Chaînes et processus de Markov. Part 1

Table des matières

Processus Stochastiques Markoviens et

Applications pour les mathematiques financiers

et actuarielles et les files d'attente/centre d'appels

1 Probabilités conditionnelles

1.1 Probabilités conditionnelles discrètes : cf. Belisle 1.1.1-1.1.5

1.2 Le calcul des probabilités et d' espérances par conditionnement

1.3 Conditionnement par les valeurs des variables continues

1.2 Le calcul des probabilités et d' espérances par conditionnement

Les probabilités conditionnelles et l'espérance conditionnelle sont parmi les outils les plus utilises dans les probabilités, a travers la methode du conditionnement. L'idee de cette mèthode est de decomposer l'espace probabiliste (des "toutes les possibilites") dans des sous-ensembles $E_1, E_2, ...E_I$ où le calcul des probabilités devient plus facil. Si on sache comment trouver les probabilitees ou les espérance conditionnelle d'un evenement A dans toutes les cas possibles $E_1, E_2, ...E_I$ d' une partition finie de l'espace probabilisé $\Omega = E_1 \cup E_2 ...$, alors on peut trouver aussi la "probabilite totale" en appliquant **la loi des probabilités totales** :

$$P(A) = \sum P(A \cap E_i) = \sum P(E_i) P(A \mid E_i)$$

Exemple 1.1 *Un marchand vend des articles dont 30 % proviennent d'un fournisseur B_1 et 70% d'un fournisseur B_2 ; 6 % de la production de B_1 est dèfectueuse, contre 3% pour B_2.*

a. Calculer la probabilitè qu'un article choisi au hasard soit dèfectueux (considèrer que l'article a des probabilitè 0.3 et 0.7 de provenir de chacun des deux fournisseurs, ce qui vous met sur la voix pour l'utilisation de la formule des probabilitès totales). b. Sachant que l'article est dèfectueux, quelle est la probabilitè qu'il provienne de B_1 ? de B_2 ?

On conditionne souvent sur les valeurs d'une variable discrète X à valeurs dans un èspace fini $E = \{x_1, x_2, ...\}$, dans quelle cas la loi devienne :

$$P(A) = \sum P(X = x_i) P(A \mid X = x_i) = \sum_{x \in E} p_X(x)\, P(A \mid X = x)$$

oû $p_X(x)$ dènote la fonction de masse de la variable X.

Une loi pareille existe pour l'èsperance E Y :

$$EY = \sum E(Y\, \mathbb{1}_{E_i}) = \sum P(E_i) E(Y \mid E_i)$$

Nous allons illustrer maintenant l'utilité de ces lois par quelques exemples :**Exemple en fiabilité :** Calculer la probabilité (sans simplifier !) que le réseau suivant fonctionne :

Solution :

$$(1 - (1-p)^2)^2 r + (1 - (1-p^2)^2)(1-r)$$

Voir aussi Belisle, 1.1.6-1.1.9, particulièrement Exemples 9.3, 9.4, 9.1.

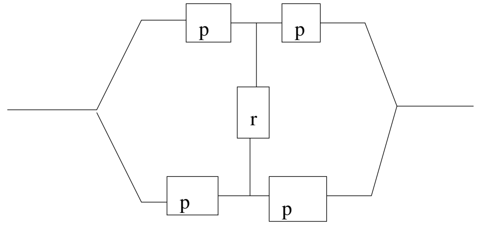


FIG. 1 – **p,r sont les probabilités que les composantes fonctionnent**

1.3 Conditionnement par les valeurs des variables continues

PROBABILITE ET ESPERANCE CONDITIONNELLE PAR RAPPORT A UN EVENEMENT

Définition 1.1 *Soit B un ensemble avec mesure positive dans un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Pour tout ensemble A on appelle probablite conditionnelle de A en $\underline{\textit{sachant}}B$ *la fraction*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

b) Pour toute variable aléatoire réelle intégrable X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on appelle espérance conditionnelle en $\underline{\textit{sachant}}B$ *la moyenne pondere*

$$E(Y \mid B) = \frac{1}{P(B)} \int_B Y dP = \frac{1}{P(B)} \int (Y \, \mathbb{1}_B) dP$$

L'idee est claire : on "jette" la partie de l'espace en dehors de B, on tiens conte seulement de la partie contenue en B.

Finalement, avec X continu ça devienne :

$$P(A) = \int_x P(A \mid X = x) \;\, f_X(x) dx$$

oû $f_X(x)$ dènote la fonction densitè de la variable X. Un exemple ici est la loi qui exprime la densite marginale comme une integrale de la densite conjointe :

$$f_Y(y) = \int_x f_{(X,Y)}(x, y) dx = \int f_{(Y|X)}(y/x) f_X(x) dx$$

Les lois PT et ET ont aussi des versions pour le cas quand on conditionne sur les valeurs prises par une variable discrète ou continue.

$$EY = \sum_i E(Y \mid X = x_i)\; P\,(X = x_i)$$

$$EY = \int_x E(Y \mid X = x)\; f_X(x)dx$$

Voir TP1 de Belisle, Exercice 2.

1.4 Exercices

1. On jete trois monnaies de 10c, 20c, et 50c respectivement. Soît Y la somme des monnaies tombées face. a) Quelle est l'espèrance de Y ? (40c) b) Quelle est l'espèrance de Y, en sachant que le nombre N des monnaies tombées face est deux ? ($160/3 = 53.33$)
2. Une examen se présente sous la forme d'un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.) comportant $K = 20$ questions. Pour chacune des questions, il est proposé 4 réponses dont une et une seule est bonne. Le correcteur compte 1 point pour une réponse juste et 0 en cas de mauvaise réponse. Un candidat se présente en n'ayant appris rien. Il reçoit une note N egale au nombre des questions auquelles il respond correctement (par chance).

   a) Déterminer la loi de sa note N.

   b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de N.

   c) Répeter les mêmes questions, si K est une variable aleatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.
3. On dispose d'un dé équilibré et d'une pièce de monnaie qui tombe sur pile avec une probabilité $p = 1/3$. On lance le dé une fois puis on lance la pièce un nombre de fois égal au chiffre obtenu avec le dé.
   (a) Si le dé est tombé sur le chiffre k, quelle est la probabilité de n'obtenir que des faces avec la pièce ? D'obtenir au moins un pile ? (il s'agit donc de probabilités conditionnellement au chiffre k obtenu avec le dé).
   (b) Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de a) la probabilité (non conditionnelle) d'obtenir au moins un pile.
   (c) L'ésperance du nombre total des piles.

   (a) Quelle est la loi de $Z = X + Y$?
   (b) Pout tout entier $n \geq 0$, déterminer la loi conditionelle de X sachant que $Z = X + Y = n$.
   (c) Déterminer $E\,(X \mid X + Y)$.
4. Trouver : a) la distribution du minimum de n variables exponentielles. b) la distribution du maximum de n variables exponentielles avec paramètres egales. c) la distribution du maximum de 2 variables exponentielles avec paramètres differents.

5. Une banque a deux caissières. Trois personnes (A,B, et C) entrent en même temps ; A et B vont directement aux deux caissières libres et C attend.

   Quelle est la probabilité que A soit toujours dans la banque quand les deux autres sont partis, dans les trois cas suivants :

   (a) Les "temps de service" sont exactement 2 mn pour les deux caissières.

   (b) Pour les deux caissières, ce temps est 1,2, ou 3 mn, avec probabilités 1/3 pour chaque cas.

   (c) Les "temps de service" sont exponentielles a paramètres μ_1, μ_2.

6. On considère deux variables aléatoires réelles X et Y indépendantes de loi de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ respectivement.

2 Marches aléatoires et récurrences

2.1 Prélude : la méthode du conditionnement sur le premier pas

Exercice 2.1 *On lance une monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à q et celle de sortir pile égale à $p = 1 - q$, jusqu'à ce qu'on obtient une pile. Soit $\tilde{N}$ le nombre de faces précedant la première pile ($\tilde{N} = 0, 1, 2, ...$)*

1. *Quelle est la valeur de $\tilde{N}$ si $X_1 ... X_{k-1} = F$ et $X_k = P$?*
2. *Quelle est la loi (distribution) de $\tilde{N}$?*
3. *Trouvez l'espérance $\bar{N}$, par la méthode du conditionnement.*
4. *(*) Trouvez l'espérance $\bar{N}$, par la méthode des fonctions génératrices, i.e : calculer la fonction génératrice des probabilités $p^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, en énumérant l'ensemble G de tous les cas possibles, et en observant une relation de recurrence qu'il satisfait. En suite, calculez $p'(1)$.*
5. *Calculez p_k, en developpant la fonction génératrice en somme des puissances.*
6. *(*) Répéter l'exercice antérieur, en prenant pour $\tilde{N}$ le nombre de pas jusqu'à ce qu'on obtient deux piles consécutives.*

Solutions : 2. On a à faire avec une distribution bien connue (la géométrique!!).

3. Il est quand mêmem intéressant de remarquer que l'espérance peut aussi se calculer par un conditionnement sur le premier pas :

$$\bar{N} = p \times 0 + q(1 + \bar{N}) \Longleftrightarrow \bar{N} = \frac{q}{p}$$

Nt : Pour l'autre définition d'une variable g'eométrique $N = \tilde{N} + 1 \in \{1, 2, ...\}$ (en incluant la première face), on obtient directement $EN = E(\tilde{N} + 1) = \frac{1}{p}$.

On peut aussi conditionner sur le premier pas :

$$\begin{aligned} n &= \mathbb{E}[N|X_0 = 1] = \mathbb{P}[X_1 = 2]\mathbb{E}[N|\{X_1 = 2, X_0 = 1\}] + \mathbb{P}[X_1 = 1]\mathbb{E}[N|\{X_1 = 1, X_0 = 1\}] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = 2]1 + \mathbb{P}[X_1 = 1](1 + \mathbb{E}[N|\{X_0 = 1\}]) = p * 1 + q * (1 + n) = 1 + q * n \qquad (1) \end{aligned}$$

Note : La deuxième ligne est une conséquence de la décomposition "premier pas + le reste"

$$N = 1 + N'$$

Après ça, on utilise le fait que les distributions conditionnées par départ du "reste" $N'|X_1 = i$ sont connues :

1. $(N'|X_1 = 2) \equiv 0$ et
2. $$\boxed{\mathcal{L}(N'|X_1 = 1) = \mathcal{L}(N|X_0 = 1)}$$

   par la proprieté de Markov=oubli du passé, et par le fait que la seule difference entre les réalisations possibles de N' et ceux du N et le moment "de départ de la montre", qui est indifférent pour une chaîne avec matrice de transition stationnaire.

4. $$G = \{H, TH, TTH, TTTH, ...\} = \{H\} \cup TG \qquad (2)$$

Remplaçons chaque terme par $p^{nb.H} q^{nb.T} z^{nb.H+nb.T}$, et ajoutons tous les termes. Observons qu'en rajoutant tous les termes avec $nb.H + nb.T = n$, on obtient precisement $p_n z^n$, et donc la somme totale est la fonction génératrice $p(z) = \sum_n p_n z^n$. De l'autre coté, la décomposition (2) implique $p(z) = p + qzp(z)$, et $p(z) = \frac{p}{1-qz}$. Finalement, $\bar{N} = p'(1) = \frac{q}{p}$.

$$p^*(z) = \frac{p}{1-qz} = p \sum_{k=0}^{\infty} q^k z^k$$

5. En developpant $p_n = pq^n, n = 0, 1, ...,$ on trouve la distribution d'une variable g'eométrique (plus grande que 0).

Exercice 2.2 *Un spéolog est perdu dans une grotte, avec deux sorties U, O, les chemins de la quelle forment le graphe papillon ci-dessous. Il se trouve à present dans le point A, et à cause de la manque de visibilité, est obligé a faire une* **marche aléatoire** *entre les sommets du papillon.*

a) Calculez l'espérance du temps qu'il prendra à sortir, en sachant que les chemins menant à U prennent deux heures, ceux menant à O trois heures, et les autres 5 heures.

b) La grotte contient aussi un génie, qui frappe le spéolog des nb. aléatoires des coups, avec esperance 3 sur les chemins menant à U, 5 pour ceux menant à O, et 2 pour les autres chemins. Calculez l'espérance du nombre des coups que le spéolog prendra avant de sortir.

2.2 Marches aléatoires

Définition 2.1 Marches aléatoires

Soit $Z = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **i.i.d** *(i.e. indépendantes et de même loi), à valeurs dans un groupe G, et soit $X_0 \in G$ indépendant de Z.*

Le processus $X_n \in G, n = 0, 1, ...$ donné par la somme de ces variables

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (3)$$

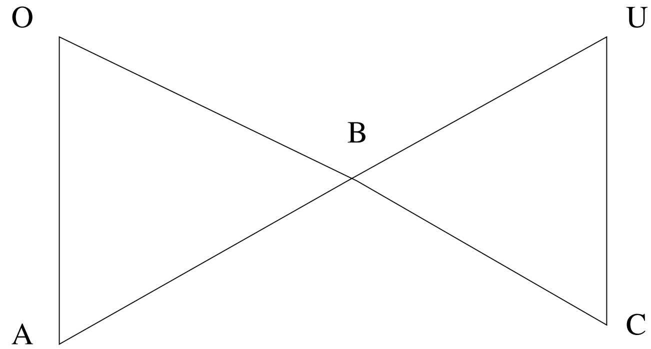


FIG. 2 – **Marche aléatoire simple sur le graphe papillon**

s'appelle **marche aléatoire**. *Comme alternative, la marche aléatoire peut-être definie récursivement par la récurrence*

$$X_n = X_{n-1} + Z_n, n = 1, ... \tag{4}$$

Motivation : Les marches aléatoires sont parmi les processus stochastiques les plus utiles (par exemple en physique, mathématiques financières, files d'attente, statistique, etc...). Ils peuvent servir comme des excellents exemples introductifs, qui motiveront un étude plus approfondi des processus stochastiques. Finalement, ils sont aussi parmi les processus les meilleurs compris, car ils ramènent souvent à des solutions analytiques, ce qui rendent les résultats plus transparents.

Exemple : Les marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$

Définition 2.2 Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$.

Soit $Z = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **i.i.d** *(i.e. indépendantes et de même loi), à valeurs en $\mathbb{Z}$, ayant une distribution discrète $\boldsymbol{p} = (p_i, i \in \mathbb{Z})$, et soit $X_0 \in \mathbb{Z}$ indépendant de Z et ayant aussi une distribution discrète.*

a) Le processus $X_n \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, ...$ donné par la somme de ces variables

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

s'appelle **marche aléatoire**. *Comme alternative, la marche aléatoire peut-être definie récursivement par la récurrence*

$$X_n = X_{n-1} + Z_n, n = 1, ... \tag{6}$$

b) Si en plus $|Z_n| = 1$, i.e. $p_i \neq 0$ ssi $i = \pm 1$, et le processus (20) est appelé **marche aléatoire simple**. *On denotera p_1 par p et de lors la distribution de Z_n est de la forme $p\delta_1 + (1-p)\,\delta_{-1}$, i.e. $P\,[Z_n = 1] = p$ et $P\,[Z_n = -1] = 1 - p$ avec $0 < p < 1$.*

Si $p = q = .5$ on parle d'une **marche aléatoire symmetrique**, *et avec $p \neq q$ on parle d'une* **marche aléatoire biaisée**.

2.3 Moments et cumulants

Exercice 2.3 Les moments et cumulants de la marche simple. *Soit $X_0 = 0 \in \mathbb{N}$ le capital initial d'un joueur. Au temps $n = 1, 2, ...,$ le joueur gagnera $Z_n = 1$ avec probabilité p et perdera $Z_n = -1$ avec probabilité $1 - p$, où $0 < p < 1$. Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ son capital au temps n.*

Calculez :

1. *L'esperance du son gain $e_n = EX_n$.*
2. *La variance du son gain $v_n = \text{Var}\, X_n$.*
3. *La fonction génératrice des moments $M(u, n) = Ee^{uX_n}$.*
4. *La fonction génératrice des cumulants $\kappa(u, n) = \log(Ee^{uX_n})$.*

Notes : 1) Il est clair que ces propriétés de linéarité (de l'espérance , de la variance, et de la fonction génératrice des cumulants), sont vraies pour chaque marche aléatoire.

