(1)}{\vec{\mathbb{E}}S(1)} = \frac{c - \lambda m_1}{\lambda m_1} = \frac{p}{\lambda m_1}.$$

Le taux des cotisations pourrait être décomposé de la manière suivante :

$$c = \vec{\mathbb{E}}S(1) + p = (1 + \theta) \vec{\mathbb{E}}S(1).$$

La valeur du coefficient relatif de sécurité est d'habitude comprise entre 10% et 20%.

Exercice 12.1. (Ross, Exercice 63) Une société d'assurance paie pour les déclarations de sinistres dans le cadre des contrats d'assurance vie selon un processus de Poisson de taux $\lambda = 5$ par semaine. Si le montant payé pour chaque contrat suit une distribution exponentielle de moyenne 2000, quelles sont la moyenne et la variance des montants payés par la société d'assurances dans un intervalle de quatre semaines ?

Exercice 12.2. (Ross, Exercice 66) L'arrivée des clients à un distributeur de billets suit un processus de Poisson de taux 12 per hour. Le montant retiré à chaque transaction est une variable aléatoire de moyenne 30 et écart-type 50 (un retrait négatif signifie que de l'argent a été déposé). La machine est utilisée 15 heures par jour. Approximez la probabilité que le montant total retiré par jour soit inférieur à 6000.

12.1 La probabilité de ruine pour les modèles de Cramér-Lundberg et Lévy

La ruine intervient lorsque le montant des remboursements à effectuer dépasse le capital actuel de la compagnie, c'est à dire $X(t) < 0$.

Le temps de ruine τ est l'instant où la ruine survient, c'est à dire le temps de premier passage du processus $X(t)$ en dessous de 0 :

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : X(t) < 0\}.$$

On dénote la loi du temps de ruine conditionnée par $X(0) = u$ par

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0, X(t) < 0 | X(0) = u\} = \inf\{t \geq 0 | Y(t) \geq u\} = \tau_Y(u),$$

où $Y(t) = S(t) - ct = u - X(t)$

Remarque 12.3. Si $X(t) > 0, \forall t \geq 0$ alors $\tau = \infty$.

Remarque 12.4. Le modèle de Cramér-Lundberg est un processus de Lévy spectralement négatif, i.e. sa mesure de Lévy est concentré sur $(-\infty, 0)$. Par contre, $Y(t)$ est un processus de Lévy spectralement positif.

Nous sommes intéressés par :

— La probabilité de ruine sur un horizon fini c'est à dire avant un instant donné t , défini par

$$\Psi(t|u) = \mathbb{P}[\tau < t | X(0) = u] = \mathbb{P}[\bar{Y}(t) \geq u], \quad \bar{Y}(t) := \text{Max}_{\{0 \leq s \leq t\}} Y(s)$$

Remarque 12.5. $\Psi(t|u)$ est une fonction de répartition (c.d.f.) en t , et une fonction de survie en u .

— La probabilité de ruine "éventuelle" (sur un horizon infini) définie par :

$$\Psi(u) = \mathbb{P}[\tau < \infty | X(0) = u] \tag{12.4}$$

— On étudie aussi les probabilités de survie :

$$\bar{\Psi}(t|u) = \mathbb{P}[\tau \geq t | X(0) = u] = 1 - \Psi(t|u)$$

$$\bar{\Psi}(u) = \mathbb{P}[\tau = \infty | X(0) = u] = 1 - \Psi(u) \tag{12.5}$$

Notes : 1) La probabilité de survie "perpétuelle" (à horizon infini) (12.5) et la probabilité de ruine éventuelle (12.4) représentent respectivement la fonction de répartition cumulative (c.d.f.) et la fonction de survie (c.c.d.f.) du déficit maximal $\bar{Y} = \sup_{0 \leq s < \infty} Y(s)$:

$$\bar{\Psi}(u) = P[\bar{Y} \leq u], \quad \Psi(u) = P[\bar{Y} > u]$$

2) Parfois, la probabilité la plus commode à utiliser pour les différentes dérivations est :

$$w(t, u) = \mathbb{P}[t \leq \tau < \infty | X(0) = u] = \Psi(u) - \Psi(t, u).$$

Remarque 12.6. *Le calcul des probabilités de ruine sur un horizon fini n'est pas évidente analytiquement. Un moyen naturel de procéder est de calculer la transformée de Carson-Laplace en t*

$$\Psi_q(u) = \int_0^\infty qe^{-qt}\Psi(t|u)dt$$

(qui représente également la probabilité de ruine du processus "terminé" après une v.a.i exp. \mathcal{E}_q de taux q), et d'obtenir en suite des approximations en inversant la transformée.

Notons quelques différentes définitions possibles pour la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} \Psi_q(u) &= P[\bar{Y}_q > u] = P[T \leq \mathcal{E}_q | X(0) = u] \\ &= \int_0^\infty qe^{-qt} P[T \leq t | X(0) = u] dt = \\ &\int_0^\infty e^{-qt} \Psi(dt, u) = E_u e^{-qT}. \end{aligned} \quad (12.6)$$

12.2 L'équation intégrro-différentielle (*)

Des équations intégrro-différentielles pour les probabilité de ruine $\Psi(u)$ et de survie $\bar{\Psi}(u) = 1 - \Psi(u)$ du processus de Cramér-Lundberg s'obtiennent simplement par la méthode de conditionnement, après un temps infinitesimal, ou après le premier saut. Ces équations font intervenir l'opérateur "générateur du semigroupe" correspondant à ce processus

$$\mathcal{G} g(x) = c \frac{\partial}{\partial x} g(x) + \lambda \int_0^\infty g(x-z) F_Z(dz) - \lambda g(x).$$

Proposition 12.1. *Les probabilités de ruine et survie sont, respectivement, des solutions de :*

$$\mathcal{G} \Psi(x) = 0, \quad \Psi(x) = 1, \text{ si } x < 0, \quad \Psi(\infty) = 0 \quad (12.7)$$

$$\mathcal{G} \bar{\Psi}(x) = 0, \quad \bar{\Psi}(x) = 0, \text{ si } x < 0, \quad \bar{\Psi}(\infty) = 1 \quad (12.8)$$

Une forme alternative de la première équation est

$$\tilde{\mathcal{G}} \Psi(x) + \lambda \bar{F}_Z(x) = 0, \quad \Psi(x) = 1, \text{ si } x < 0, \quad \Psi(\infty) = 0, \quad (12.9)$$

où $\tilde{\mathcal{G}} h(x) = ch'(x) + \lambda \int_0^x h(x-z) f_Z(z) dz - \lambda h(x)$.