2) La connaissance de la distribution ou de la fonction génératrice des moments d'une variable X sont typiquement equivalents. Mais, pour une somme $\sum_{i=1}^n Z_i$ des v.a. i.i.d., pendant que la comme distribution est la n-ième convolution $\boldsymbol{p}^{*,n}$ de la $\boldsymbol{p}$ distribution de Z_i, la fonction génératrice des moments $Ee^{\theta \sum_{i=1}^n Z_i}$ est beaucoup plus simple à obtenir (èatnt la n-iìme puissance de la fonction génératrice des moments $Ee^{\theta Z_1}$).

Exercice 2.4 *Soit $m_n, n = 0, 1, 2, ...$ les moments d'une va X, soit $\kappa_X(u) = \log M_X(u) = \log(\sum_n \frac{u^n}{n!} m_n) = \sum_n \frac{u^n}{n!} c_X(n)$ la fonction génératrice des cumulants, et soit $C_X(n) = \frac{\partial^n \kappa(u)}{(\partial u)^n}_{u=0}$ les cumulants.*

a) Montrez, en utilisant un logiciel symbolyque, que $\forall X, c_x(0) = 0, c_X(1) = m_1, c_X(2) = \text{Var}\,(X), c_X(3) = m_3 - 3m_1 m_3 + 2m_1^3$.

b) Montrez, en utilisant un logiciel symbolyque, que $\forall X, m_2 = c(2) + c_1^2, m_3 = c(1)^3 + 3c(1)c(2) + c_3$.

Nt : 1) Le cumulant d'un ordre donné est un polynome dans les moments d'ordre plus petit ou egale, et reciproquement.

2) Les coefficients de l'expansion des moments en fonction des cumulants sont donné par des nombres des partitions.

3) Les cumulants d'une variable centré ($m_1 = 0$) coincide avec les moments jusqu'au troisième ordre. C'est le quatrième cumulant, la "kurtosis", donné dans le cas centré par $c(4) = m_4 - 3m_2^2$, qui joue un role important dans certaines tests statistiques (comme de nonnormalité, par exemple).

Exercice 2.5 *Demontrer le théorème de limite centrale :*

$$\lim_{n\to\infty}^{(d)} n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - EZ_i) = N_{(0,\mathrm{Var}\,Z)}$$

où $\lim^{(d)}$ *denote la convergence des distributions, en utilisant :*

1. *le fait que la convergence des distributions est equivalente a celle des fonctions génératrice des moments, et*
2. *le fait que* $Ee^{uN_{0,v}} = e^{vu^2/2}$*, i.e. la variable normale a tous les cumulants d'ordre plus grand que trois nuls.*

Exercice 2.6 *Pour la marche simple, calculez*

1. *Le premier, deuxième et troisième cumulants* $\kappa_i(n), i = 1, 2, 3$ *de* X_n*, i.e. les premiers trois coefficients dans l'expansion* $\kappa(u,n) = \sum_i \kappa_i(n)u^i$ *en puissances de u.*
2. *Le deuxième moment de* X_n*. Quelle est la particularité du cas* $p = 1/2$ *?*
3. *Le troisième moment de* X_n*.*

2.4 Ruine du joueur pour la marche aléatoire simple

Nous étudiérons maintenant un problème concernant les probabilités d'absorbtion dans un ensemble d'arrêt et d'autres problèmes similaires, les solutions des quelles sont disponibles explicitement dans le cas de la marche aléatoire simple unidimensionnelle.

Exemple 2.1 La ruine du joueur et autres "problèmes de Dirichlet" pour la marche aléatoire simple. *Considérons la marche aléatoire simple*

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, X_n \in \mathbb{Z}$$

avec (Z_n) *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi* $P[Z_n = \pm 1] = p, q$*. Nous étudierons la marche jusqu'au "temps d'arrêt/sortie"* $T = \min[T_0, T_B]$ *quand le process sort de l'interval* $[0, B]$ *pour B donné, i.e. on prend* 0 *et* B *comme états absorbants. On appelle ce problème* **la ruine du joueur***, a cause de l'interpretation d'un joueur qui s'engage dans une série de parties (indépendantes) à un jeu où à l'issue de chaque partie il gagne 1F avec une probabilité p et perd 1F avec une probabilité* $q = 1 - p$*, et qui décide de s'arrêter de jouer dès qu'il aura B francs en poche, ou dès qu'il n'a plus d'argent. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on note* X_n *la fortune du joueur au bout de n parties, et* $X_0 = i$ *représente sa fortune à l'entrée dans le Casino. On dénotera par* $\mathbb{E}_i$ *l'esperance en commençant de i (conditionnant sur* $X_0 = i$*), et on designe par E l'événement que le joueur gagne, i.e.*

$$E = \{x_T = B\} = [\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } X_n = B, X_i > 0, i = 1, ..., n-1].$$

Pour tout i de $\{0, ..., B\}$*, on pose :*

$$b_i = P\left(E \mid [X_0 = i]\right).$$

1. *Calculer* b_0 *et* b_B .
2. *Montrer que :*

$$\forall\ i \in \{1, ..., B-1\}\ \ ,\ b_i = p\ b_{i+1} + q\ b_{i-1}\ \textit{(on rappelle que } q = 1-p\textit{).}$$

3. *Obtener une expression explicite de* b_i *pour tout* i *de* $\{1, ..., B\}$. Indication : *Remarquez que la solution satisfaisant* $b_0 = 0$ *est de la forme :*

$$b_i = \begin{cases} k\ (1 - (\frac{q}{p})^i) & \text{quand } p \neq q \\ k\ i & \text{quand } p = q \end{cases}$$

et déterminer k *tq la condition frontière de* b_B *soit satisfaite.*

4. *Pour tout* i *de* $\{0, ..., B\}$ *, on pose* $a_i = P\left(F \mid [X_0 = i]\right)$ *où* F *est l'événement "le joueur repart ruiné" . En procédant comme auparavant, montrer que :*

$$a_i = \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^B}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^B}\ \ si\ p \neq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{B-i}{B}\ \ si\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pour tout i *de* $\{0, ..., B\}$ *, calculer* $a_i + b_i$*. Que peut-on en déduire ?*
Calculez les probabilités de ruine quand $B \to \infty$*, pour* $p > q$ *et pour* $p \leq q$*. Expliquez la rélation avec le comportement de* $X_t, t \to \infty$*.*

5. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du gain final* $f_i = \mathbb{E}_i X_T$*. Calculez cette fonction pour* $p = q$*.*
6. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du temps de jeu :* $t_i = \mathbb{E}_i T$*. Calculez cette fonction, pour* $p = q$*, et pour* $p < q$*, quand* $B \to \infty$*.*
7. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du "coût cumulé d'inventoire"* $c_i = \mathbb{E}_i \sum_{t=0}^{T-1} X_t$*. Calculez cette fonction, pour* $p = q$*, et pour* $p < q$*, quand* $B \to \infty$*.*
8. *Obtenez un système d'équations pour* $w_i = \mathbb{E}_i a^T = \sum_{k=0} \mathbb{P}_i[T = k] a^k$ *(qui est la fonction génératrice des probabilités* $\mathbb{P}_i[T = k]$*). Calculez cette fonction, pour* $p \neq q$*.*
9. *Obtenez les équations de récurrence et les conditions frontière satisfaites par* $u_x = \mathbb{E}_x a^T g(X_T), a \in (0,1)$ *et par* $v_x = \mathbb{E}_x[a^T g(X_T) + \sum_{t=0}^{T-1} h(X_t)], a \in (0,1)$*.*

On resoudra ceci en utilisant la méthode du **conditionnement** sur le premier pas Z_1, l'idée de quelle est d'obtenir des relations de récurrence qui lient les valeurs de l'espérance conditionnée à partir de tous les points de départ possibles.

2.5 L'operateur associé à la marche simple et ses fonctions harmoniques

Nous verrons, en examinant les questions 2)-8) de cet exercice, qu'ils utilise toutes le même opérateur

$$(Gf)_n := (P - I)(f)_n = p\ f_{n+1} + q\ f_{n-1} - f_n \tag{7}$$

la seule difference étant dans les conditions frontière et dans la partie nonhomogène. En plus, ils se regrouperont en deux types de questions :

1. "Gain final esperé", satisfaisant :

$$f_n = \mathbb{E}_n[g(X_T)] = pf_{n+1} + qf_{n-1} \Longleftrightarrow (Gf)_n = 0, \quad F(0) = g(0), F(B) = g(B)$$

2. "Coût total accumulé esperé"

$$f_n = \mathbb{E}_n[\sum_0^{T-1} h(X_i)] = h(n) + pf_{n+1} + qf_{n-1} \Longleftrightarrow (Gf)_n = 0, \quad f(0) = 0, f(B) = 0$$

Solution :

1. $b_0 = 0, b_B = 1$
2. Gain final esperé, $g(x) = 1_{x=B}$.
   En conditionnant, on trouve :

$$\begin{aligned} b_n &= \mathbb{P}_n[X(T) = B] \\ &= p\,\mathbb{P}_n[X(T) = B/X(1) = n+1] + q\,\mathbb{P}_n[X(T) = B/X(1) = n-1] \\ &= p\,b_{n+1} + q\,_{n-1} \quad 1 \leq n \leq B-1 \end{aligned}$$

   car

$$\mathbb{P}_n[X(T) = B/X(1) = n \pm 1] = \mathbb{P}[X(T) = B/X(0) = n, X(1) = n \pm 1] = \mathbb{P}[X(T) = B/X(1) = n \pm 1] = \mathbb{P}[X(T) = B/X(0) = n \pm 1] = b_{n\pm 1}$$

   en utilisant la proprieté de Markov et l'homogeneité.
3. Quand $p = q = 1/2$, $b_x = P_x[X(T) = B]$ satisfait :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{b_{n-1}}{2} \quad \text{for any } 1 \leq n \leq B-1 \\ b_B &= 1 \\ b_0 &= 0 \end{aligned}$$

   La méthode de résolution des équations de récurrence homogènes à coefficients constants commence en cherchant des solutions de la forme $b_n = r^n$. Si les racines de l'équation auxiliaire sont distinctes, la solution générale est :

$$b_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n$$

   où k_1, k_2 sont déterminés en utilisant les conditions frontière.
   Ici, cherchant des solutions puissances r^x ramène à l'équation $r^2 - 2r + 1 = 0$ à deux racines identiques $r_{1,2} = 1$. La solution générale est $b_x = A + Bx$. Les conditions frontière donnent $b_x = \frac{x}{B}$.
   Solution finale si $p \neq q$: $b_n = \frac{1-(q/p)^n}{1-(q/p)^B}$.

4. $a_i + b_i = 1$, et donc la marche sera eventuellement absorbé dans une des deux frontiéres (elle ne peut pas rester à l'intérieur indéfinimment).

   Pour $p = q$, $\lim_{B\to\infty} a_n = \lim_{B\to\infty} \frac{B-n}{B} = 1$. Autrement,

$$\lim_{B\to\infty} a_n = \lim_{B\to\infty} \frac{(q/p)^n - (q/p)^B}{1-(q/p)^B} = \begin{cases} (q/p)^n, & q < p \\ 1, q > p. \end{cases}$$

5. $f_x = E_x[X(T)]$ (valeur finale ésperée) satisfait $Gf(x) = 0, f(0) = 0, f(B) = B$. Pour $p = q$, la solution $f_x = x$ est obtenue comme ci-dessus :

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{f_{x+1}}{2} + \frac{f_{x-1}}{2} \quad \text{for any } 1 \le x \le B-1 \\ f_B &= B \\ f_0 &= 0 \end{aligned}$$

   (C'est aussi une fonction "harmonique", mais avec conditions frontière différentes.)

6. $t_x = E_x[T]$ (temps de sortie ésperé) est un coût total accumulé esperé (obtenu en prenant $h(x) = 1$), qui satisfait le système inhomogène $Gt(x) + 1 = 0, t(0) = 0, t(B) = 0$.

   Pour $p = q$

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + 1 \quad \text{for any } 1 \le x \le B-1 \\ t_B &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

   La solution d'une équation nonhomogène est donnée par

$$t_x = t_p(x) + h(x)$$

   où $t_p(x)$ est une solution particulière et $h(x)$ est la solution générale de l'équation homogène. Commençons par l'équation homogène.

   La solution générale homogène ("fonction harmonique") $h(x) = A + Bx$ pour cet opérateur a été déjà obtenue ci-dessus.

   Nous aimerions maintenant trouver une solution particulière $t_p(x)$ de l'équation $Gt_p(x) = -1$ de la même forme que la partie nonhomogène -1 de l'équation, donc $t_p(x) = C$; mais, comme les constantes, et puis aussi les fonctions linéaires vérifient l'équation homogène $Gt_p(x) = 0$, nous devrons modifier deux fois cette forme en multipliant par x, en arrivant donc à $t_(x) = Cx^2$. Comme $Gx^2 = 2x(p-q) + 1 = 1$, on trouve $C = -1$ et finalement la solution particulière $t_p(x) = -x^2$.

   La solution générale est donc $t(x) = -x^2 + A + Bx$ et les conditions frontière ramènent à $t_x = x(B-x)$.

Pour $p \neq q$

$$\begin{aligned} t_x &= pt_{x+1} + qt_{x-1} + 1 \quad \text{for any } 1 \leq x \leq B-1 \\ t_B &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution generale homogène avec $p \neq q$ est $h(x) = k_1(q/p)^n + k_2$ et le terme nonhomogène 1 sugere une solution particulière constante k, mais comme ça satisfait l'équation homogène, on modifie à kn. Finalement, $k = \frac{1}{q-p}$.
La solution particulière est $t_p(x) = \frac{x}{q-p}$; elle satisfait deja $t_p(0) = 0$. La partie homogène $h(x) = t_x - t_p(x)$ devra aussi satisfaire $h(0) = 0$ et donc elle sera de la forme $h(x) = A\tilde{h}(x)$ où $\tilde{h}(x) = ((q/p)^x - 1)$.
En demandant que $t_n = \frac{n}{q-p} + A(q/p)^n - 1)$ satisfait la condition frontière $t_B = 0$ on trouve :

$$t_n = t_p(n) - t_p(B)\frac{\tilde{h}(n)}{\tilde{h}(B)} = \frac{n}{q-p} - \frac{B}{q-p}\frac{(q/p)^n - 1}{(q/p)^B - 1}.$$

La limite quand $B \to \infty$ est $t_n = \begin{cases} \infty & \text{si } p > q \\ t_p(n) = \frac{n}{q-p} & \text{si } p < q \end{cases}$; on peut aussi obtenir ce resultat en utilisant l'approximation détérmiste $X_n - X_0 \sim nE(Z_1)$, appellée aussi limite fluide.

7. $c_x = E_x[\sum_0^{T-1} X(t)]$ (coût total d'inventaire ésperé) satisfait le système inhomogène $Gc(x) + x = 0, c(0) = 0, c(B) = 0$.
   Pour $p = q$:

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{c_{x+1}}{2} + \frac{c_{x-1}}{2} + x \quad \text{for any } 1 \leq x \leq B-1 \\ c_B &= 0 \\ c_0 &= 0 \end{aligned}$$

Une solution particulière est $c_p(x) = \frac{-x^3}{3}$. Finalement, on arrive à $c(x) = \frac{x(B^2-x^2)}{3}$.
Pour $p \neq q$, une solution particulière est $c_p(x) = \frac{x^2}{2(q-p)}$ (elle satisfait deja $c_p(0) = 0$).
La partie homogène satisfaisant $h(0) = 0$ sera toujours $h(x) = A\tilde{h}(x)$ où $\tilde{h}(x) = ((q/p)^x - 1)$.
En demandant que $c_n = c_p(n) + A(q/p)^n - 1)$ satisfait la condition frontière $c_B = 0$ on trouve :

$$c_n = c_p(n) - c_p(B)\frac{\tilde{h}(n)}{\tilde{h}(B)}$$

La limite quand $B \to \infty$ est $c_n = \begin{cases} \infty \text{ si } p > q \\ c_p(n) \text{ si } p < q \end{cases}$.