Démo Les deux méthodes de conditionnement, après un temps infinitésimal, et après le premier saut, donnent respectivement :

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= (1 - \lambda dt)\Psi(x + cdt) + \lambda dt \int_0^\infty \Psi(x - z)F_Z(dz) \\ &\iff c\Psi'(x) - \lambda\Psi(x) + \lambda dt \int_0^x \Psi(x - z)F_Z(dz) + \lambda\bar{F}_Z(x)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(x + ct - z)\lambda e^{-\lambda t}F_Z(dz)dt \\ &= \lambda \int_0^\infty \left(\int_0^{x+ct} \Psi(x + ct - z)F_Z(dz) + \bar{F}_Z(x + ct) \right) e^{-\lambda t} dt\end{aligned}$$

La deuxième méthode demande encore du travail ...

Chapitre 13

TP SAGE : Symbolique algebra and geometry experimentation

Sage utilise `=` pour les affectations (affectations). Il utilise `==`, `<=`, `>=`, `<`, `>` pour les comparaisons, `[...,...]` pour les listes et `(...,...)` pour arguments.

```
sage: a=sin(pi/12) sage: N(a,digits=30)
```

Comme le montre cet exemple, SAGE peut fournir pas seulement des approximations numériques, mais aussi des valeurs exactes plutôt. Pour obtenir une approximation numérique, on utilise au choix la **fonction** `n` ou la **méthode** `n` (chacun de ces noms possède le nom plus long `numerical_approx`, la fonction `N` est identique à `n`). Celles-ci acceptent, en argument optionnel, `prec`, qui indique le nombre de bits de précisions requis, et `digits`, qui indique le nombre de décimales demandées ; par défaut, il y a 53 bits de précision.

En Python, contrairement à des nombreux autres langages, les blocs de code ne sont pas délimités par des accolades ou des mots-clés de début et de fin de bloc. Au lieu de cela, la structure des blocs est donnée par l'indentation, qui doit être la même dans tout le bloc. Il n'y a pas besoin de placer des points-virgules en fin de ligne ; une instruction est en général terminée par un passage à la ligne. En revanche, il est possible de placer plusieurs instructions sur la même ligne en les séparant par des points-virgules :

```
sage : a = 5; b = a + 3; c = b2;
```

Pour continuer une instruction sur la ligne suivante, placez une barre oblique inverse en fin de ligne.

Obtenir de l'aide : `sage : random_matrix ?` `sage : fonction ?` `sage : lambda ?`

Voir les tutoriels SAGE comme <http://www.sagemath.org/fr/html/tutorial/> les démos et l'aide pour d'autres concepts de base, et surtout les exemples <http://wiki.sagemath.org/interact/>

13.1 Algèbre linéaire

1. The Dry-Wet chain

```
P = matrix(RR, [[9/10, 1/10], [1/2, 1/2]]) #the matrix P of dry-wet transitions
# could have used QQ instead of RR above for exact rational arithmetic
P

P.parent()# know the parent of your matrix type

sage: P.eigenvalues()#Calcul des valeurs propres et multiplicités algébriques
sage: P.eigenvectors_right()

p = DiGraph(P, format="weighted_adjacency_matrix")
pos_dict={}
pos_dict[0] = [1, 1]
pos_dict[1] = [3, 1]
pp=p.plot(edge_labels=True, pos=pos_dict, vertex_size=300)
pp.show()

p0 = vector((1,0)) # initial probability vector for a dry day zero
p3 = p0*P^3 #
p3

nmax = 5 # maximum number of days or time-steps of interest
[(n, vector((0,1)) * P^n) for n in range(nmax+1)] # state probability vector a
# the next line is just html figure heading
html("<h3>$n$-step probab vector $p^{(n)}=(p^{(n)}_0, p^{(n)}_1)$, \ $n=0,1,\dots$")
# now we will plot the prob vectors
# the red points start on a dry day 0
pns_plot = point([vector((1,0)) * P^n for n in range(nmax+1)], color='red')
pns_plot += line([vector((1,0)) * P^n for n in range(nmax+1)], color='red')
# the blue points start on a wet day 0
pns_plot += point([vector((0,1)) * P^n for n in range(nmax+1)], color='blue')
pns_plot += line([vector((0,1)) * P^n for n in range(nmax+1)], color='blue')
# suppose we had initial state prob vector (0.833,0.167) then where do we go
pns_plot += point([vector((0.833,0.167)) * P^n for n in range(nmax+1)], color='b')
pns_plot += line([vector((0.833,0.167)) * P^n for n in range(nmax+1)], color='b')
pns_plot.show(figsize=[5,4],
                axes_labels=['$p^{(n)}_0$', '$p^{(n)}_1$'])

#Solving the system of equations for the stat. probs s0,s1
s0, s1 = var('s0, s1')
P = matrix(QQ, [[9/10, 1/10], [1/2, 1/2]]); P
eqs = vector((s0, s1)) * (P-matrix(2,2,1));
solve([eqs[0] == 0, eqs[1]==0, s0+s1==1], s0, s1)
```

```

solve([eqs[0] == 0, s0+s1==1], s0,s1)#use just eqs[0]==0 since eqs[1]==0 is redu
P.eigenvalues()#P.Tab gives all the possible methods
D, V = P.eigenmatrix_left() # left eigen decomposition
show(D)
show(V)
show(V[0],V[0]*P)
# checking when we left-multiply by left-eigenvector
# of eigenvalue 1 we get the output scaled by 1
# checking that the eigen decomposition of P is indeed P
V*P*V.inverse()

# normalize to make it a probability vector
V[0] / V[0].norm(1)

```

2. symbolic matrices

```

matrix(SR, 2, 2, var('t'))
#SR=Symbolic Ring, parent object for all symbolic expressions
matrix(SR, 2, 2, range(4))

```

3. Gambler's ruin chain

```

var( 'p,q' );n=5;
def MarkovMatrix( p,q, rows=n, ring=SR ):
    A = matrix( ring, rows, rows )
    A[0,0] = 1
    A[rows-1,rows-1] = 1
    for k in range( 1, rows-1 ):
        A[k,k-1] = q
        A[k,k+1] = p
    return A

A = MarkovMatrix( p,q )
print "The matrix A is:"
print A.str()
print A^2.str()
print A^4.str()

var('n')
L=limit(A^n,n=infinity)
L # fails

R = RealField(53)
A = GR(0.4, 0.6, rows=n, ring=R )
B=A^(2^20);Bt=B.transpose()
show(Bt[0])#first column=probs of absorbtion from transient states

```

4.

```
sage: A = Matrix([[1,2,3],[3,2,1],[1,1,1]])#non-singular matrice
sage: X =A.solve\_right(Y)
sage: A.det
sage: B=A.inverse
```

L'évaluation de `A.solve_right(Y)` renvoie une matrice (ou un vecteur) $X = A^{-1}Y$. Un antislash (contre-oblique) peut être aussi employé à la place de `solve_right`

```
sage: C=A \ Y
sage: C- B Y ==0 sage: D= Y / A sage: C- B Y ==0
```
5.

```
sage: var('a')
sage: A=matrix([[a,1,0],[0,a,1],[0,0,a]])
sage: A^5 #puissance d'une matrice de Jordan
sage: $A^5$
sage: A.exp()
```

13.2 Un peu d'analyse

1. limites, differentiation, Taylor

```
sage: var('x') # create a symbolic variable
sage: limit(sin(x)/x,x=0) 1
sage: limit((1 + 3^(-x))^x, x=infinity)
sage: diff(sin(x^2), x, 4)
sage: cos(x).taylor(x,0,10)
sage: y=((x^2-1)/(x-1)-x)
sage: y.rational_simplify()
```

2. Pour calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{x^2-1}$:

```
sage: f = 1/((1+x)*(x-1))
sage: f.partial_fraction(x)
1/2/(x - 1)-1/2/(x + 1)
```

3. Pour calculer $\int x \sin(x^2) dx$ et $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$:

```
sage: x = var('x')
sage: integral(x*sin(x^2), x)
-1/2*cos(x^2)
sage: integral(x/(x^2+1), x, 0, 1)
1/2*log(2)
sage: a=integrate(sqrt(x)*sqrt(1+x), x)
sage: show(plot(a, 0, 40))
```

4. Pour calculer la dérivée partielle de $x^2 + 17y^2$ par rapport à x et y respectivement :

```
sage: x, y = var('x,y') # var('x,y') devrait marcher aussi
sage: f=x^2 + 17*y^2
sage: f.diff(x) 2*x ;
sage: f.diff(y) 34*y
```

5. **Types des données** Pour trouver le type d'une variable, taper `type()`. SAGE utilise le langage de programmation Python, qui lui-même possède trois types de données composés qui vous seront utiles :

- (a) n-uplet : plusieurs expressions séparées par des virgules, et entourées d'un couple de parenthèses (en général facultatives), par exemple $v = (x,y,z)$;
- (b) liste : se note avec des crochets, par exemple : $L = [1,4,2,8,5,7]$; Faites afficher le type de v et de L . L'accès à un élément d'un n-uplet ou d'une liste se fait en précisant son indice (numéroté à partir de 0). Évaluez par exemple $L[0]$. Le nombre d'éléments de L s'obtient avec $\text{len}(L)$. On peut modifier les éléments d'une liste, mais pas ceux d'un n-uplet. Essayez par exemple : $L[0] = -1$; et vérifiez que la même instruction appliquée à v provoque une erreur.
- (c) dictionnaire : c'est un ensemble de couples de la forme `clef : valeur`, par exemple : $d = 4 : 8, 1 : 25$. L'accès à un élément se fait en précisant la clef entre crochet. Évaluez par exemple $d[4]$. Que renvoie la commande suivante ?

```
var('x,y') ; z = sin(x^2/y) dico = {x : -1, y : 2}
z(dico)
```

6. **Construction des listes** Une liste d'entiers successifs s'obtient avec la fonction `range`. Testez les commandes suivantes :

```
range(10) ; range(3,13) ; range(3,13,2)
```

(la construction $[a..b]$ est équivalente à $\text{range}(a,b+1)$). On peut aussi construire des listes par compréhension :

```
[1/n^2 for n in range(1,11)]
```

Rémarque : Certaines commandes prennent des listes (ou bien des n-uplets) en paramètres : c'est par exemple le cas de `solve` ou de `plot3d`.

Ouvrir un terminal, puis lancer Sage, et un notebook avec la commande `notebook()`. Pour exécuter le contenu d'une cellule de la feuille de calcul, taper (Shift+Enter). Le résultat du dernier calcul est automatiquement stocké dans la variable `_`; par exemple, la commande `type(_)` affiche le type de ce résultat. Une aide thématique est disponible à l'adresse :

<http://doc.sagemath.org/html/en/reference/>.

1 Opérations, variables, méthodes

On introduit les bases de Python et de Sage.

1. Calculer $3 + 2 + 5$, $\sin(\frac{\pi}{3})$, $\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\pi}{3})} - \cos(\frac{\pi}{3})$. Toutes les fonctions usuelles sont déjà programmées!
2. On stocke ou modifie une variable nommée x avec la commande `x = val`, où `val` est la valeur que l'on veut donner à x . Recalculer $\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\pi}{3})} - \cos(\frac{\pi}{3})$ en stockant d'abord une variable égale x à $\sin(\frac{\pi}{3})$. Pour afficher la valeur d'une variable x , on utilise la commande `print x`, ou simplement `x`.
3. La documentation d'une fonction `func` est donnée par la commande `func?`. Demander la documentation de la fonction `sin`, et celle de `matrix`. Créer une variable `M` égale à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Le type d'un objet x dans Sage (ou Python) est donné par la fonction `type(x)`. Quel est le type de `3`? de `3.1`? de la matrice créée à la question précédente? On peut forcer le type d'un nombre x (réel, entier, rationnel) avec les commandes `RR(x)`, `ZZ(x)` et `QQ(x)`. Créer trois versions différentes du nombre `3`.
5. Tous les objets dans Sage ont des méthodes qui leurs sont associées, et qui dépendent du type de l'objet en question. Une méthode `method` d'un objet x est appelée par la commande `x.method()`. Pour avoir la liste des méthodes associées à un objet x , on peut taper `x. + (Tab)`. Calculer le déterminant, les valeurs propres et l'inverse de la matrice `M`.
6. Presque tous les objets mathématiques sont déjà implémentés dans Sage. En utilisant la documentation, réaliser les tâches suivantes :
 1. Créer un graphe (`Graph`) qui est un triangle, et l'afficher.
 2. Obtenir la table de multiplication du corps fini (`Finite..`) \mathbb{F}_4 à 4 éléments.
 3. Calculer le développement de Taylor à l'ordre 6 de la fonction $\exp(1 - \cos(x))$.