8. On arrive a $w(x) = A_1 z_1^x + A_2 z_2^x$, où z_i sont les racines de $pz^2 - a^{-1}z + q = 0$, et A_i satisfont $A_1 z_1^B + A_2 z_2^B = 1, A_1 + A_2 = 1$ et $w(x) = \frac{z_1^x - z_2^x + z_1^x z_2^x (z_1^{B-x} - z_2^{B-x})}{z_1^Z - z_2^B}$
9. On a $u_x = g(x)$, pour $x \in \{0, B\}$, et le conditionnement donne la relation : $u_x = \mathbb{E}_x[a^T g(X_\tau)] = a(pu_{x+1} + qu_{x-1})$.

   $v_x = g(x)$, pour $x \in \{0, B\}$, et le conditionnement donne la relation : $v_x = a(pv_{x+1} + qv_{x-1}) + h(x)$.

Nous avons vue ici une des idées les plus importantes de la modélisation Markovienne : **les ésperances, vues comme fonctions de l'état initial, satisfont certaines équations qui font toujours intervenir un opérateur associé fixe, appelé générateur du processus, même que les conditions frontière, termes non-homogènes, et d'autre "details" (comme la presence/absence d'une multiple de l'operateur identité) peuvent varier**.

Il s'avère que les mêmes èquations décrivent la solution des problèmes analogues pour toutes les chaîne de Markov à espace d'états comptable, et avec des états absorbants – voir la prochaîne section.

Par exemple, pour les chaînes de Markov, l'operateur associé est $G = P - I$, où P est la matrice de transition, et pour le cas particulier d'une marche aléatoire $X_t = \sum_{i=1}^t Z_i$ avec $p_k = P[Z_i = k], k \in [-c, d]$ on a encore $G = P - I$, où $P = \sum_k p_k F^k$ et F est l'operateur de translation $(Ff)_k = f_{k+1}, k \in \mathbb{Z}$.

Alors, nous obtendrons des èquations similaires pour les problèmes respectives, juste en remplaçant l'ancien operateur par le nouveau.

On recontre la même situation pour toute la classe des processus "de Markov", X_t, différents qu'elles soient, vivant sur des espaces S considerablement plus compliqués, la seule difference étant que l'operateur $G_X : F(S)- > F(S)$ associé a ces processus sera plus compliqué !

Par exemple, les problèmes de cette section ont aussi des versions à espace d'états continu, obtenu en considérant des marches avec incréments infinitésimaux ϵ, et en prenant la limite $\epsilon \to 0$. La marche aléatoire devient ainsi un processus avec chemins continus, appelé mouvement Brownien. Les équations resterons les mêmes, seul l'operateur G changera (dans un operateur differentiel).

En conclusions, il existe une correspondance un á un entre les processus de Markov et une certaine classe des operateurs deterministes associés ; nous l'appellerons "Le Dictionnaire".

2.6 Problème de premier passage sur un domaine semi-borné

Soit $\psi_n := \lim_{B\to\infty} a_n(B)$ la probabilité de ruine sur $[0,\infty)$. Nous avons deja vu, en partant des recurrences sur un domaine borné $[0,B]$, que :

$$\psi_n = \begin{cases} (q/p)^n, & q < p \\ 1, & q \geq p. \end{cases}$$

Cette solution peut être trouvée aussi directement, sans passer par la probabilité de ruine sur $[0,B]$, en s'appuyant sur des des arguments probabilistes. On remarque d'abord que cette fonction est multplicative en n, i.e. $\psi_n = \rho^n$, et ensuite on choisit ρ selon la limite de X_n quand $n \to \infty$.

La solution la plus simple est en effet de remarquer que l'absence des sauts strictement plus grands que 1 implique une propriété de multiplicativité, ce qui impose une solution puissance. Mais, bien-sur, cette approche ne peut pas contribuer à l'étude des marches "non-simples" dans les deux directions.

Examinons maintenant la méthode de fonctions génératrices (analogues à la transformée de Laplace), qui n'est pas réellement necessaire pour la marche simple, mais qui est la méthode la plus puissante pour la resolution des èquations de differences (différentielles).

On ajoute les équations $\overline{\psi}_n = p\overline{\psi}_{n+1} + q\overline{\psi}_{n-1}$ multipliées respectivement par $z^n, n = 1, 2, ..$ On obtient ainsi une èquation pour la fonction $\overline{\psi}^*(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z^n \overline{\psi}_n$:

$$\overline{\psi}^*(z) = \frac{p\overline{\psi}_1}{\Phi(z) - 1}$$

où $\Phi(z) = Ez^{Z_1} = pz^{-1} + qz$

De lors,

$$\psi^*(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{zp\overline{\psi}_1}{p + qz^2 - z} = \frac{p - qz - pz\overline{\psi}_1}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p - qz - z(p-q)}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p}{p - qz}$$

car le numerator s'annule en 1 ("méthode du noyau") et donc $p\overline{\psi}_1 = p - q$.

De lors, $\psi_n = (q/p)^n$.

2.7 Equations differentielles et récurrences linéaires

L'étude des marches aleatoires et des processus Markoviens ramène souvent à des équations differentielles ou de récurrence linéaires. Le cas des coefficients constants est assez simple, car toutes les solutions peuvent être construites à partir des solutions basiques exponentielles e^{rx}.

Comme le cas des équations differentielles à coefficients constants est très bien connu, on rappelle ici seulement le cas de récurrences linéaires.

2.7.1 L'équation de récurrence linéaire à coefficients constants

Les deux équations de récurrence linéaire de deuxième ordre ci-dessous

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0, \tag{8}$$

$$av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = d_n, \tag{9}$$

sont appelées **homogène** et **nonhomogène** respectivement.

L'équation homogène

Si les coefficients a, b et c sont constants, on sait qu'ils existent des solutions de la forme $u_n = x^n$ pour tout n (fonctions exponentielles). Pour trouver x on remplace x^n en (8) et on trouve que x doit satisfaire **l'équation auxiliaire** :

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{10}$$

Soient x_1 et x_2 les deux racines de l'équation de deuxième degré (10). On en déduit que la solution *générale* de (8) est toujours de la forme

1. Si $x_1 \neq x_2$
$$u_n = Ax_1^n + Bx_2^n,$$
2. Si $x_1 = x_2$,
$$u_n = Ax_1^n + Bnx_1^n,$$
avec des constantes A et B.

Dans les deux cas A et B doivent être déterminées à partir des conditions supplémentaires sur la frontière.

L'équation nonhomogène

La résolution du problème nonhomogène (9) comporte quatre pas :

1. Trouver un basis pour l'espace vectoriel des solutions de l'équation auxiliaire homogène (8), et donc la solution générale u_n pour cette équation.
2. Déterminer une solution particulière de (9), par exemple en utilisant une expression "essai" $\tilde{v}_n$ qui a la même forme générale que le membre droit d_n,, mais des coefficients non-déterminés. Par exemple, si d_n est un polynôme d'ordre k, on essaie un polynôme général d'ordre k.
3. Néanmoins, si votre expression d'essai a des termes qui sont inclus dans l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène obtenue au pas 1 (et donc qui vont être annihilés par l'operateur des différences), il faut multiplier l'expression d'essai par $n, n^2, ...$ jusqu'à ce qu'il n'y a plus des termes inclus dans cet'espace .
4. Aprés la decision de la forme d'essai, on trouvent les valeurs des coefficients de $\tilde{v}_n$ à partir de (9), par la méthode des coefficients non-déterminés.
5. La solution générale de (9) est de la forme $v_n = \tilde{v}_n + u_n$. On trouve finalement les coeficients encore non déterminés en u_n, en utilisant les conditions sur la frontière pour v_n.

Exemple 2.2 *Obtenez les formules analytiques des suites décrites par les relations de récurrence ci-dessous, et vérifiez-les en utilisant les premiers termes de la suite* t_2, t_3.

1. $t_i = 2t_{i-1} + i - 1, \quad t_0 = 0$
2. $t_i = 2t_{i-1} + 5 \ \cdot 2^i, \quad t_0 = 0$
3. $t_i = 3t_{i-1} - 2t_{i-2} + 2, \ t_0 = 0, t_1 = 2$
4. $t_i = 2t_{i-1} - t_{i-2} + 2, \ t_0 = 0, t_1 = 2$

Solution :

1. C'est une équation nonhomogène, alors nous aurons :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \ \ \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \ \text{ avec } \ c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{aligned} c_1 &= 2c_1 + 1 \quad \text{et} \ \ c_1 = -1 \\ c_2 &= -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et} \ \ c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 &= = 0 = -1 + A \quad \text{et} \ \ A = 1 \\ t_i &= -i - 1 + 2^i \end{aligned}$$

2. C'est une équation nonhomogène, alors :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \ \ \tilde{t}_i = ci2^i \ \text{ avec } \ ci2^i = 2(c(i-1)2^i/2) + 52^i$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{aligned} c &= 5, \quad t_i = 5i2^i + A2^i \quad \text{et finalement,} \\ t_0 &= = 0 = A \quad \text{et} \ \ A = 0 \\ t_i &= 5i2^i \end{aligned}$$

3. C'est une équation de différences nonhomogène et l'équation quadratique attachée a les racines $1, 2$, alors nous aurons :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 2^i + A_2, \quad \tilde{t}_i = ci \;\text{ avec }\; ci = 3(ci - c) - 2(ci - 2c) + 2$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{array}{rcl} c & = & -2 \quad \text{et} \;\; c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i & = & -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 & = & = 0 = -1 + A \quad \text{et} \;\; A = 1 \\ t_i & = & -i - 1 + 2^i \end{array}$$

4. C'est une équation de différences nonhomogène dont les racines de l'équation quadratique attachée sont confondues égales à 1 donc nous aurons :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 + A_2 i, \quad \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \;\text{ avec }\; c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{array}{rcl} c_1 & = & 2c_1 + 1 \quad \text{et} \;\; c_1 = -1 \\ c_2 & = & -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et} \;\; c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i & = & -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 & = & = 0 = -1 + A \quad \text{et} \;\; A = 1 \\ t_i & = & -i - 1 + 2^i \end{array}$$

2.7.2 La méthode des fonctions génératrices

Exercice 2.7 *a) Calculez* $T(z) = \sum_{n \geq 0} T_n z^n$*, où*

$$T_0 = 0, \quad T_n = 2T_{n-1} + 1, n \geq 1$$

b) Trouvez T_n.

Exercice 2.8 *a) Calculez* $T(z) = \sum_{n \geq 0} T_n z^n$*, où*

$$T_0 = 1, \quad T_n = 2T_{n-1} + n - 1, n \geq 1$$

b) Trouvez T_n.

2.7.3 Equations differentielles et récurrences linéaires à coefficients polynomiaux

Dans le cas des coefficients polynomiaux la resolution est possible seulement dans des cas particuliers, et en utilisant toute une hierarchie des fonctions de base : hypergeometriques, d'Alembertiennes et Liouvilliennes.

3 Les chaînes de Markov à espace d'états fini

On considére maintenant le cas des processus X_n observés en temps discret : $n = 0, 1, 2, ...$

La propriété de Markov a lieu quand la loi conditionnelle de X_n sachant $(X_0, X_1, ..., X_n)$ est la même loi que la loi conditionnelle de X_n sachant X_{n-1}.

Ces processus sont entièrement characterisés par leur matrice de transition $p_{i,j}(1) = P([X_n = e_j] \mid [X_{n-1} = e_i])$ après temps 1, qu'on denotera par $p_{i,j}$.

Définition 3.1 *Une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite homogène si :*

$$\forall\, e_i, e_j \in E \ , \ P([X_n = e_j] \mid [X_{n-1} = e_i]) \ \text{ne dépend pas de } \ n.$$

La matrice $P = (p_{ij})_{i,j\in I}$, appellée **matrice de transition**, est la plus importante characteristique d'une chaîne. Cette matrice P est une matrice stochastique, c'est-à-dire une matrice telle que :

1. $\forall\, i, j \in I \ , \ p_{ij} \geq 0$ et
2. $\forall \ i \in I \ , \ \sum_{j\in I} p_{ij} = 1$; la somme des termes de chaque ligne égale à 1. En notation vectorielle, on a $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, ou $\mathbf{1}$ denote un vecteur avec tous les composantes 1.

Rémarque : Même qu'on utilise parfois le terme "matrice" si E est infini, la theorie dans ce cas est un peu differente.

3.1 L'évolution de la loi de probabilité d'une chaîne

Définition 3.2 *Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout i de I, on note $\mu_i(n) = P[X_n = e_i]$ et $\mu(n) = (\mu_i(n))_{i\in I}$. Le vecteur $\mu(n)$ définit une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$ appelée loi à l'instant n. On appelle loi initiale de la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le vecteur $\mu(0)$.*

Exemple 3.1 *Calculer les distributions $\mu(1), \mu(2)$ pour une marche sur le graphe papillon, en sachant que :*

a) le départ est surement à 0

b) le départ est avec probabilités egales en 0 ou en U, i.e. $\mu(0) = (1/2, 0, 0, 0, 1/2)$.

En conditionnant sur la position k un pas en avant, on verifie que $\mu(1) = \mu(0)P$, et

$$\boxed{\mu(n+1) = \mu(n)P} \tag{11}$$

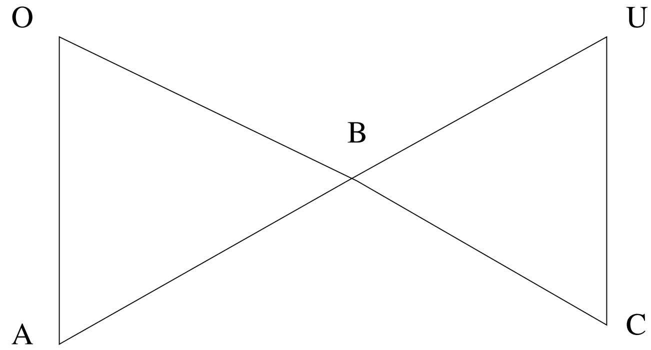


FIG. 3 – **Marche aléatoire simple sur le graphe papillon**

et alors par induction on trouve

$$\boxed{\mu(n) = \mu(0)\, P^n} \tag{12}$$

Exemple 3.2 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble* $\{1,2\}$*, de distribution initiale* $\boldsymbol{\mu}(0) = (\mu_1, \mu_2)$ *et de matrice de transition* $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$

Calculez $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2\}$*,* $\boldsymbol{\mu}_2(1) = \mathbb{P}\{X_1 = 2\}$*,* $\mathbb{P}\{X_0 = 2 | X_1 = 2\}$*,* $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2, X_2 = 1\}$*,* $\boldsymbol{\mu}_2(2)$ *et* $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_2 = 1\}$*.*

Ce dernier exercice nous sugère la necessité d'étudier la probabilité de transition après n étapes.

3.2 Probabilités de transition en n étapes

Définition 3.3 *Pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit la matrice des probabilités de transition en n étapes, elle est notée* $P^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right)_{i,j\in I}$ *où* $p_{ij}^{(n)} = P\left([X_n = e_j] \mid [X_0 = e_i]\right)$.

Note : La distribution de X_1 en partant de $X_0 = i$, est donné par la ligne i de la matrice P, et la distribution de X_n en partant de $X_{n-1} = i$ est donné par la ligne i de la matrice P^n.

Théorème 3.1 *Les matrices de transition en n étapes ont une structure de semi-group, i.e.*

$$\boxed{P^{(m+n)} = P^{(m)} P^{(n)}} \tag{13}$$

Ce resultat très important s'appelle **l'equation de Chapman-Kolmogorov** .