2 Fonctions, listes, itération

On détaille quelques techniques de programmation plus avancées : fonctions, listes, boucles `for`.

1. Une fonction $f(x)$ d'une variable x est définie en Sage par la commande :

```
def func(x):
    instructions
    return (le resultat)
```

Attention, tout le contenu de la fonction doit être indenté dans le code. Créer une fonction $g(x) = \sqrt{1 - \exp(-x)}$, et calculer $g(0.3)$. En utilisant la commande `plot(lambda x : g(x), x, a, b)`, afficher son graphe sur l'intervalle $[a, b] = [0, 2]$.

2. On peut tester une condition, par exemple dans les instructions d'une fonction avec :

```
if condition:
    instructions_1
else:
    instructions_2
```

De nouveau, les instructions doivent être indentées par rapport au reste du programme pour être reconnues comme telles. Les conditions que l'on peut tester sont l'égalité ($a == b$), l'inégalité stricte ($a < b$) ou large ($a <= b$), etc. Créer une fonction

$$h(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

et afficher son graphe sur $[-2, 2]$.

3. Une liste d'objets (a, b, c) est codée par la commande `[a, b, c]`. On appelle le i -ième élément d'une liste L par `L[i]` (les éléments sont numérotés à partir de 0), et on ajoute un élément x à la fin d'une liste L avec `L.append(x)`. Créer une fonction `liste_factorielle(n)` qui renvoie la liste des entiers $k!$, avec k entre 1 et n (indication : on peut appeler une fonction f récursivement à l'intérieur d'elle-même).

4. Si l'on a des opérations à effectuer sur les éléments d'une liste L , on utilise :

```
for x in L:
    instructions
```

La liste des entiers entre 1 et n est donnée par `range(1, n+1)`. Créer une fonction `factoriel(n)` qui calcule $n!$.

3 Variables aléatoires

On explique comment travailler avec des variables aléatoires.

1. Une variable uniforme sur $[0, 1]$ est donnée par la commande `random()`. À partir de celle-ci, on peut construire n'importe quelle variable réelle X de fonction de répartition F_X , car si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, alors $F_X^{-1}(U) \sim X$. Créer :
 1. une fonction `random_exp(t)` qui renvoie une variable de loi exponentielle $\int_{x>0} e^{-tx} t dx$;
 2. une fonction `random_bernoulli(p)` qui renvoie une variable de Bernoulli de paramètre p .
 3. et une fonction `random_binomial(n,p)` qui renvoie une variable binomiale de paramètres n et p .

2. En fait, la plupart des lois continues sont déjà implémentées dans Sage, et on peut y accéder avec la commande `RealDistribution(type,parametres)`. Ainsi,

```
U = RealDistribution("uniform", [0, 1])
G = RealDistribution("gaussian", 1)
E = RealDistribution("exponential", 1)
```

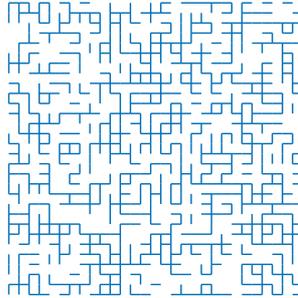
définissent des générateurs aléatoires de lois respectives $\mathcal{U}([0, 1])$, $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathcal{E}(1)$. Si X est un générateur aléatoire défini dans Sage, on obtient des nombres aléatoires indépendants avec `X.get_random_element()`. Utiliser les méthodes du générateur `G = RealDistribution("gaussian", 1)` pour dessiner la densité et la fonction de répartition de la loi gaussienne standard, et pour obtenir une liste de 10 nombres aléatoires gaussiens indépendants.

3. La fonction `sage.plot.histogram.histogram(L)`, qu'on peut évaluer en une liste L , dresse un histogramme des valeurs de la liste. Dresser un histogramme de 10000 valeurs du générateur aléatoire gaussien (indication : on peut rajouter après l'argument L la commande `,bins=n` pour avoir un histogramme en n colonnes).
4. Vérifier la loi des grands nombres et le théorème central limite pour des sommes de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes (indication : `sum(L)` renvoie la somme d'une liste).
5. Dans Sage, les représentations graphiques peuvent être construites avec des listes d'instructions. On initialise un graphique avec la commande `G = Graphics()`, et on rajoute un objet `Obj` sur le graphe (ligne, polygone, texte, etc.) avec la commande `G += Obj`. On affiche ensuite `G` avec `G.show()`, avec éventuellement des options dans l'argument de `show()`. Par exemple,

```
G = Graphics()
G += line([(0,0), (0,1)])
G += line([(1,0), (0,1)])
G += line([(0,0), (1,0)])
G.show(axes=False, aspect_ratio=1)
```

dessine un triangle rectangle isocèle.

Écrire une fonction `Percolation(n,p)` qui garde chaque arête de la grille $\llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$ avec probabilité p indépendamment pour chaque arête, et affiche le résultat.



4 Chaînes de Markov

On programme diverses chaînes de Markov : marches aléatoires, processus de branchement, *etc.*

1. Écrire un programme `Marche(n, p)` qui affiche les n premières étapes d'une marche aléatoire sur \mathbb{Z} de paramètre p . Vérifier expérimentalement que si $p > \frac{1}{2}$, alors la marche aléatoire tend presque sûrement vers $+\infty$.
2. L'anneau $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est défini dans Sage par `R = Integers(N)`, et un entier k modulo N est alors appelé par `R(k)`. Par exemple,

```
R = Integers(9)
R(4) + R(7)
```

renvoie 2 (ou plus précisément, la classe dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ qui contient 2). Écrire un programme `MarcheCercle(N, n)` qui calcule les n premières étapes d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, issue de 0 et avec probabilités de transition

$$P(k, k) = P(k, k-1) = P(k, k+1) = \frac{1}{3}.$$

Vérifier avec un histogramme que pour n grand, la loi de la position X_n est quasi-uniforme sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

3. Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{N} . Le processus de Galton-Watson de loi μ est la suite aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que X_{n+1} est la somme de X_n variables aléatoires indépendantes de loi μ . Il représente l'évolution d'une population dont chaque individu a aléatoirement $Y \sim \mu$ enfants, indépendamment pour chaque individu. Calculer la matrice de transition de cette chaîne de Markov, et écrire un programme `GaltonWatson(Y, n, k)` qui dépend d'un générateur aléatoire Y et donne les n premières générations du processus, partant de $X_0 = k$.
4. Programmer une classe `ChaineMarkov` qui s'initialise à partir d'une liste d'états et d'une matrice de transition, et qui contient des méthodes :
 - pour calculer une trajectoire de la chaîne de Markov, et la mesure empirique associée;
 - pour calculer la mesure invariante de la chaîne.

13.3 Programmation

Les définitions de fonctions en Sage sont introduites par la commande `def`, et la liste des noms des paramètres est suivie de deux points. Faites attention à l'indentation :

```
def is_even(n):  
    return n%2 == 0 # ou mod(n,2)
```

La paradoxe des anniversaires est un résultat combinatoire simple et amusant, qui joue un grand rôle en algorithmique, en particulier dans le domaine de la cryptographie. Soit E un ensemble de cardinal n . On se donne un entier k et on tire k fois de suite, avec remise, et avec la probabilité uniforme, un élément de E . On obtient ainsi une suite $(x_1; x_2; \dots; x_k)$ d'éléments de E . On se propose de calculer la probabilité p_k de l'événement tous les x_i sont distincts.

1. Quel est le cardinal de E^k ?
2. Combien y a-t-il de k -uplets $(x_1; x_2; \dots; x_k) \in E^k$ dont les composantes sont deux à deux distinctes ?
3. En déduire que la probabilité p_k est donnée par $p_k = \prod_{i=1}^{k-1} (1 - i/n)$.
4. Démontrez que si 23 personnes sont réunies dans une salle la probabilité que deux au moins d'entre elles aient leur anniversaire le même jour, est plus grande que $1/2$.
5. Réalisons l'expérience suivante : on choisit un entier N (par exemple $N = 365$) puis on tire au hasard des valeurs x dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$. L'expérience se terminera la première fois que le tirage donnera une valeur déjà obtenue. La solution la plus naturelle est d'utiliser un dictionnaire, de nom `rang`, initialisé à vide. Un entier x est une clef du dictionnaire avec `rang[x] = k` si et seulement si la valeur x a été obtenue pour la première fois au k -ième tirage. Cela conduit à l'écriture suivante :

```
def Paradox(N) :  
    rang = {} ; k = 1  
    while true :  
        x = randint(1,N)  
        if rang.has_key(x) :  
            print 'k=', k, ' donne', x, ' deja obt au rang',rang[x]  
            return  
        rang[x] = k  
        k = k+1
```

L'exemple suivant utilise Sage pour la résolution d'un système d'équations non-linéaires. D'abord, on résout le système de façon symbolique :

```
sage: var('x y p q') (x, y, p, q) sage: eq1 = p+q==9
sage: eq2=q*y+p*x==-6 sage: eq3 = q*y^2+p*x^2==24
sage: solve([eq1,eq2,eq3,p==1],p,q,x,y) [[p == 1, q == 8, x ==
-4/3*sqrt(10) - 2/3, y == 1/6*sqrt(2)*sqrt(5) - 2/3],
 [p == 1, q == 8, x == 4/3*sqrt(10) - 2/3, y == -1/6*sqrt(2)*sqrt(5) - 2/3]]
```

Pour une résolution numérique, on peut utiliser à la place :

```
sage: solns = solve([eq1,eq2,eq3,p==1],p,q,x,y, solution_dict=True)
sage: [[s[p].n(30), s[q].n(30), s[x].n(30), s[y].n(30)] for s in
solns] [[1.0000000, 8.0000000, -4.8830369, -0.13962039],
 [1.0000000, 8.0000000, 3.5497035, -1.1937129]]
```

```
sage: f(z) = z^5 + z - 1 + 1/z
sage: complex_plot(f, (-3, 3),(-3,3))
```

13.4 @interact

```
var('x')
x0 = 0
f = sin(x)*e^(-x)
p = plot(f,-1,5, thickness=2)
dot = point((x0,f(x=x0)),pointsize=80,rgbcolor=(1,0,0))
@interact
def _(order=(1..12)):
    ft = f.taylor(x,x0,order)
    pt = plot(ft,-1, 5, color='green', thickness=2)
    html('$f(x)\;=\; %s$'%latex(f))
    html('$\hat{f}(x;%s)\;=\; %s+\mathcal{O}(x^{\%s})$'%(x0,latex(ft),order+1))
    show(dot + p + pt, ymin = -.5, ymax = 1)

html('<h1>A Random Walk by William Stein</h1>')
vv = []; nn = 0
@interact
def foo(pts = checkbox(True, "Show points"),
        refresh = checkbox(False, "New random walk every time"),
        steps = (50,(10..500))):
    # We cache the walk in the global variable vv, so that
    # checking or unchecking the points checkbox doesn't change
    # the random walk.
    html("<h2>%s steps</h2>"%steps)
```

```

global vv
if refresh or len(vv) == 0:
    s = 0; v = [(0,0)]
    for i in range(steps):
        s += random() - 0.5
        v.append((i, s))
    vv = v
elif len(vv) != steps:
    # Add or subtract some points
    s = vv[-1][1]; j = len(vv)
    for i in range(steps - len(vv)):
        s += random() - 0.5
        vv.append((i+j,s))
    v = vv[:steps]
else:
    v = vv
L = line(v, rgbcolor='#4a8de2')
if pts: L += points(v, pointsize=10, rgbcolor='red')
show(L, xmin=0, figsize=[8,3])

html('<h1>A 3D Random Walk</h1>') # this was done originally by William Stein
@interact
def rwalk3d(n=(50,1000), frame=True):
    pnt = [0.,0.,0.]
    v = [copy(pnt)]
    for i in range(n):
        pnt[0] += random()-0.5
        pnt[1] += random()-0.5
        pnt[2] += random()-0.5
        v.append(copy(pnt))
    show(line3d(v,color='black'),aspect_ratio=[1,1,1],frame=frame,figsize=[4,4])

grs = ['BalancedTree', 'BullGraph', 'ChvatalGraph', 'CirculantGraph', 'CircularLadder']
examples = {}
for g in grs:
    docs = eval('graphs.' + g + '.__doc__')
    for docline in docs.split('\n'):
        ex_loc = docline.find('graphs.' + g)
        if ex_loc != -1:
            end_paren_loc = docline[ex_loc:].find(')')
            ex_str = docline[ex_loc:end_paren_loc+ex_loc+1]
            ex_str = ex_str.replace('i+', '2+')
            ex_str = ex_str.replace('i', '(4)')