Démonstration: Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P et de loi initiale $\mu(0)$, à valeurs dans $(E = \{e_i; i \in I\}, \mathcal{P}(E))$. En conditionnant sur la position k après m pas, on a :

$$\forall\, i, j \in I \ , \forall\, m, n \in \mathbb{N} \ , \ p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in I} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

QED

Corollaire 3.1 $\boxed{P^{(n)} = P^n}$*, i.e. le semi-groupe des matrices de transition est "generé" par la matrice P de transition après temps* 1*.*

Demonstration : on montre ça par récurrence sur n, en partant de $P^{(1)} = P$, et en tenant compte que $P^{(n+1)} = P^{(n)}P$ (par l'equation de Chapman-Kolmogorov (13)).

Rémarque Comme illustré dans les exemple ci-dessus, en utilisant la distribution initale $\mu(0)$ et la matrice de transition P on peut calculer la distribution $\mu(n)$ a n'importe quel temps, par exemple $\mu(1), \mu(2)$ .... et aussi les distributions jointes pour n'importe quel ensemble fini des temps (en utilisant la loi de multiplication des probabilités conditionnelles). En effet, on peut donner une formule explicite pour les distributions jointes d'ordre fini d'une chaîne, en fonction de la matrice de transition P et la distribution initiale $\mu(0)$.

Théorème 3.2 *Pour une chaîne de Markov, les distribution jointes sont données pour : $\forall t_0 < t_1 < \cdots < t_k$, $t_i \in \mathbb{R}$, et $\forall\ e_{i_0}, e_{i_1}, ..., e_{i_k} \in \mathcal{E}$ explicitement par*

$$\boxed{P\left[X_{t_0} = e_{i_0}, ..., X_{t_k} = e_{i_k}\right] = \mu_{i_0}(t_0) P_{i_0,i_1}^{t_1-t_0} ... P_{i_k,i_{k-1}}^{t_k-t_{k-1}}} \tag{14}$$

Remarque 3.1 *Il est convenable d'identifier une chaîne de Markov avec sa matrice de transition P, qui est l'element principal du "duo" $(P, \mu(0))$.*

Définition 3.4 *La chaîne de Markov associé à une matrice stochastique P est la* **famille** *des mesures $\mathbb{P}_{\mu(0)}$ définies par (14), avec operateurs d'esperance associés $\mathbb{E}_{\mu(0)}$ (donc pour obtenir une seule mesure, il faut encore specifiér la mesure initiale $\mu(0)$).*

3.3 Quelques exemples de modélisation par les chaînes de Markov

Pour modéliser une situation par une chaîne de Markov, on a besoin d'abord de choisir un espace d'états convenable tel que la proprieté de Markov est satisfaite, et ensuite de déterminer la matrice de transitions.

Exemple 3.3 *Un processus qui n'est pas une chaîne de Markov a priori, mais qu'on peut "rendre" Markov par un bon choix de l'espace d'états . Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus à deux états, notés e_1 et e_2. On suppose que les transitions entre les étapes n et $n+1$ s'effectuent selon le procédé suivant :*

$$\begin{cases} \text{Si } X_{n-1} = X_n \text{ alors } P\left([X_{n+1} = e_1] \mid [X_n = e_i]\right) = \frac{3}{4} \\ \text{Si } X_{n-1} \neq X_n \text{ alors } P\left([X_{n+1} = e_1] \mid [X_n = e_i]\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une chaîne de Markov. b) Construire un espace d'états permettant de modéliser ce processus par une chaîne de Markov et donner alors son graphe.

Solution : b) On construit l'espace d'états suivant : $\{e_1 * e_1, e_1 * e_2, e_2 * e_1, e_2 * e_2\}$. Sur cet'espace, le processus devient Markovien, et la matrice de transition s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exemple 3.4 **Une companie d'assurance voiture a un système de bonus avec cinq niveaux pour les assurés sans sinistres déclarés** :

niveau 1 : 0% réduction
niveau 2 : 25%réduction
niveau 3 : 40% réduction
niveau 4 : 50% réduction
niveau 5 : 60% réduction

Pour un assuré, la probabilité de ne pas avoir de sinistre dans un an est de 0.8. Les regles selon on passe d'un niveau (état)à l'autre sont :

Aprş une année sans sinistre on passe au niveau supérieur suivant ou on reste au niveau 5

Aprş une année avec un ou plusieurs sinistres

*on diminue d'*un *niveau si l'année précedente, il n'y a pas eu de déclaration de sinistre.*

on diminue de deux *niveaux si l'année précedente il y a eu au moins une déclaration de sinistre.*

1. *Notons par $X(t)$ le niveau,soit 1, 2, 3, 4 ou 5, de l'assuré pour l'année t. Expliquez pourquoi $\{X(t)\}_{t=1}^{\infty}$ n'est pas une chaîne de Markov.*

2. *En augmentant le nombre de niveaux, définissez un nouveau processus stochastique $\{Y(t)\}_{t=1}^{\infty}$ qui* soit *Markov et de telle manière que $Y(t)$ représente le niveau de réduction pour l'assuré dans l'année t.*
3. *Déduire la matrice de transition pour la chaîne de Markov $\{Y(t)\}_{t=1}^{\infty}$.*

Solution :

1. *$\{X(t)\}$ n'est pas Markov parce que, par exemple, $\mathbb{P}[X_{t+1} = 3 \mid X_t = 4, X_{t-1} = 3, \ldots]$ ne peut pas se réduire à $\mathbb{P}[X_{t+1} = 3 \mid X_t = 4]$.*
2. *Définition des nouveaux niveaux :*

   3=40% réduction cette année, aprs̀ 25% l'année dernière
   4=50% réduction cette année, aprs̀ 40% l'année dernière
   3a=40% réduction cette année, aprs̀ 50% l'année dernière
   4a=50% réduction cette année, aprs̀ 60% l'ann'ee dernière
3. *La matrice de transition est alors*

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*3a*	*4a*
1	*0.2*	*0.8*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
2	*0.2*	*0*	*0.8*	*0*	*0*	*0*	*0*
3	*0*	*0.2*	*0*	*0.8*	*0*	*0*	*0*
4	*0*	*0*	*0*	*0*	*0.8*	*0.2*	*0*
5	*0*	*0*	*0*	*0*	*0.8*	*0*	*0.2*
3a	*0.2*	*0*	*0*	*0.8*	*0*	*0*	*0*
4a	*0*	*0.2*	*0*	*0*	*0.8*	*0*	*0*

Exemple 3.5 *Supposons que une pluie eventuelle demain depend de la situation du temps dans les trois jours précédents, ainsi : a) S'il y a eu de la pluie dans les deux jours précédents, alors il va pleuvoir avec probabilité .8. b) S'il y a pas eu de la pluie dans aucun des trois jours précédents, alors il va pleuvoir avec probabilité .2. c) Autrement, la situation va etre la meme comme dans le jour precedent avec probabilité .6. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov, en donnant l'espace des états et la matrice de transition.*

3.4 Classification des états

Définition 3.5 *Soient e_i et e_j deux éléments de E. On dit que e_i conduit à e_j (on note $e_i \to e_j$) ssi il existe $n > 0$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$ et on dit que e_i et e_j communiquent (et on note $e_i \leftrightarrow e_j$) si e_i conduit à e_j et e_j conduit à e_i .*

Rémarque : la relation " $\leftrightarrow$ " est clairement symétrique, reflexive et transitive. alors, elle partage l'espace d'états dans des classe d'équivalence.

Définition 3.6 *On appelle classes de la chaîne : les classes d'équivalence induites par la relation " $\leftrightarrow$ " sur E.*

Définition 3.7 *Une classe d'equivalence dans une chaîne de Markov* **finie** *qui n'a pas de transitions vers l'exterieur est dite récurente ; les autres classes s'appellent transitoires.*

Rémarque : La distinction entre elements transients et recurents a une grande portée sur la valeur des limites $\lim_{n\to\infty} P^n(i,j)$. On verra que pour j transient, elle est toujours 0.

Définition 3.8 *Le graphe de communication d'une chaîne est un graphe sur les états (indiqués par des points du plan), avec des cotés représentant les transitions possibles (indiqués par des flèches, avec la valeur de la probabilité de transition notée au dessus).*

4 Le comportement limite des chaînes de Markov

4.1 Lois invariantes et lois asymptotiques

Une question très importante pour les chaînes de Markov est de déterminer les distributions "asymptotiques/a la longue/limites" d'une chaîne specifié par $\mu(0)$ et P :

$$\boldsymbol{\pi}(\infty)_{\mu(0)} = \boldsymbol{\pi}(\infty) = \lim_{n\to\infty} \mu(n) = \lim_{n\to\infty} \mu(0)P^n \tag{15}$$

A priori, il pourrait y exister une limite asymptotiques différente (15) pour chaque distribution de départ $\mu(0)$. Plus précisement, on pourrait avoir des distributions limite différentes $\boldsymbol{\pi}(\infty)_i$ pour chaque point de départ sur $\mu(0) = \delta_i$.

Remarque 4.1 *Comme $\delta_i P^n$ est précisement la ligne i de la matrice P^n, on trouve par (15) que les limites asymptotiques $\boldsymbol{\pi}(\infty)_i$ pour chaque point de départ nonaléatoire possible $i = 1, ..., I$ sont précisement les lignes de la matrice*

$$\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$$

. On appelera cette matrice la matrice de transition asymptotique. En plus, ces vecteurs de probabilité sont les points extremaux de l'ensemble des toutes les distributions asymptotiques possibles.

Alors, la question de l'ergodicité = existence + unicité de la distribution asymptotiques est equivalente à la question :

Question (ERG) : Est-ce-que la limite matrice $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ existe et est-ce-que elle a des lignes identiques, i.e. est-ce-que on a $\boldsymbol{P} = \mathbf{1}\boldsymbol{\pi}$? (ici $\mathbf{1}$ denote un vecteur colonne et $\boldsymbol{\pi}$ un vecteur ligne).

Les reponses aux questions (E),(U) et (ERG) peuvent-être abordées par la structure spectrale (valeurs propres, vecteurs propres) speciale de la matrice P, en utilisant le théorème de Perron-Frobenius pour les espace d'états finies.

et encore des autres limites données par l'ensemble convexe engendré par $\boldsymbol{\pi}(\infty)_i, i \in \mathcal{E}$.

Définition 4.1 *L'ensemble des distributions limite $\boldsymbol{\pi}(\infty)_{\mu(0)}$ d'une chaine P, obtenues en variant la distribution initiale $\mu(0)$, sera appellé* **l'ensemble des distributions asymptotiques**.

4.1.1 Équations d'équilibre/stationnarité/invariance

Remarque 4.2 *En supposant que la limite (15) existe (ce qu'il n'y est pas toujours le cas), on voit par $\mu(n+1) = \mu(n)P$ que chacune de cettes distributions "a la longue" doit satisfaire les équations $\boldsymbol{\pi}(\infty) = \boldsymbol{\pi}(\infty)P$*

Définition 4.2 *Les équations*

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P \tag{16}$$

sont appelées **équations d'équilibre/stationnarité/invariance***, et un vecteur des probabilités qui les satisfait est appelé* **distribution stationnaire** *ou invariante.*

Autrement dit : une distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ est un vecteur de probabilités qui est aussi vecteur propre a gauche de P associé à la valeur propre 1.

Remarque 4.3 *Le nom stationnaire vient du fait que si $\mu(0) = \boldsymbol{\pi}$, alors on a $\mu(n) = \boldsymbol{\pi}$ pour chaque n.*

Par la rémarque (4.2), il suit que :

Corollaire 4.1 *Les distributions asymptotiques d'une chaîne de Markov homogène se trouvent parmi les distributions stationnaires.*

Le système d'équilibre (16) est donc la clé du calcul des distributions asymptotiques. Deux questions fondamentales ici sont celles de l'existence d'au moins une solution, et de l'unicité.

Questions (E-U) : 1) Est-ce que c'est possible qu'il n'existent pas des vecteurs des probabilités qui satisfont le système d'équilibre (16) (i.e. est-ce que c'est possible qu'il n'y ait pas des vecteurs propres pour la valeur propre 1 qui ont toutes les composants nonnégatives) ? 2) Est-ce que c'est possible qu'il existent plusieurs vecteurs des probabilités qui satisfont le système d'équilibre (16) ?

Une autre question fondamentale est si dans la presence d'une solution unique du système d'équilibre (16), elle sera forcement "attractive", donc il y aura de la convergence $lim_{n\to\infty}\mu(0)P^n = \boldsymbol{\pi}$ pour n'importe quel $\mu(0)$.

Dans la términologie des systêmes dynamiques, cette situation correspond au cas quand l'équation d'évolution $\mu(n+1) = \mu(n)P$ admet un seul point invariant stable, le basin d'attraction du quel est tout l'éspace (donc toutes les orbites qui partent de n'importe quel $\mu(0)$ convergent vers $\boldsymbol{\pi}$). Mais, il y a aussi des situations plus compliquées :

Exemple 4.1 L'inexistence de la limite $\boldsymbol{P} = lim_{n\to\infty} P^n$ pour les chaînes cycliques. *La limite $\boldsymbol{P}$ n'existe pas toujours, comme on voit immediatement en examinant une chaîne de Markov qui bouge cycliquement sur les noeuds d'un graphe. Par exemple, pour $n = 3$, avec la matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a : } P^{3n} = I_3 \ , \ P^{3n+1} = P \text{ et } P^{3n+2} = P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit immediatement que la suite $P, P^2, P^3 = I, P^4 = P, \ldots$ est cyclique et donc sans limite.

Ici, la distribution stationnaire $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$ est unique, mais instable, et tout l'espace se decompose dans des cycles invariants instables d'ordre 3.

4.1.2 Les équations d'équilibre local

Exemple 4.2 *Pour une* **marche aléatoire** $X_t, \ t = 0, 1, 2, \ldots$ **sur un graphe formé de deux tetrahèdres superposés**, *calculer :*

1. *L'ésperance en partant de U du nombre de pas T_O jusq'au coin opposé O.*Indication : *Utiliser la symmetrie.*
2. *L'ésperance en sortant de O du nombre de pas $\tilde{T}_O$ jusq'au premier retour à O.*
3. *La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_T = U\}$, ou $T = \min[T_U, T_O]$.*
4. *La probabilité p_k en partant de O que la marche visite U exactement k fois ($k = 0, 1, 2, \ldots$) avant le premier retour à O. Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.*
5. *Les probabilités stationnaires du chaque noeud.* **Indication :** *Devinez la rèponse et montrez qu'elle satisfait le systême des équations d'équilibre.*

4.2 L'ergodicité

Un cas trés fréquent dans les applications et quand il n'y a qu'une distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$, qui coincide aussi avec la distribution limite pour toutes les points de départ initials possibles. Alors, par le corrollaire (4.1), la distribution limite est independante de la distribution de départ, est egale à $\boldsymbol{\pi}$. Nous allons appeler ça le cas **ergodique**.

Définition 4.3 *On appelle une chaîne à matrice de transition P* **ergodique** *lorce'que la distribution limite $\boldsymbol{\pi}(\infty) = \boldsymbol{\pi}(\infty)(\mu(0)) = \lim_{n\to\infty} \mu(n)$ existe et est* **unique**, *independement de la distribution de départ.*

Note : Dans le cas des espace d'états dénombrable, il est important de distinguer les deux cas quand la distribution limite satisfait $\pi_i > 0, \forall i$ et le cas quand elle satisfait $\pi_i = 0, \forall i$. Nous appelerons ces deux cas **ergodique positive** et **ergodique nul** (ce dernier cas étant impossible pour des espace d'états finies). Dans la literature, le terme ergodique signifie d'habitude ce que nous appelons ici ergodique positive.

Remarque 4.4 *Une chaîne ayant des distributions limite en partant de chaque point i, et ayant une distribution stationnaire unique $\boldsymbol{\pi}$ est ergodique (i.e. toutes les distribution asymptotiques doivent coincider avec $\boldsymbol{\pi}$).*

L'abondance du cas ergodique est expliquée par la décomposition spectrale :

Lemma 4.1 *Une matrice A de dimension n ayant un ensemble de n vecteurs propres à droite independants $\boldsymbol{d}_i$, et donc aussi un ensemble de n vecteurs propres à gauche independants $\boldsymbol{l}'_i$, calculés en prenant les lignes de la matrice D^{-1}, où $D = (\boldsymbol{d}_1 \mid \boldsymbol{d}_2 \mid \ldots \ \boldsymbol{d}_n)$ peut-être decomposé :*

$$A = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{d}_i \, \boldsymbol{l}'_i$$

où λ_i sont les valeurs propres.

Ce cas a lieu par exemple quand tous les valeurs propres de P sont distincts ("le cas générique"). Si en plus la seul valeur propre de module 1 est 1, et avec multiplicité 1 ("le cas générique"), il suit immediatement que

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \mathbf{1}\, \boldsymbol{\pi}$$

Nous examinons maintenant pour ergodicité un exemple ou P^n et $\boldsymbol{\pi}$ se calculent explicitement :

Exemple 4.3 Chaîne a deux ètats. *Soient $a, b \in [0,1]$ et la matrice de transition :*

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

a) Montrer en calculant les valeurs et vecteurs propres que

$$P^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

b) Montrez que avec $a, b \in (0,1)$, la limite $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$. En suite, calculez cette limite dans tous les cas possibles.

En conclusion, on voit que avec $a, b \in (0,1)$, la limite matrice $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ existe et qu'elle a des lignes identiques, donc la chaîne est ergodique : la distribution limite $\boxed{\boldsymbol{\pi} = (\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})}$ est unique. Elle est aussi l'unique distribution stationnaire.

4.3 Le théorème ergodique

Le cas ergodique est le plus important dans les applications, a cause du :

Théorème 4.1 *Soit $X(n)$ une chaîne de Markov ergodique à distribution asymptotiques $\boldsymbol{\pi}$, et soit une fonction "coût" f tel que la "moyenne spatiale" $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}} f(X_.) = \sum_{j\in\mathcal{E}} \pi_j f_j$ est bien definie. Alors, la moyenne temporelle des coûts converge presque partout vers la moyenne spatiale, for any initial distribution :*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} f(X_n) = \sum_{j\in\mathcal{E}} \pi_j f_j$$

Nous examinons maintenant un exemple ou P^n n'est pas disponible explicitement ; quand même, la distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ est unique et donc la limite des coûts moyenne temporelles se calculent facilement :

Exercice 4.1 *Montrez que la marche aléatoire sur le graph papillon a une distribution stationnaire unique $\boldsymbol{\pi}$. Calculez l'esperance du coût moyenne de cette marche, si $f(A) = 10, f(B) = 1$ et les autres coûts sont* 0.

4.4 Chaînes et processus a espace d'états infini

Note : Dans le cas des processus a espace d'états dénombrable, c'est possible a priori qu'il y'ait des éléments e_i de E tel que $g_{ii} = -\sum_{j\neq i} g_{i,j} = -\infty$; un tel état e_i est dit <u>instantané</u> (parce-que, comme on a vue, $g_i = -g_{ii}$ est precisement le taux du temps de sortie exponentiel $T^{(i)}$, et alors $g_{ii} = -\infty$ entraîne $T^{(i)} = 0$.

L'interêt principal en les chaînes avec espace d'etats infini est dans le cas d'une seule classe de communication.

Pour les chaînes avec espace d'etats fini qui communique tous, toutes les états sont recurrents. Par contre, pour les chaînes infinis, la communication des états peut toujours cacher des comportements diverses, et il convient d'adopter une nouvelle classification des etats (plus fine).

4.4.1 Récurrence des chaînes à espace d'états denombrable

Pour les chaînes avec espace d'etats fini qui communique tous, toutes les états sont recurrents. Par contre, pour les chaînes infinis, la communication des états peut toujours cacher des comportements diverses, et il convien d'adopter une nouvelle classification des etats (plus fine).

Pour les chaînes avec espace d'états discret (fini où dénombrable), posons

$$f_{i,j} = \mathbb{P}_i\{\exists t \geq 1 : X_t = j\}$$

On peut vérifier que pour les chaînes avec espace d'etats fini qui communique tous, on a $f_{i,j} = 1, \forall i, j$.

Définition 4.4 *Soit e_i dans E. L'état e_i est dit récurrent si, et seulement si :* $f_{i,i} = 1$

Dans le cas contraire, e_i est dit transient (ou transitoire) [1].

Pour les états récurrents, on pose T_i pour le temps du premier retour en i ; on distingue encore entre états recurrents positifs, pour les quels $\mathbb{E}_i T_i < \infty$, et états nul-recurrents, pour les quels $\mathbb{E}_i T_i = \infty$

Autrement dit : e_i est récurrent si, et seulement si : en partant de e_i , on est (presque) sûr d'y revenir en un temps fini (et donc par conséquent un nombre infini de fois) ; et il est récurrent positif ssi en plus l'espace d'états du temps du premier retour est fini.

Remarque 4.5 *La récurrence et la transience ne dépendent que de la classe. On parle alors des classes récurrentes ou transitoires.*

Théorème 4.2 *Dans le cas récurrent positif, on a (comme dans le cas d'espace d'états fini) pour les chaînes en temps discret*

$$\pi(i) = \frac{1}{\mathbb{E}T_i}$$

où T_i est le temps total de retour au état i, et pour les processus en temps continu

$$\pi(i) = \frac{1}{1 + \mathbb{E}R_i}$$

où R_i est le temps de retour au état i, en partant du moment qu'on le quitte. Par contre, dans le cas récurrent nul, il n'y a pas de distribution stationnaire, et la distribution limite, si elle existe, est identiquement 0.

[1] Pour un espace d'états continu, on etudie plutot la récurrence/transience des ensembles.

4.5 Exercices : TD 1

ESPÉRANCE CONDITIONNELLE

1. On dispose d'un dé équilibré et d'une pièce de monnaie qui tombe sur pile avec une probabilité 1/3. On lance le dé une fois puis on lance la pièce un nombre de fois égal au chiffre obtenu avec le dé.

   a. Si le dé est tombé sur le chiffre k, quelle est la probabilité de n'obtenir que des faces avec la pièce ? D'obtenir au moins un pile ? (il s'agit donc de probabilités conditionnellement au chiffre k obtenu avec le dé).

   b. Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de a) la probabilité (non conditionnelle) d'obtenir au moins un pile.

2. Une banque a deux caissières. Trois personnes (A,B, et C) entrent en même temps ; A et B vont directement aux deux caissières libres et C attend.

   Quelle est la probabilité que A soit toujours dans la banque quand les deux autres sont partis, dans les trois cas suivants : i. Le "temps de service" est exactement 2 mn pour les deux caissières. ii. Pour les deux caissières, ce temps est 1,2, ou 3 mn, avec probabilités 1/3 pour chaque cas.

3. Fiabilité : Calculer la probabilité que le réseau suivant fonctionne :

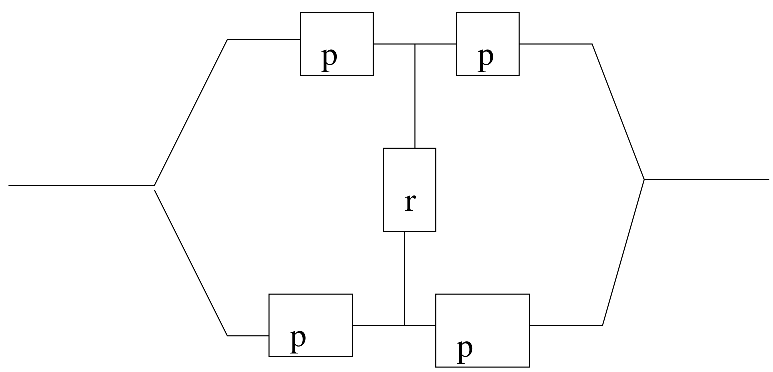


FIG. 4 – **p,r sont les probabilités que les composantes fonctionnent**

4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P. Dans chaque cas, on demande de voir s'il y a des états absorbants, de déterminer les classes de la chaîne et d'étudier la périodicité et la récurrence (ou la transience) des états. En plus, discuter : • existence et unicité (?) d'éventuelle(s) distribution(s) stationnaire(s)

   • existence d'une distribution limite (la déterminer le cas échéant)

   (a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **b)** $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **d)** $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

5. Soit $Y_i, i = 1, ...,$ une suite des lancées de dés indépendents. Déterminer dans les exemples suivantes si la suite X_n est Markov, en donnant (si possible) la matrice de transition et le graph de communication. Classifier les classes en récurrents et transitoires et calculer si possible la limite $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$
   (a) Le maximum de résultats $X_n = \max_{1\leq i\leq n} Y_i$
   (b) Le nombre cumulatif de 6, $X_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{Y_i=6\}}$
   (c) Le nombre cumulatif de non 6, aprés le dernière 6, jusqu'au temps n.
   (d) Le nombre cumulatif de non 6, aprés le temps n, jusqu'au prochaîne 6.
   (e) $X_n = Y_n + Y_{n-1}$ f) $X_n = Max_{1\leq i\leq n} S_i$, ou $S_i = \sum_{k=1}^{i} Y_k$ et g) $X_n = S_1 + S_2 + ... + S_n$

6. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $\{1, 2\}$, de distribution initiale $\boldsymbol{\mu}_0 = (1/5, 4/5)$ et de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$
   (a) Calculez $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2\}$, $\boldsymbol{\mu}_1(1) = \mathbb{P}\{X_1 = 2\}$ et $\mathbb{P}\{X_0 = 2|X_1 = 2\}$.
   (b) Démontrez que si la limite $\boldsymbol{\mu} = lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}_0 P^n$ existe, elle doit etre une distribution stationnaire, i.e. elle doit satisfaire léquation $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} P$.
   (c) Trouvez toutes les lois stationnaires $\boldsymbol{\pi}$ de la chaîne donnée (s'il y en a plus d'une seule). Spécifiez, en justifiant, si la limite $lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}_0 P^n$ existe pour la chaîne donnée. Si c'est le cas, quelles sont les limites $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2\}$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2, X_{n+1} = 2\}$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2|X_{n+1} = 2\}$?
   (d) Étant donné un coût de stockage per unité de temps $h(1) = 0, h(2) = 3$, calculez le coût moyen stationnaire
   $$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}\ n^{-1} \sum_{i=1}^{n} h(X_i)$$
   ou $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}$ denote l'espérance avec distribution initiale de X_0 egale à $\boldsymbol{\pi}$.

Solution :

(a)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2\} &= \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6} = \frac{2}{3} \\ \mathbb{P}\{X_1 = 2\} &= \frac{20}{30} + \frac{2}{30} = \frac{22}{30} \\ \mathbb{P}\{X_0 = 2|X_1 = 2\} &= \frac{2}{3}/\frac{22}{30} = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

(b)

(c) Un calcul imediat montre que le vecteur propre a gauche de P, i.e. la loi stationnaire, est unique $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. La limite $lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}_0 P^n$ existe parce que la chaîne est apériodique ; par consequent, elle est egale a $\boldsymbol{\pi}$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2\} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2, X_{n+1} = 2\} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{10}{30}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2|X_{n+1} = 2\} = \frac{5}{6}$$

(d)

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}\, n^{-1}\sum_{i=1}^{n} h(X_i) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}} h(X_1) = 3\boldsymbol{\pi}(2) = 2$$

ou $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}$ denote l'espérance avec distribution initiale de X_0 egale à $\boldsymbol{\pi}$.

7. Une agence de notation de titres évalue les différentes entreprises chaque trimèstre ; les notations sont, en ordre decroissante de mérite A, B, C et D (défaut). Les donnés historiques suggérent qu'on peut modéliser l'évaluation de crédit d'une entreprise typique par une chaîne de Markov avec matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha-\alpha^2 & \alpha^2 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1-2\alpha-\alpha^2 & \alpha^2 \\ 1-2\alpha-\alpha^2 & \alpha & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre qui dépend de l'entreprise.

(a) Trouvez les valeurs de α pour lesquelles la matrice P est une matrice de transition valable (i.e. "stochastique").

(b) Tracez le graph de communication de la chaîne. Identifiez les classes de communication et classifiez-les en récurrents et transitoires, périodiques ou pas. Spécifier s'il y a des valeurs de α pour lesquelles la structure est differente.

(c) Trouvez toutes les lois stationnaires $\boldsymbol{\pi}$ de cette chaîne, dans tous les cas trouvés ci dessus.

Solution :

(a) All transition probabilities must lie in $[0, 1]$. Now $1 - 2\alpha - \alpha^2 \le 1 - \alpha - \alpha^2 \le 1$ for $\alpha \ge 0$, so it suffices to ensure that $1 - 2\alpha - \alpha^2 \ge 0$ i.e. $\alpha \le \sqrt{2} - 1$. So the range of possible values of α is $[0, \sqrt{2} - 1]$.

(b) Pour $\alpha > 0$, la chaîne a une classe transiente (A, B, C) et une classe absorbante D, et est apériodique by inspection. Pour $\alpha = 0$, nous avons deux classes reccurrentes, la première périodique.

(c) Une probabilité stationnaire, si elle existe, doit satisfaire :

$$\begin{array}{rcl} \alpha\pi_A + \alpha\pi_B + (1-2\alpha-\alpha^2)\pi_C & = & \pi_A \\ (1-\alpha-\alpha^2)\pi_A + \alpha\pi_B + \alpha\pi_C & = & \pi_B \\ \alpha^2\pi_A + (1-2\alpha-\alpha^2)\pi_B + \alpha\pi_C & = & \pi_C \\ \alpha^2\pi_B + \alpha^2\pi_C + \pi_D & = & \pi_D \end{array}.$$

Pour $\alpha > 0$, la dernière équation implies $\pi_B = \pi_C = 0$, and this in turn shows that $\pi_A = 0$. Des lors, la probabilité stationnaire $\pi = (0, 0, 0, 1)$. est unique : il y a une seule classe recurrente et elle est apériodique.

8. Soit $Y_i, i = 1, ...,$ une suite des lancées de dé indépendantes. Déterminer dans les exemples suivantes si la suite X_n est Markov, en donnant (si possible) la matrice de transition et le graph de communication. Classifier les classes en récurrents et transitoires et calculer si possible la limite $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$
   (a) Le maximum de résultats $X_n = \max_{1\leq i\leq n} Y_i$
   (b) Le nombre cumulatif de non 6, aprés le temps n, jusqu'au prochaîne 6.
   (c) $X_n = Y_n + Y_{n-1}$
   (d) $X_n = Max_{1\leq i\leq n} S_i$, ou $S_i = \sum_{k=1}^{i} Y_i$ et
   (e) $X_n = S_1 + S_2 + ... + S_n$

5 Problèmes d'absorbtion/Dirichlet pour les chaînes de Markov

Sommaire : Nous étendrons ici l'approche de la section precedante pour les problèmes d'absorbtion de marches aleatoires, aux cas des chaînes de Markov de transition P. Brèvement, après avoir identifié l'operateur associé comme $G = P - I$, on a exactement les mêmes équations comme en avant, la seule difference étant que les solutions peuvent être rarement explicitées.

5.1 Les chaînes de Markov absorbantes

Définition 5.1 *Une chaîne s'apelle absorbante si tous ses états récurrents sont absorbants, i.e. $P_{i,j} = \delta_{i,j}$ pour chaque état i récurrent.*

Motivation : Parfois, une chaîne/marche est forcée de rester dans un sous-ensemble de son espace d'états initial par des diverses méchanismes de contrainte. Par exemple, une marche sur $\mathbb{Z}$ qui est contrainte à rester nonegative, donc en $\mathbb{N}$, pourrait être absorbée en 0 pour toujours, ou "réfléchie", i.e retournée en $\mathbb{N}$ dés qu'elle arrive dans le complement $\partial = \mathbb{Z} - \mathbb{N}$.