```

```

        break
    try:
        gt2 = eval(ex_str)
        examples[g] = ex_str
    except:
        grs.remove(g)
@interact
def graph_browser(graph_name = selector(grs, label = "Graph type:"), newargs = input_
    base_g_str = 'graphs.' + graph_name
    docs = eval(base_g_str + '.__doc__')
    doc_ex_loc = docs.find('EXAMPLE')
    if docs.find('PLOTTING') != -1:
        doc_ex_loc = min(doc_ex_loc, docs.find('PLOTTING'))
    print docs[0:doc_ex_loc].replace('\n', '\n')
    if newargs != '':
        try:
            t_graph = eval(base_g_str + newargs)
        except:
            print "Invalid arguments, using default"
            t_graph = eval(examples[graph_name])
    else:
        t_graph = eval(examples[graph_name])
    if output_type == '2D': show(t_graph)
    if output_type == '3D': t_graph.show3d()

```

13.5 Pourquoi utiliser des logiciels symboliques

C'est sûr que Scilab/Matlab sont plus facile à maitriser, et plus transparents dans leur fonctionnement. Par contre, les symboliques peuvent répondre à certaines de nos questions. Essayez les questions suggérées, et/ou proposez d'autres (pour les questions auxquelles ils ne peuvent pas répondre, ces logiciels répètent la question).

1. $\text{int}(1/\sqrt{x^2 + 2 * x - 1}, x)$
2. $\text{int}(1/\sqrt{x^3 + 2 * x - 1}, x)$
3. $\text{int}(1/\sqrt{x^4 + 2 * x - 1}, x)$
4. transformées de Laplace :

```

sage: var('s t')
sage: f = t^2*exp(t) - sin(t)
sage: f.laplace(t,s) 2/(s - 1)^3 - 1/(s^2 + 1)

```

5. équations différentielles ordinaires :

6.

```
var('t')
y=function('y',t)
DE=t*diff(y,t) + y
desolve(DE, [y(t),t])
```
7.

```
DE=diff(y,t,2) + t*diff(y,t)+y
desolve(DE, [y(t),t])
```
8.

```
DE=t*diff(y,t,2) + diff(y,t)+y
desolve(DE, [y(t),t])
```

(maxima ne réussit pas, pendant que mathematica y arrive)

9.

```
var('t')
y=function('y',t)
DE=diff(y,t) + y^2
desolve(DE, [y(t),t])
```

Alternativement

```
sage: t=var('t')      # on definit une variable t
sage: function('x',t) #on declare x fonction de cette variable x(t)
sage: DE = lambda y:diff(y,t) + y - 1
sage: desolve(DE(x(t)), [x(t),t]) #(c+e^t)*e^(-t)
```

```
def f(n):
    return len(str(factorial(10^n)))
```

La conjecture de Collatz. Soit $x \geq 1$ entier et la suite définie par $u_0 = x$, et $u_{n+1} = collatz(u_n)$. Est-il vrai qu'il existe un entier k tel que $u_k = 1$? Autrement dit : est-il vrai que pour tout $x \geq 1$, il existe un entier k tel que $collatz(k(x)) = 1$? Ce problème n'est toujours pas résolu.

```
def collatz(n):
    if n%2==0:
        col=n/2
    else: col=(3*n+1)/2
    return(col)
```

```
def U(x):
    while x>1:
        x=collatz(x)
```

```

print 'x=', x

for k in [1..20]:
    print 'collatz(',k,')=', collatz(k)

```

10. En conclusion, les logiciels symboliques comme SAGE sont très puissants, mais pour les tâches simples, Scilab, R, ... sont plus pratiques !

13.6 Compléments d'algèbre

1. Augment et row-reduce

```
R = A.augment(matrix(Y).transpose()) R.echelon_form()
```

2. Créons une matrice de taille 500×500 de nombres aléatoires réelles (RR); (pour RealDoublePrec, RDF).

```
sage: m = random_matrix(RR,500)
```

Il ne faut que quelques secondes à Sage pour calculer les valeurs propres de la matrice et en faire un graphique.

```

sage: e= m.eigenvalues()
sage: w = [(i, abs(e[i])) for i in range(len(e))]
sage: show(points(w))

```

Créons une matrice de taille 10×10 de nombres aléatoires Rationnels, et extrairons une sous matrice et une colonne :

```

sage: m = random_matrix(QQ,50, num_bound=10, den_bound=10)
sage: show(m[2:7,3:9])
sage: m[2]

```

3. `var('x y');` `n=6`
`entries=[xi-yj+i+j for i in range(1,n+1) for j in range(1,n+1)]`
`G =matrix(SR, n, entries);G`
`G.det().simplify_full()`

4. Polynôme caractéristique :

```

D = matrix(QQ, [[-2,1,-2,-4], [12,1,4,9], [6,5,-2,-4], [3,-4,5,10] ])
show(D)
var('t')
S = D - t*identity_matrix(4)
print S
print p(t)=S.det()
p(t)
p.find_root(-10, 10)

```

Aussi : $q(t) = D.\text{charpoly}('t')$ q

5. Créons l'espace $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathcal{Q})$:

```
sage : M = MatrixSpace(QQ,3) sage : M Full MatrixSpace of 3 by 3  
dense matrices over Rational Field
```

(Pour indiquer l'espace des matrices 3 par 4, il faudrait utiliser `MatrixSpace(QQ,3,4)`. Si le nombre de colonnes est omis, il est égal par défaut au nombre de lignes. Ainsi `MatrixSpace(QQ,3)` est un synonyme de `MatrixSpace(QQ,3,3)`.) L'espace des matrices possède une base que Sage enregistre sous forme de liste :

```
sage : B = M.basis() sage : len(B) 9 sage : B[1] [0 1 0] [0 0 0] [0 0 0]
```

Nous créons une matrice comme un élément de M.

```
sage : A = M(range(9)); A [0 1 2] [3 4 5] [6 7 8]
```

Puis, nous calculons sa forme échelonnée en ligne et son noyau.

```
sage : A.echelon_form() [ 1 0 -1] [ 0 1 2] [ 0 0 0] sage : A.kernel() Vector  
space of degree 3 and dimension 1 over Rational Field Basis matrix : [ 1  
-2 1]
```

6. Matrices symboliques

```
sage: m = matrix(SR,2, [-x,x,x,-x])  
sage: m.exp()  
sage: t = var('t')  
sage: A =matrix([[1,2],[3,4]])  
sage: B = (t*A).exp()  
sage: B(1)*A == A*B(1) False  
sage: (B(1)*A - A*B(1)).apply_map(lambda e: e.full_simplify())  
sage: Bprime =matrix(map(diff,B.list()))  
sage: B(1)*A == Bprime(1) False
```