Le méchanisme de contrainte le plus simple est l'absorbtion. On appellera l'ensemble des états absorbants "cimetière" ∂ ; ceux-ci sont characterisés par des probabilités de transition $P_{i,j} = \delta_{i,j}, \forall i \in \partial, \forall j$.

5.2 Les problèmes de Dirichlet

Les problèmes de Dirichlet ont comme objet l'étude des temps de sortie N, de la distribution du point de sortie $X_N \in \partial$, et des diverses autres fonctions comme des prix finaux ou des coûts accumulés par la marche jusqu'au moment de son absorbtion en ∂.

Pour les marches aléatoires, on a vu que tous ces problèmes aboutissaient dans des équations de différences (ou différentielles, si l'espace d'états était $\mathbb{R}^d$). On verra maintenant que pour les chaînes de Markov, ces problèmes aboutissent dans des équations impliquant la matrice $G = P - I$. La méthode pour établir ces équations est toujours le conditionnement sur le premier pas.

Soit X_k une chaîne de Markov absorbante à espace d'états $S = \mathcal{T} \bigcup \partial = \{1, 2, ...I, C1, C2, ..\}$, où les états en $\mathcal{T}$ sont transitoires, et les états $\partial = \{C1, C2, ...\}$ sont absorbants. Soit $\left\| \begin{array}{c|c} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{P}^{(\mathcal{T},\partial)} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{array} \right\|$ la matrice de transition et soit $\boldsymbol{\beta}$ la distribution initiale.

Définition 5.2 *Soit X_t une chaîne absorbante, soit ∂ l'ensemble des états absorbants, et soit $\mathcal{T}$ le sous-ensemble (complémentaire) d'états transitoires. On appélera* **temps de sortie/absorbtion** *N le premier temps quand le processus X_t n'est plus en $\mathcal{T}$ (et donc est arrivé en ∂)*

$$N = \inf\{t : X_t \notin \mathcal{T}\} \in \{1, 2, ...\}$$

Remarque 5.1 *a) N est precisement le nombre de fois en $\mathcal{T}$, en incluant la position initiale.*

b) On pourrait ègalement considérer le temps $\tilde{N} = N - 1 \in \{0, 1, 2, ...\}$ pass'e en les états transitoires, sans inclure la position initiale.

On s'intéressera dans la distribution et l'espérance des **variables d'absorbtion**, comme le temps d'absorbtion N, la position après absorbtion X_N et la position avant absorbtion X_{N-1} ; on vera qu'elles sont calculables en utilisant des certaines relations entre leur distributions conditionnées par le point de départ.

Nous étudierons en suite plusieurs charactéristiques du temps N jusqu'au premier passage dans l'ensemble des états l'absorbants ∂ :

1. Les espérances des temps d'absorbtion $\boldsymbol{n} = (n_i, i \in \mathcal{T})$, où $n_i = \mathbb{E}_i N$.
2. La distribution de N.
3. Les probabilités d'absorbtion dans les différents états absorbants (s'il y en a plusieurs).

5.3 Les espérances des temps d'absorbtion

Théorème 5.1 *a) Les espérances des temps d'absorbtion à partir des états transitoires* $\boldsymbol{n}$ *satisfont le* **système d'absorbtion**

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{n} + \mathbf{1}$$

b) Elles sont données explicitement par :

$$\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\,\mathbf{1}$$

c) Avec une distribution initiale $\boldsymbol{\beta}$*, l'espérance* $\bar{n} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\beta}} N$ *du temps d'absorbtion est :*

$$\bar{n} = \mathbb{E}N = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\mathbf{1}$$

Corollaire 5.1 *Soit* $\widetilde{\boldsymbol{G}} := \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{I}$*. Les espérances des temps d'absorbtion à partir des tous les états transitoires* $\boldsymbol{n}$ *satisfont le satisfont le système*

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{n} + \mathbf{1} &= 0 \\ n_i &= 0, \quad \forall i \in \partial \end{aligned} \tag{17}$$

Ceci est notre premier exemple de système de Dirichlet. Rémarquez que la matrice $\widetilde{G}$ a seulement ses valeurs propres avec partie réelle negative, étant par conséquent inversible.

Demonstration : a) est équivalent au système

$$n_i = \sum_{j \in \mathcal{T}} Q_{i,j}(n_j + 1) + \sum_{j \notin \mathcal{T}} P_{i,j}^{(\mathcal{T},\partial)} * 1$$

qui généralise l'équation (1), et est obtenu par un conditionnement pareil.

b) est simplement la solution du système donné en a).

Exemple 5.1 *Soit une chaîne sur* $\{1, 2\}$ *définie par la matrice de transition* $\left(\begin{array}{c|c} p & 1-p \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ *avec* $X_0 = 1$ *(i.e., la loi initiale est* $\boldsymbol{\mu}_0 = (1, 0)$*).*

Soit N *le nombre des transitions jusqu'à l'absorbtion, en partant du temps* 0

a) Quelle est la valeur de N *si* $X_0 = X_1 ... X_{k-1} = 1$ *et* $X_k = 2$ *? Quel est l'espace d'états de* N *?*

b) Trouvez l'espérance $n = \mathbb{E}N$ *du nombre des pas* N *jusqu'à l'absorbtion, en partant du premier état (i.e.* $X_0 = 1, \boldsymbol{\beta} = (1, 0)$*).*

Rqs : 1) Le système donné au point a) est encore plus fondamental que la formule explicite donnée en b), car l'inversion des matrices est rarement la meilleure solution pour résoudre un système ; aussi, il existe beaucoup de variations de ce problème où le système (un peu différent) sera facile à obtenir, par la même méthode de **conditionnement sur le premier pas**. Ce problème fournit une illustration du fait que conceptuellement et numériquement, les systèmes d'équations sont plus utiles que leurs solutions explicites !

2)(*) La formule explicite

$$\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} \, \mathbf{1} = \big[\sum_{i=1}^{\infty} (\boldsymbol{Q})^i\big] \mathbf{1}$$

a aussi une interprétation probabiliste importante. Remarquons d'abord **la décomposition en indicateurs**

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} I_k$$

où I_k est l'indicateur d'être dans la partie transitoire au temps k. Donc, $n_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_i I_k$. Remarquons aussi la décomposition en indicateurs $I_k = \sum_{j \in \mathcal{T}} I_{k,j}$, où $I_{k,j}$ est l'indicateur d'être en position $j \in \mathcal{T}$ au temps k. Ces décompositions nous ramènent finalement à

$$n_i = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathcal{T}} \mathbb{E}_i I_{k,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathcal{T}} (\boldsymbol{Q})^k_{i,j}$$

5.4 Les probabilités d'absorbtion

Définition 5.3 *Soit X_t un processus, soit E un sous-ensemble arbitraire de l'espace d'états , et soit ∂ son complémentaire. On appelera* **processus absorbé en l'ensemble d'arrêt** ∂ *le processus $\tilde{X}_t$ obtenu à partir de X_t en modifiant tous les états en ∂ en sorte qu'ils soient absorbants.*

Dans le prochaine exemple, nous utilisérons plusieurs ensembles d'arrêt.

Exemple 5.2 *Pour une* **marche aléatoire** $X_t, \ t = 0, 1, 2, \ldots$ **sur le graphe papillon** *ci-dessous, calculer :*

1. *L'espérance n_U en sortant de U du nombre de pas N jusqu'au noeud O.* Indication : *Utiliser la symmetrie.*
2. *Les probabilités stationnaires de chaque noeud.*
3. *L'espérance en sortant de O du nombre de pas $\tilde{N}_O$ jusqu'au premier retour à O.*

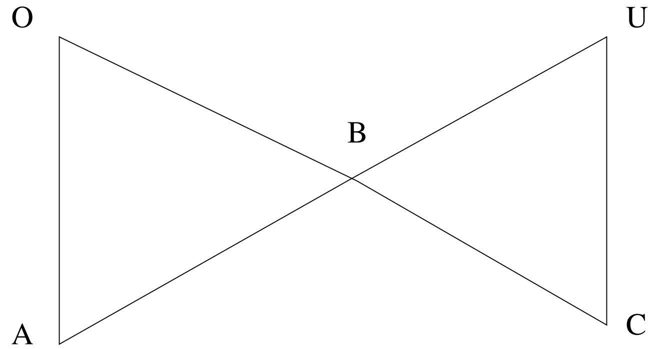


FIG. 5 – **Marche aléatoire simple sur le graphe papillon**

4. La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_N = O\} = \mathbb{P}_A\{N_O < N_U\}$*, où* $N = \min[N_U, N_O]$.

Solution : 4) En résolvant le système d'absorbtion pour p_A, p_B, p_C, on trouve $p_A = 3/4, p_B = 1/2, p_C = 1/4$■.

Supposons qu'il y a plusieurs états absorbants à probabilités d'absorbtion $\boldsymbol{p}^{(j)}, j \in S - \partial$, qui donnent des "prix finals" $\boldsymbol{f} = \{f_j, j \in \partial\}$, posons $\hat{p}_i = \mathbb{E}_i f(N)$, et $\hat{\boldsymbol{p}} = \{\hat{p}_i, i \in S - \partial\}$ le vecteur de prix finals esperés. Le calcul de $\hat{\boldsymbol{p}}$ est le fameux **problème de Dirichlet**. Par exemple, pour $\boldsymbol{f}_j = \{0, ..., 0, 1, 0, ...\} = \{\delta_j(i), i = 1, 2, ...\}$ (avec le 1 sur la position j) on obtient les probabilités d'absorbtion $\hat{p}_i(j) = \mathbb{P}_i\{X_N = j\} = \mathbb{E}_i I_{\{X_N = j\}}$.

La théorie des chaînes pour les quelles tous les états récurrents sont absorbants peut être utilisée pour étudier n'importe quelle chaîne, en modifiant certaines transitions.

Théorème 5.2 *Le vecteur d'espérances du prix final* $\boldsymbol{f}$ *satisfait le* **système d'absorbtion**

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{P}^{(\mathcal{T},\partial)}\boldsymbol{f}$$

En particulier

Théorème 5.3 *Les probabilités d'absorbtion* $\hat{\boldsymbol{p}}^{(j)}$ *dans un état absorbant fixe* j *satisfont le* **système d'absorbtion**

$$\hat{\boldsymbol{p}}^{(j)} = \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{p}}^{(j)} + \boldsymbol{p}^{(j)}_{(\mathcal{T},\partial)}$$

où $\boldsymbol{p}^{(j)}_{(\mathcal{T},\partial)}$ *denote le vecteur des probabilités dans l'état absorbant* j.

La matrice $\boldsymbol{P}^{(abs)}$ *des probabilités d'absorbtion satisfait :*

$$\boldsymbol{P}^{(abs)} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{(abs)} + \boldsymbol{P}^{(\mathcal{T},\partial)}$$

et donc

$$\boldsymbol{P}^{(abs)} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{P}^{(\mathcal{T},\partial)}$$

Corollaire 5.2 *Soit* $\boldsymbol{G} := \boldsymbol{P} - \boldsymbol{I}$. *Avec un prix final arbitraire* $\boldsymbol{f}$, *les prix finaux espérés* $\mathbf{p}$ *à partir de tous les états satisfont le* **système d'absorbtion**

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{p} = 0 \tag{18}$$

$$p_i = f_i, \quad \forall i \in \partial \tag{19}$$

Corollaire 5.3 *Avec une distribution initiale* $\boldsymbol{\beta}$, *avec un prix final arbitraire* $\boldsymbol{f}$, *on a l'espace d'états :*

$$\hat{\boldsymbol{p}} \;=\; \boldsymbol{\beta}(I - \boldsymbol{Q})^{-1})\boldsymbol{P}^{(\mathcal{T},\partial)}\boldsymbol{f}$$

Pour autres exemples des problèmes d'absorbtion, voir Ruegg, 2.6.4-2.6.5.

5.5 Les distributions des temps d'absorbtion (de type phase/"matrix geométric"

Les distributions de temps d'absorbtion, appelées aussi "distributions de phase", sont disponibles explicitement. Soit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(k) = (\boldsymbol{p}_{x,y}(k), x \in \mathcal{T}) := (\mathbb{P}_{x,y}\{N = k\}, x \in \mathcal{T}, y \in \partial\})\\ \boldsymbol{P}(k) = (P_{x,y}(k), x \in \mathcal{T}) := (\mathbb{P}_{x,y}\{N > k\}, x \in \mathcal{T}, y \in \partial\})\end{aligned}$$

les matrices de dimension $|\mathcal{T} \times |\partial|$ ayant comme elements les probabilités jointes de k pas avant l'absorbtion, de départ en x et d'absorbtion en y.

Théorème 5.4 *a) Pour une chaîne de Markov absorbante à matrice de transition* $\left\| \begin{array}{c|c} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{P}^{(\mathcal{T},\partial)} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{array} \right\|$ *les distributions du temps d'absorbtion* N *sont données par :*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(k) &= (\boldsymbol{Q})^{k-1}\boldsymbol{P}^{(\mathcal{T},\partial)}\\ \boldsymbol{P}(k) &= (\boldsymbol{Q})^{k}\mathbf{1}\end{aligned}$$

b) Avec distribution initiale $\boldsymbol{\beta}$, *on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{N = k\} &= \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{Q})^{k-1}\boldsymbol{P}^{(\mathcal{T},\partial)}\\ \mathbb{P}\{N > k\} &= \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{Q})^{k}\mathbf{1}\end{aligned}$$

Exercice 5.1 *Démontrez le théorème. Ind : Les matrices* $\boldsymbol{p}(k), \boldsymbol{P}(k)$ *satisfont les recurrences :*

$$\boldsymbol{p}(k) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}(k-1), \qquad et\ \boldsymbol{P}(k) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(k-1)$$

qui ramènent (en itérant) au résultat :

Démonstration alternative : $I_{N=k} = \sum_{x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}\in\mathcal{T},y\in\partial} I_{X_0=x_0,X_1=x_1,\ldots,X_{k-1}=x_{k-1},X_k=y\in\partial\in\mathcal{T}}$. Dès lors,

$$\mathbb{P}_{x_0}\{N=k, X_k=y\} = \sum_{x_1,\ldots,x_{j-1}\in\mathcal{T}} \boldsymbol{Q}_{x_0,x_1}\boldsymbol{Q}_{x_1,x_2}\ldots\boldsymbol{Q}_{x_{k-2},x_{k-1}}\boldsymbol{P}^{(tr)}_{x_{k-1},y} = (\boldsymbol{Q})^{k-1}\boldsymbol{P}^{(tr)}(x_0,y)$$

Les résultats sont obtenus en prenant somme en y et somme en x_0, pondéré par les poids $\boldsymbol{\beta}$. ■

Exercice 5.2 *Démontrez que*

$$\mathbb{E}N = \sum_k \mathbb{P}\{N > k\}$$

Rémarque : Ce théorème nous fournit une deuxième démonstration du Théorème 5.1 c) :

$$\mathbb{E}N = \sum_k \mathbb{P}\{N > k\} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\mathbf{1}$$

Exercice 5.3 *Soit la matrice de transition* $\left(\begin{array}{cc|c} q_1 & 0 & p_1 \\ 0 & q_2 & p_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ *et la distribution initiale* $(\beta_1, \beta_2, 0)$. *Trouvez l'espérance et la distribution de* N.

Exercice 5.4 *Soit la matrice de transition* $\left(\begin{array}{cc|c} q_1 & p_1 & 0 \\ 0 & q_2 & p_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

a) Trouvez l'espérance de N.

b) Généralisez au cas des matrices de ce type (série) de taille $K+1$.

c) Soit $N = N_1 + N_2$, *où* N_i *est le nombre de fois qu'on reste en* i. *Montrez que la distribution de* N_1 *conditionné par* N *est uniforme et calculez la distribution de* N, *si* $q_1 = q_2 = q$.

Remarque 5.2 *On peut aussi résoudre l'exercice en remarquant que* N_i *sont des variables géométriques, et donc* N *est hypergéométrique (une somme des géométriques).*

Voir aussi Ruegg, 2.6.3.