Chapitre 14

L'approximation rationnelle de Padé-Hermite

Rapellons l'approximation de Padé. Soit

$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots$$

a given formal power series. For a pair (m, n) of integers, find polynomials

$$a(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_mz^m$$

$$b(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_nz^n$$

so that

$$f(z)b(z) - a(z) = \gamma_{m+n+1}z^{m+n+1} + \gamma_{m+n+2}z^{m+n+2} + \dots \quad (*)$$

Condition (*) is equivalent to the following

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} c_0b_0 = a_0 \\ c_1b_0 + c_0b_1 = a_1 \\ c_2b_0 + c_1b_1 + c_0b_2 = a_2 \\ \dots \\ c_mb_0 + c_{m-1}b_1 + c_{m-2}b_2 + \dots + c_0b_m = a_m \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} c_{m+1}b_0 + c_mb_1 + c_{m-1}b_2 + \dots + c_0b_{m+1} = 0 \\ c_{m+2}b_0 + c_{m+1}b_1 + c_mb_2 + \dots + c_0b_{m+2} = 0 \\ \dots \\ c_{m+n}b_0 + c_{m+n-1}b_1 + c_{m+n-2}b_2 + \dots + c_0b_{m+n} = 0 \end{array} \right.$$

in which $b_k = 0$ for $k > n$. When system (2) has nontrivial solution, the coefficients a_0, a_1, \dots, a_m are determined from (1). This is solution is unique in the sense that if

$$f(z)v^*(z) - u^*(z) = \gamma_{m+n+1}^*z^{m+n+1} + \gamma_{m+n+2}^*z^{m+n+2} + \dots$$

then

$$u(z)v^*(z) = u^*(z)v(z).$$

Proof.

$$f v v^* - u v^* = *z^{m+n+1} + \dots$$

$$f v^* v - u^* v = *z^{m+n+1} + \dots$$

$$u^* v - u v^* = *z^{m+n+1} + \dots$$

Since $\deg(u^*v - uv^*) \leq m + n$ and the coefficients of z^k on the right-hand side is zero for $k \leq n + n$, we conclude that $u^*v - uv^* = 0$.

Définition 14.1. *The uniquely determined rational function $R(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$ is called the (m, n) -Pade approximant of f .*

Théorème 14.1. *Let f be a function having $m + n + 1$ continuous derivatives in some neighborhood N of 0 then f possesses a Pade approximation of order (m, n) and*

$$\left| f(z) - \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n} \right| \leq M |z^\nu|$$

for some $\nu > n$. If $\nu \leq m + n + 1$ and some $M > 0$ and all z in N , then (1),(2) hold, where $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Proof. By Taylor's Theorem, we can write $f(z) = f^*(z) + r(z)$, where

$$f^*(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_{n+m} z^{n+m} \tag{14.1}$$

and

$$r(z) = \frac{f^{(n+m+1)}(\xi) z^{n+m+1}}{(n+m+1)!}.$$

Write

$$u(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m$$

$$v(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n.$$

Condition (14.1) is equivalent to

$$|f(z)v(z) - u(z)| \leq M |z^\nu v(z)| \leq M_1 |z^\nu|$$

which is equivalent to

$$|f^*(z)v(z) + r(z)v(z) - u(z)| \leq M |z^\nu v(z)| \leq M_1 |z^\nu|$$

for some $M_1 > 0$. Since

$$|r(z)v(z)| \leq M_2 |z^\nu| \text{ for all } z \text{ in } N \text{ for some } M_2 > 0$$

we have

$$|f^*(z)v(z) - u(z)| \leq M_3 |z^\nu| \text{ for all } z \text{ in } N \text{ for some } M_3 > 0.$$

Therefore

$$|(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_{n+m} z^{n+m})(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n) - (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m)| \leq M_3 |z^\nu|.$$

and so

$$\left| \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^k (c_j b_{k-j} - a_k) z^k \right| \leq M_3 |z|^\nu \text{ for all } z \text{ in } N \text{ for the index } \nu \geq n + m + 1.$$

Hence

$$\sum_{j=0}^k c_j b_{k-j} - a_k = 0 \text{ for } k = 0, 1, 2, \dots, n + m.$$

Exercice 14.1. *Trouvez l'approximant de Padé (4,4) de $\cos x$.*

Consider $f(z) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}x^3 + \frac{1}{40320}x^4 - \dots$.

We seek a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 such that

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}x^3 + \frac{1}{40320}x^4 - \dots)(1 + a_1z + a_2z^2) - (b_0 + b_1z + b_2z^2) \\ = +0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + c_5z^5 + c_6z^6 + \dots \end{aligned}$$

$$1 - b_0 = 0$$

$$-\frac{1}{2} + b_1 - a_1 = 0$$

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{2}b_1 + b_2 - a_2 = 0$$

$$-\frac{1}{720} + \frac{1}{24}b_1 - \frac{1}{2}b_2 = 0$$

$$\frac{1}{40320} - \frac{1}{720}b_1 + \frac{1}{24}b_2 = 0$$

From the last two equations we get

$$b_2 = \frac{13}{15120}, b_1 = \frac{11}{252}.$$

Therefore

$$a_1 = -\frac{115}{252}, a_2 = \frac{313}{15120}.$$

Thus

$$f(z) \approx \frac{1 - \frac{115}{252}x + \frac{313}{15120}x^2}{1 + \frac{11}{252}x + \frac{13}{15120}x^2}.$$

Finally,

$$\cos x = f(x^2) \approx \frac{15120 - 6900x^2 + 313x^4}{15120 + 660x^2 + 13x^4}.$$

14.1 Continued Fractions

A continued fraction is an expression of the form

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

It follows that

$$[a_0] = \frac{a_0}{1},$$

$$\begin{aligned}
[a_0, a_1] &= \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}, \\
[a_0, a_1, a_2] &= \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Write

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k} \text{ for } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Then p_k and q_k are polynomials of $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$. $\frac{p_k}{q_k}$ is called the k -th **convergent** of the continued fraction $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$. It follows from the identity

$$\begin{aligned}
\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} &= [a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}] \\
&= [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m + \frac{1}{a_{m+1}}] \\
&= \frac{(a_m + \frac{1}{a_{m+1}})p_{m-1} + p_{m-2}}{(a_m + \frac{1}{a_{m+1}})q_{m-1} + q_{m-2}} \\
&= \frac{a_{m+1}(a_m p_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1}}{a_{m+1}(a_m q_{m-1} + q_{m-2}) + q_{m-1}} = \frac{a_{m+1}p_m + p_{m-1}}{a_{m+1}q_m + q_{m-1}},
\end{aligned}$$

that the recurrence relations

$$p_0 = a_0, p_1 = a_1 a_0 + 1, p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$

$$q_0 = 1, q_1 = a_1, q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

hold for $k = 2, 3, \dots, n$.