Conclusion : Les distributions de type phase demandent le calcul des puissances/exponentielles de matrices. Ces expressions sont très vite obtenues par logiciels comme Matlab, etc, et leur formule a toutes les apparences d'une expression analytique ; mais, comme pour la plupart des matrices, les valeurs propres ne sont pas accessible analytiquement, leur calcul demande en effet une évaluation numérique.

5.6 L'opérateur associé à une chaîne de Markov

L'opérateur associé (ou générateur) à une chaîne de Markov est la "matrice génératrice" $G = P - I$.

Définition 5.4 *Une matrice G satisfaisant*

1. $g_{ij} \geq 0$ *si* $i \neq j$, $g_{ii} \leq 0$ *et*
2. $g_{i,i} + \sum_{j \neq i} g_{i,j} = 0$

sera appellée **matrice génératrice***.*

Une matrice G satisfaisant 1. et $g_{i,i} + \sum_{j \neq i} g_{i,j} \leq 0$ sera appellée **sous-génératrice***.*

Exercice 5.5 *Pour une matrice (sous)stochastique arbitraire, la matrice $G = P - I$ est une matrice (sous) génératrice.*

Remarque 5.3 *Il est facile de verifier que la matrice $G = P - I$ a les mêmes vecteurs propres comme P, et que ses valeurs propres sont translatées par -1.*

Les équations de Dirichlet –voir ci dessus– concernant les chaînes de Markov en temps discret peuvent être formulées egalement en termes de P ou de G, mais l'avantage de la dernière formulation et qu'elle generalise pour le temps continu.

5.7 Une classification des quelques problèmes concernant les processus de M

Note:1) Les problèmes que nous venons de discuter concernent une chaîne de Markov avec une ou deux états absorbants. Soit Q la matrice sous-stochastique des probabilités de transition parmi les états transitiores. En mettant $G = Q - I$, et $F(S) = \mathbb{R}^S$ l'espace des fonctions definies sur l'espace des états transitoires S, les équations trouvées ici pour les fonctions $p, f, t, c, w \in F(S)$ sont :

$$\begin{aligned}(Gp)_x = 0, b_B = 1, b_0 = 0\\ (Gf)_x = 0, f_B = B, f_0 = 0\\ (Gt)_x + 1 = 0, t_B = 0, t_0 = 0\\ (Gc)_x + x = 0, c_B = 0, c_0 = 0\\ (Gw)_x + (1-a^{-1})w_x = 0, w_B = 1, w_0 = 1\end{aligned}$$

font tous intervenir le même opérateur $G = P - I : F(S) -> F(S)$.

La remarque importante resortant de ces examples est qu'une grande partie des problèmes rencontrés peuvent être classifiés comme apartenant à un nb. assez petit de types de problèmes, qui sont associés aux formes specifiques des conditions frontière et des termes inhomogènes. Cela permet, une fois que le générateur d'un processus et le type de problème ont été reconnu, une identification méchanique des équations associées – voir Corollaires 5.1, 5.2, **??**.

Nous avons analysé cette correspondance dans le cadre le plus simple des chaînes de Markov finies, et pour les types de problèmes les plus faciles à dériver et résoudre : ceux de Dirichlet, corréspondant aux **problèmes d'absorbtion**. En suite, nous examinerons cette correspondance pour des modèles plus complexes en temps continu, et avec des espace d'états dénombrable et même continu.

5.8 Exercices

1. Soit une chaîne absorbante definie par la matrice de transition $\left(\begin{array}{cc|c} p_1 & p_2 & 1-p_1-p_2 \\ 0 & p & 1-p \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
   et la distribution initiale (α_1, α_2).
   Trouvez l'esperance du nombre des pas N jusq'à l'absorbtion.
2. Pour une **marche aléatoire** $X_t,\ t = 0, 1, 2, ...$ **sur le graphe cubique** ci-dessous, calculer :
   (a) L'ésperance en sortant de U du nombre de pas T_O jusq'au noeud O. *Indication :* Utiliser la symmetrie.
   (b) Les probabilités stationnaires du chaque noeud. **Indication :** Devinez la rèponse et montrez qu'elle satisfait le système des équations d'équilibre.
   (c) L'ésperance en sortant de O du nombre de pas $\tilde{T}_O$ jusq'au premier retour à O.
   (d) La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_T = U\}$, ou $T = \min[T_U, T_O]$.
   (e) La probabilité p_k en partant de O que la marche visite U exactement k fois $(k = 0, 1, 2, ...)$ avant le premier retour à O. Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.
3. **Rélations de récurrence**. Obtenez la formule analytique des suites décrites par les relations de récurrence ci-dessous, et verifiez-les en utilisant les premiers termes de la suite t_2, t_3.

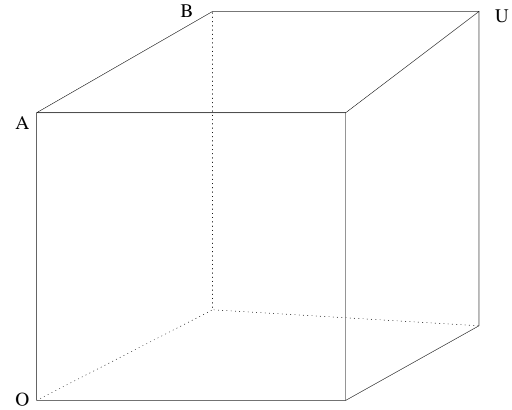


FIG. 6 – **Marche aléatoire simple**

(a) $t_i = 2t_{i-1} + i - 1, \quad t_0 = 0$ (b) $t_i = 2t_{i-1} + 5 \ \cdot 2^i, \quad t_0 = 0$
(c) $t_i = 3t_{i-1} - 2t_{i-2} + 2, \ t_0 = 0, t_1 = 2$ (d) $t_i = 2t_{i-1} - t_{i-2} + 2, \ t_0 = 0, t_1 = 2$

4. **La marche paresseuse :** Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = \pm 1]$ =p/q et $P[Z_n = 0]$ =1- p-q, avec $0 < p+q < 1$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par $\mathbb{E}_x$ l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés.

   Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\}$, $f_x = \mathbb{E}_x X_T$, $t_x = \mathbb{E}_x T$, $c_x = E_x[\sum_0^T X(t)]$ et $w_x = \mathbb{E}_x a^T$.

   Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour a) p_x, b) f_x, c) t_x, d) c_x et e) w_x, quand $p = q < 1/2$.

5. a) Une mouche saute au hasard sur les sommets d'un triangle. Donnez une formule explicite, aussi efficace que possible, pour la probabilité qu'après n étapes, la mouche soit de retour au sommet dont elle est partie.

   b) Résolvez le même problème, au cas d'une marche cyclique avec probabilités de transition $b = P(1,2), c = P(1,3), a = P(1,1) = 1-b-c$. En particulier, considérez le cas où la mouche a deux fois plus de chances à sauter dans le sens des aiguilles d'une montre.

   c) Généraliser au cas d'une marche cyclique sur les sommets d'un polygone avec k sommets, en utilisant votre language formel de choix.

6. Ruegg, 2.9 :10,5,6,14,13,11.

7. Marc et un groupe de $n-1$ amis jouent un jeu. Chacun met un euro, et ensuite lance une monnaie biaisée, avec une probabilité de sortir "face" égale à p. La totalité de l'argent est partagé également entre ceux qui ont obtenu face (s'il n'y a aucune, l'argent est donné à une oeuvre charitaire), et les piles perdent leur argent. a) Quelle est l'espérance du capital de Marc, après un tour ? b) (*) Quelle est l'espérance du capital après un tour pour un joueur choisi aléatoirement ?

8. a) Quelle est la probabilité que la marche aléatoire simple est de retour an 0 après $2n$ pas ? b) Approximer cette quantité par la formule de Stirling $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$.
c) (**) Démontrez la formule de Stirling.

5.9 Solutions

2) $X(t)$ représente une marche aléatoire simple sur le cube $[0,1]^3$, $\vec{0}$ est l'origine $(0,0,0)$, le coin oposé $(1,1,1)$ est noté par u. On remarque que dans toutes les questions les voisins de l'origine ont un role symetrique et cela nous permet de le noter par la même lettre $a = (0,0,1), \ldots.$. De la même manière on appelle les voisins de u par $b = (0,1,1), \ldots.$
a) Pour trouver $t_u = E_u[T_0]$, on résout le système :

$$t_u = 1 + t_b$$
$$t_b = 1 + \frac{2}{3}t_a + \frac{1}{3}t_u$$
$$t_a = 1 + \frac{2}{3}t_b$$

dont la solution est $t_a = 7, t_b = 9, t_u = 10$.
b) $E_0[\bar{T}_0]$ où $\bar{T}_0$ représente le temps esperé jusqu'à la prochaîne visite de 0 en commencant de 0, est donné par $1 + t_a = 1 + 7 = 8$. A remarquer que c'est exactement l'inverse de la probabilité "de long parcour" d'être à 0,ce qui est un résultat bien connu sur les temps de retours espérés.
c) $P_a[X(T) = u]$, s'obtient de la solution du système

$$p_a = \frac{2}{3}p_b$$
$$p_b = \frac{2}{3}p_a + \frac{1}{3}$$

qui est $p_b = \frac{3}{5}, p_a = \frac{2}{5}$.
d) Soit p_k la probabilité d'avoir exactement k visites à $U = (1,1,1)$ avant de retourner à 0. Alors p_0 c'est le même que la probabilité commencant en A que la marche revient à 0 avant de visiter $(1,1,1)$, qui est $\frac{3}{5}$.
Pour $k = 1$ visite, "le chemin" observé seulement en O, l'état aprés B et U" est A,U,B,0. Donc, $p_1 = P_A[U,B,0] = (\frac{2}{5})^2$, $p_2 = P_A[U,B,U,B,0] = (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})$, et en général $p_k = \frac{3}{5}p_{k-1} = (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^{k-1}, k \geq 2$. La distribution pour $k \geq 1$ est geometrique (verifiez que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{2}{5}$, comme il faut).

3) (a) C'est une équation nonhomogene, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \quad \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \quad \text{avec} \quad c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\begin{array}{rcl} \text{et alors} \qquad c_1 & = & 2c_1 + 1 \quad \text{et} \;\; c_1 = -1 \\ c_2 & = & -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et} \;\; c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i & = & -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 & = & = 0 = -1 + A \quad \text{et} \;\; A = 1 \\ t_i & = & -i - 1 + 2^i \end{array}$$

(b) C'est une équation nonhomogène, alors :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \;\; \tilde{t}_i = ci2^i \;\; \text{avec} \;\; ci2^i = 2(c(i-1)2^i/2) + 52^i$$

$$\begin{array}{rcl} \text{et alors} \qquad c & = & 5, \quad t_i = 5i2^i + A2^i \quad \text{et finalement,} \\ t_0 & = & = 0 = A \quad \text{et} \;\; A = 0 \\ t_i & = & 5i2^i \end{array}$$

(c) C'est une équation differentielle nonhomogène et l'equation quadratique attachée a les racines $1, 2$, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 2^i + A_2, \;\; \tilde{t}_i = ci \;\; \text{avec} \;\; ci = 3(ci - c) - 2(ci - 2c) + 2$$

$$\begin{array}{rcl} \text{et alors} \qquad c & = & -2 \quad \text{et} \;\; c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i & = & -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 & = & = 0 = -1 + A \quad \text{et} \;\; A = 1 \\ t_i & = & -i - 1 + 2^i \end{array}$$

(d) C'est une équation différentielle nonhomogène avec des racines confondues egales a 1 de l'equation quadratique attachée, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 + A_2 i, \;\; \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \;\; \text{avec} \;\; c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\begin{array}{rcl} \text{et alors} \qquad c_1 & = & 2c_1 + 1 \quad \text{et} \;\; c_1 = -1 \\ c_2 & = & -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et} \;\; c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i & = & -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 & = & = 0 = -1 + A \quad \text{et} \;\; A = 1 \\ t_i & = & -i - 1 + 2^i \end{array}$$

4) (a) Soit $(Gf)_x = p \; (f_{x+1} - f_x) + q \; (f_{x-1} - f_x)$ (formellement, la même expression comme dans le cas "non-paresseux", sauf que maintenant $p + q < 1$.

Les équations sont respectivement :

$$\begin{aligned}
(Gp)_x &= 0, p_K = 1, p_0 = 0 \\
(Gf)_x &= 0, f_K = K, f_0 = 0 \\
(Gt)_x + 1 &= 0, t_K = 0, t_0 = 0 \\
(Gc)_x + x &= 0, c_K = 0, c_0 = 0 \\
(Gw)_x &= (a^{-1} - 1)w_x, w_K = 1, w_0 = 1
\end{aligned}$$

Ces sont exactement les mêmes équations comme pour une marche non-paresseuse, sauf que l'opérateur est different.

(b) Pour p_x et f_x on obtient donc les mêmes équations comme pour une marche symmetrique avec $p = 1/2$, par exemple :

$$\begin{aligned}
2pp_x &= pp_{x+1} + pp_{x-1} \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \\
p_K &= 1, \quad p_0 = 00
\end{aligned}$$

et donc les mêmes réponses $p_x = \frac{x}{K}, \quad f_x = x$ Pour $t_x = E_x[T]$ (temps de sortie esperé) on trouve :

$$\begin{aligned}
t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + \frac{1}{2p} \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \\
t_K &= 0, \quad t_0 = 0
\end{aligned}$$

avec solution $t_x = \frac{x(K-x)}{2p}$.

Remarque : Le fait que les équations sont identiques pour ces deux marches (paresseuse et non-paresseuse) n'est pas une coincidence. En fait, il s'avère que les réponses obtenues sont les mêmes por n'importe quel processus Markovien homogène, si on defini l'opérateur de la façon juste. Donc, la réponse pour tous les problèmes concernant espérances va impliquer un seul opérateur G (seulement les conditions frontière et la partie non-homogène changent d'un problème à l'autre)- en fait, la famille des processus aléatoires Markoviens est isomorphe à une famille d'opérateurs déterministes.

En plus, la structure des reponses en fonction de G est la même pour toutes les processus aléatoires Markoviens, malgré leur diversité ; c'est un fait remarquable, qui démontre la puissance de ce concept.

5) a) L'équation de Chapman-Kolmogorov donne imédiatement une formule explicite : $P^n(1,1)$. On note aussi que les marches cycliques ont la matrice de transition P circulante, et donc une decomposition spectrale bien-connue explicite, qui utilise les racines (complexes) de l'unité. Mais, on peut faire mieux. La matrice P^n est aussi circulante, et contient donc seulement deux inconnues : $b_n = P^n(1,2), c_n = P^n(1,3)$. Soit $b = P(1,2), c = P(1,3), a = P(1,1) = 1-b-c$ les probabilités après un pas. On trouve la récurrence :

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} - 1/3 \\ c_{n+1} - 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & c-b \\ b-c & a-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n - 1/3 \\ c_n - 1/3 \end{pmatrix}$$

Le cas $b = c = 1/2$ et $a = b = c = 1/3$ donnent des récurences "decouplées". Le cas $b = 2/3, c = 1/3$ est plus difficile. En utilisant l'ordinateur, on rémarque que :

$$(b_n - 1/3, c_n - 1/3) = (1/3, 1/3) + 3^{-1-n/2} v_n$$

où $v_n = v_{n+12}$ est périodique.

1. a) X, le nombre total des faces a une distribution binomiale $B(n,p)$. Il y a deux possibiltés : - que Marc tire une pile et perd, dans quel cas son gain sera 0, et qu'il tire une face, dans quel cas le gain sera $Y = \frac{n}{1+X'}$ où X' a une distribution binomiale $B(n,p)$. Donc, l'espérance du gain est

$$Y = pE\frac{n}{1+X'} = p\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} = p\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} p^k q^{n-1-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-1-k} = \sum_{j=1}^{n} C_n^j p^j q^{n-j} = 1 - q^n$$

b) Le gain esperé d'un "joueur aléatoire" $Y = Y(X)$ est 0 si $X = 0$, a.p. q^n. Au cas contraire, le "joueur aléatoire" est gagnant avec probabilité $\frac{X}{n}$ et perdant avec probabilité $1 - \frac{X}{n}$. Le gain esperé est toujours $(1 - q^n)E[\frac{X}{n}\frac{n}{X}] = (1 - q^n)$.