Exercise : Compute the convergents of

(a) $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$;

(b) $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$;

(c) $[1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17]$

(d) Calculate polynomials $p_n(x)$ and $q_n(x)$ so that

$$p_n(x)/q_n(x) = [x, x, \dots, x].$$

There are $(n+1)x$'s inside the bracket. Express the polynomials in closed form.

14.2 Another Way to See the Continued Fractions

Let

$$s_1(z) = \frac{b_1}{a_1 + z}, s_2(z) = \frac{b_2}{a_2 + z}, \dots, s_n(z) = \frac{b_n}{a_n + z}.$$

Then

$$a_0 + s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_n(0) = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{\cdots + \frac{b_n}{a_n}}}} \quad (*)$$

Notice the following law of composition of two linear fractional transformations : if

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \psi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

then

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(z) &= [a(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}) + b] / [c(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}) + \delta] \\ &= \frac{a\alpha z + a\beta + b\gamma z + b\delta}{c\alpha z + c\beta + d\gamma z + d\delta} = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)} \end{aligned}$$

while

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{bmatrix}.$$

Hence

$$s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_n(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

with

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & b_n \\ 1 & a_n \end{bmatrix}$$

Set $a_1 = A_1$, $b_1 = B_1$. Then

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 & b_1 a_2 \\ a_1 & b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b_3 \\ 1 & a_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_2 & B_1 b_3 + B_2 a_3 \\ A_2 & A_1 b_3 + A_2 a_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} B_2 & B_3 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} B_2 & B_3 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b_4 \\ 1 & a_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_3 & B_2 b_4 + B_3 a_4 \\ A_3 & A_2 b_4 + A_3 a_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} B_3 & B_4 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \\ &\dots \\ \begin{bmatrix} B_{n-2} & B_{n-1} \\ A_{n-2} & A_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b_n \\ 1 & a_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{n-1} & B_{n-2} b_n + B_{n-1} a_n \\ A_{n-1} & A_{n-2} b_n + A_{n-1} a_n \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} B_{n-1} & B_n \\ A_{n-1} & A_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

we see that

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{n-1} & B_n \\ A_{n-1} & A_n \end{bmatrix}.$$

In this formula, A_k , B_k are given recursively by

$$\begin{bmatrix} B_k \\ A_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{k-1} & B_k \\ A_{k-1} & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_k \\ a_k \end{bmatrix} \quad \text{for } k = 2, 3, 4, \dots, n.$$

In this case, $\frac{B_k}{A_k}$ is the k th convergent of the continued fraction (*).

Corollary. $\frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{B_n}{A_n} = (-1)^n \frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{A_{n-1} A_n}$.

Proof. Since

$$\begin{bmatrix} B_{n-1} & B_n \\ A_{n-1} & A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & b_n \\ 1 & a_n \end{bmatrix},$$

it follows that

$$\det \begin{bmatrix} B_{n-1} & B_n \\ A_{n-1} & A_n \end{bmatrix} = (-b_1)(-b_2) \cdots (-b_n) = (-1)^n b_1 b_2 \cdots b_n.$$

Corollary. $\frac{B_n}{A_n} = \frac{b_1}{A_0 A_1} - \frac{b_1 b_2}{A_1 A_2} + \frac{b_1 b_2 b_3}{A_2 A_3} - \cdots + (-1)^n \frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{A_{n-1} A_n}$.

Proof. $\frac{B_n}{A_n} = \left(\frac{B_n}{A_n} - \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}}\right) + \left(\frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{B_{n-2}}{A_{n-2}}\right) + \cdots + \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_0}{A_0}\right)$.

Definition. The infinite continued fraction

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}} \quad (**)$$

converges if the sequence $\left\{\frac{B_n}{A_n}\right\}$ converges.

Theorem. Let $a_n > 0$ for $n = 0, 1, 2, \dots$. The infinite continued fraction (***) converges if and only if $\sum a_n$ diverges.

Proof. From the above corollary we see that

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_k}}}} = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{c_k},$$

where $c_k = A_{k-1} A_k$. We observe that the numbers A_k are bounded from below by $\theta = \min(1, a_1)$. This is true for $k = 0$ and 1 because $A_0 = 1$ and $A_1 = a_1$. If it is true for indices $\leq n-1$, then it is true for n since

$$A_n = a_n A_{n-1} + A_{n-2} \geq \theta a_n + \theta > \theta.$$

Now the numbers c_n are monotonically increasing since

$$c_n = A_n A_{n-1} = (a_n A_{n-1} + A_{n-2}) A_{n-1} = a_n A_{n-1}^2 + c_{n-1} \geq c_{n-1} \theta^2 a_n.$$

Thus if $\sum a_n = \infty$ then $c_n \rightarrow \infty$ since (with $c_0 = 0$)

$$\begin{aligned} c_n &= (c_n - c_{n-1}) + (c_{n-1} - c_{n-2}) + \cdots + (c_1 - c_0) \\ &\geq \theta^2 a_n + \theta^2 a_{n-1} + \cdots + \theta^2 a_1. \end{aligned}$$

Under these condition, $\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{c_k}$ converges.

Now suppose that $\sum a_n$ converges. We prove first that

$$A_n < (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n).$$

For $n = 1$ this is clear, since $A_1 = a_1$. Assume the result holds for indices $\leq n$. Then

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= a_{n+1}A_n + A_{n-1} < a_{n+1}(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) + (1 + a_1) \cdots (1 + a_{n-1}) \\ &= (1 + a_1) \cdots (1 + a_{n-1})[a_{n+1}(1 + a_n) + 1] \\ &< (1 + a_1) \cdots (1 + a_{n-1})(1 + a_n)(1 + a_{n+1}). \end{aligned}$$

Since $1 + x < e^x$ for $x > 0$, we have

$$A_n < e^{a_1} e^{a_2} \cdots e^{a_n} < \exp \sum a_k \equiv M.$$

Hence $c_n = A_n A_{n-1} < M^2$ and the terms in (**) do not converge.