Finalement, cet exercice suggère la question générale du calcul des "sommes binomiales", comme par exemple

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i$$

où $x = \frac{p}{q}$. Parfois, ces sommes peuvent être déduites à partir de l'identité $(1+x)^m = \sum_{i=0}^m C_m^i x^i$ en dérivant ou en intégrant. Mais, le proces d'integration n'abouti pas toujours à des sommes closes. Une somme $S_n = \sum_1^n f_n$ est une solution d'une relation de recurrence de premier ordre $S_n - S_{n-1} = f_n$ et donc la question de l'existence des formules closes pour f_n polynomes ou fonctions rationelles est un cas particulier de la question de l'existence des formules closes pour les recurrences avec coefficients polynomiaux.

Cette question est assez difficile, et le plus efficace est d'utiliser un logiciel symbolique. Ceux ci nous informent s'il y a des formules closes dans la famille relativement simple des solutions "d'Alembertiennes", ou si non.

5.10 Projet

Soit X_t une chaîne de Markov absorbante, soit ∂ l'ensemble de ses états absorbantes, soit B, A une decomposition de l'ensemble des états transitoires, et soit

$$\boldsymbol{p}(k,B) = (p_x(k,B), x \notin \partial)$$

où

$$p_x(k,B) := \mathbb{P}_x\{\text{exactement } k \text{ visites en } B \text{ avant l'absorbtion en } \partial\}, x \notin \partial$$

1. Quel type de distribution on trouve pour $p_x(k,B)$, quand $B = \{x\}$? (Specifiez les paramètres). Quel est le résultat pour la chaîne associé à : $\begin{pmatrix} 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 1-b & 0 & b & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & x_4 & 1-x_1-x_2-x_4 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $B = \{3\}$, et en particulier pour $a = b = c = 1/2, x_1 = x_2 = x_4 = 1/4$ ("le papillon").

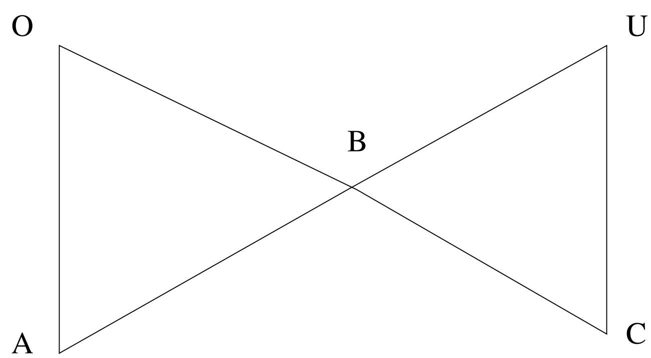


FIG. 7 – **Marche aléatoire simple sur le graphe papillon**

2. Pour B quelqonque, en conditionnant sur le premier pas, trouvez une relation entre les variables $p_x(k,B), x \in A, k \in \mathbb{N}$, et finalement une récurrence vectorielle $\boldsymbol{p}(k) = M\boldsymbol{p}(k-1)$, en spécifiant comment obtenir la matrice M à partir de la matrice P de transition de la chaîne. Vérifiez votre formule avec le cas $B = A$.
3. Retrouvez le résultat pour le "papillon généralisé" ci-dessus, dans le cas qu'on cherche la probabilité p_k en partant de $U = 5$ que la marche visite $O = 1$ exactement k fois ($k = 0, 1, 2, ...$) avant le premier retour à U) (les autres sommets seront libelés $A = 2, B = 3, C = 4$), **à partir de la formule générale**.
4. Considerez aussi le "papillon généralisé", en prenant $B = \{1, 2, 3\}$. Vérifiez pour cet exemple que la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(i,B) = 1, \forall i \in \{1, 2, 3\}$.

5. Ecrivez un program dans votre language de choix qui calcule $\boldsymbol{p}(k,B)$ et une approximation $\boldsymbol{p}(k,B) \approx c\lambda^k$ pour une chaîne et ensemble B arbitraires et démontrez sa performance sur les exemples 3.5, 3.6 (pages 23-24) et ensembles B de votre choix.

Solution :

1. Quand $|B| = 1$, on trouve une distribution geometrique $p_x(k,\{x\}) = \lambda^{k-1}(1-\lambda)$ où : $1-\lambda = p_x(1,\{x\}) = Q(x,\partial(A) + \sum_{y\in A-B} p(x,y)P_y[T_{\partial(A)} < T_x] = Q(x,\partial(A) + \sum_{y\in A-B} p(x,y)(1-P_y[T_{\partial(A)} > T_x])$, et $\lambda = Q_{B,B} + \sum_{y\in A-B} p(x,y)P_y[T_{\partial(A)} > T_x] = Q_{B,B} + Q_{B,A}(I-Q_A)^{-1}Q_{A,B}$, car pour $k \geq 2$ on a :
$$p_x(k,\{x\}) = \sum_{y\in A-B} p(x,y)P_y[T_{\partial(A)} > T_x]p_x(k-1,\{x\}) = \lambda p_x(k-1,\{x\})$$
Pour le papillon, $B = \{3\}$, $\lambda_B = x_1 + x_2 + cx_4 = 5/8$ et pour $B = \{1\}$, $\lambda_B = 3/8$.

2. Il est convenable de partager $\boldsymbol{p}_k = (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_k)$, où $\boldsymbol{b}_k = (p_x(k,B), x\in B)$, $\boldsymbol{a}_k = (p_x(k,B), x \in A, x \notin B)$. On peut supposer qu'il y a un seul état absorbant (en "collant ensemble" tous les états absorbants), et soit
$$P = \left(\begin{array}{cc|c} Q_A & Q_{A,B} & \boldsymbol{q}_A \\ Q_{B,A} & Q_B & \boldsymbol{q}_B \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
la partition de la matrice de transition contenant les états dans l'ordre $A-B, B, \partial$. On a $\boldsymbol{b}_0 = 0, \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{q}_B + Q_{B,A}\boldsymbol{a}_0$ et
$$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{q}_A + Q_A\boldsymbol{a}_0 \Longrightarrow \boldsymbol{a}_0 = (I-Q_A)^{-1}\boldsymbol{q}_A, \quad \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{q}_B + Q_{B,A}(I-Q_A)^{-1}\boldsymbol{q}_A$$
Pour $k \geq 2, x \in B$, $p_x(k,B) = \sum_{y\in A} P(x,y)p_y(k-1,B)$, et donc
$$\boldsymbol{b}_k = Q_B\boldsymbol{b}_{k-1} + Q_{B,A}\boldsymbol{a}_{k-1}$$
tant que pour $x \notin B, k \geq 1$, $p_x(k,B) = \sum_{y\in A} P(x,y)p_y(k,B)$ et donc
$$\boldsymbol{a}_k = Q_{A,B}\boldsymbol{b}_k + Q_A\boldsymbol{a}_k \Longrightarrow \boldsymbol{a}_k = (I-Q_A)^{-1}Q_{A,B}\boldsymbol{b}_k$$
Comme
$$\boldsymbol{b}_1 = (I_B - Q_B)\mathbf{1}_B - Q_{B,A}\mathbf{1}_A + Q_{B,A}(I-Q_A)^{-1}((I_A - Q_A)\mathbf{1}_A - Q_{A,B}\mathbf{1}_B) = (I_B - M)\mathbf{1}_B)$$
on trouve
$$\boldsymbol{b}_k = (Q_B + Q_{B,A}(I-Q_A)^{-1}Q_{A,B})\boldsymbol{b}_{k-1} \Longrightarrow \boldsymbol{b}_k = M^{k-1}\left((I_B - M)\mathbf{1}_B\right)$$
où $M = Q_B + Q_{B,A}(I-Q_A)^{-1}Q_{A,B}$ est la matrice de transition de la "chaîne induite" sur B (où "complement de Shur" de A en Q).
Quand $B = A$, on retrouve $\boldsymbol{b}_k = Q_B^{k-1}\boldsymbol{q}_B$.

3. En résolvant le système d'absorbtion pour p_A, p_B, p_C, on trouve $p_A = 3/4, p_B = 1/2, p_C = 1/4$. 5) Soit $p_{A,k} = \mathbb{P}_A\{\text{exactement } k \text{ visites en } U \text{ avant le retour en } O\}$, avec $p_{B,k}, p_{C,k}$ définies pareillement, et $\boldsymbol{p}_k = (p_{A,k}, p_{B,k}, p_{C,k})$.
   Ainsi, $\boldsymbol{p}_0 = (p_A, p_B, p_C)$ et $p_0 = \frac{1}{2}(p_{A,0} + p_{B,0}) = \frac{1}{2}(p_A + p_B)$.
   Pour $k \geq 1$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_k + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_{k-1} \\
\iff \boldsymbol{p}_k &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_{k-1} \\
\iff \boldsymbol{p}_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_{k-1}
\end{aligned}$$

   Les vecp à droite sont les colonnes de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & 2/3/ \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, les valp correspondantes sont : $0, 0, 5/8$ et le vecp de PF à gauche est : $(0, 3/5, 3/5)$.
   Dés lors, $\boldsymbol{p}_k = (5/8)^{k-1}(p_B + p_C) \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ et $p_k = (5/8)^{k-1}(p_B + p_C)3/10$

5.11 Exercices

1. Soit une chaîne absorbante definie par la matrice de transition $\left(\begin{array}{cc|c} p_1 & p_2 & 1 - p_1 - p_2 \\ 0 & p & 1 - p \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
   et la distribution initiale (α_1, α_2).
   Trouvez l'esperance du nombre des pas N jusq'à l'absorbtion.
2. Pour une **marche aléatoire** $X_t,\ t = 0, 1, 2, ...$ **sur le graphe cubique** ci-dessous, calculer :
   (a) L'ésperance en sortant de U du nombre de pas T_O jusq'au noeud O. *Indication :* Utiliser la symmetrie.
   (b) Les probabilités stationnaires du chaque noeud. **Indication :** Devinez la rèponse et montrez qu'elle satisfait le systême des équations d'équilibre.
   (c) L'ésperance en sortant de O du nombre de pas $\tilde{T}_O$ jusq'au premier retour à O.
   (d) La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_T = U\}$, ou $T = \min[T_U, T_O]$.
   (e) La probabilité p_k en partant de O que la marche visite U exactement k fois $(k = 0, 1, 2, ...)$ avant le premier retour à O. Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.

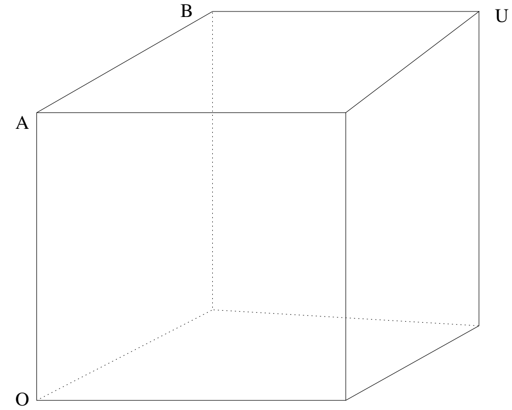


FIG. 8 – **Marche aléatoire simple**

3. **Rélations de récurrence**. Obtenez la formule analytique des suites décrites par les relations de récurrence ci-dessous, et verifiez-les en utilisant les premiers termes de la suite t_2, t_3.
   (a) $t_i = 2t_{i-1} + i - 1, \quad t_0 = 0$ (b) $t_i = 2t_{i-1} + 5 \ \cdot 2^i, \quad t_0 = 0$
   (c) $t_i = 3t_{i-1} - 2t_{i-2} + 2, \ t_0 = 0, t_1 = 2$ (d) $t_i = 2t_{i-1} - t_{i-2} + 2, \ t_0 = 0, t_1 = 2$
4. **La marche paresseuse :** Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = \pm 1]$ =p/q et $P[Z_n = 0]$ =1- p-q, avec $0 < p+q < 1$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par $\mathbb{E}_x$ l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés.

   Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\}$, $f_x = \mathbb{E}_x X_T$, $t_x = \mathbb{E}_x T$, $c_x = E_x[\sum_0^T X(t)]$ et $w_x = \mathbb{E}_x a^T$.

   Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour a) p_x, b) f_x, c) t_x, d) c_x et e) w_x, quand $p = q < 1/2$.
5. a) Une mouche saute au hasard sur les sommets d'un triangle. Donnez une formule explicite, aussi efficace que possible, pour la probabilité qu'après n étapes, la mouche soit de retour au sommet dont elle est partie.

   b) Résolvez le même problème, au cas d'une marche cyclique avec probabilités de transition $b = P(1,2), c = P(1,3), a = P(1,1) = 1 - b - c$. En particulier, considérez le cas où la mouche a deux fois plus de chances à sauter dans le sens des aiguilles d'une montre.

   c) Généraliser au cas d'une marche cyclique sur les sommets d'un polygone avec k sommets, en utilisant votre language formel de choix.
6. Ruegg, 2.9 :10,5,6,14,13,11.
7. Marc et un groupe de $n - 1$ amis jouent un jeu. Chacun met un euro, et ensuite lance une monnaie biaisée, avec une probabilité de sortir "face" égale à p. La totalité de l'argent est partagé égalemment entre ceux qui ont obtenu face (s'il n'y a aucune,

l'argent est donné à une oeuvre charitaire), et les piles perdent leur argent. a) Quelle est l'espérance du capital de Marc, après un tour ? b) (*) Quelle est l'espérance du capital après un tour pour un joueur choisi aléatoirement ?

8. a) Quelle est la probabilité que la marche aléatoire simple est de retour an 0 après $2n$ pas ? b) Approximer cette quantité par la formule de Stirling $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$.
   c) (**) Démontrez la formule de Stirling.

5.12 Solutions

2) $X(t)$ représente une marche aléatoire simple sur le cube $[0,1]^3$, $\vec{0}$ est l'origine $(0,0,0)$, le coin oposé $(1,1,1)$ est noté par u. On remarque que dans toutes les questions les voisins de l'origine ont un role symetrique et cela nous permet de le noter par la même lettre $a = (0,0,1), \ldots.$. De la même manière on appelle les voisins de u par $b = (0,1,1), \ldots.$
   a) Pour trouver $t_u = E_u[T_0]$, on résout le système :

$$\begin{aligned} t_u &= 1 + t_b \\ t_b &= 1 + \frac{2}{3}t_a + \frac{1}{3}t_u \\ t_a &= 1 + \frac{2}{3}t_b \end{aligned}$$

   dont la solution est $t_a = 7, t_b = 9, t_u = 10$.
   b) $E_0[\bar{T}_0]$ où $\bar{T}_0$ représente le temps esperé jusqu'à la prochaîne visite de 0 en commencant de 0, est donné par $1 + t_a = 1 + 7 = 8$. A remarquer que c'est exactement l'inverse de la probabilité "de long parcour" d'être à 0,ce qui est un résultat bien connu sur les temps de retours espérés.
   c) $P_a[X(T) = u]$, s'obtient de la solution du système

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{2}{3}p_b \\ p_b &= \frac{2}{3}p_a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   qui est $p_b = \frac{3}{5}, p_a = \frac{2}{5}$.
   d) Soit p_k la probabilité d'avoir exactement k visites à $U = (1,1,1)$ avant de retourner à 0. Alors p_0 c'est le même que la probabilité commencant en A que la marche revient à 0 avant de visiter $(1,1,1)$, qui est $\frac{3}{5}$.
   Pour $k = 1$ visite, "le chemin" observé seulement en O, l'état aprés B et U" est A,U,B,0. Donc, $p_1 = P_A[U,B,0] = (\frac{2}{5})^2$, $p_2 = P_A[U,B,U,B,0] = (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})$, et en général $p_k = \frac{3}{5}p_{k-1} = (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^{k-1}, k \geq 2$. La distribution pour $k \geq 1$ est geometrique (verifiez que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{2}{5}$, comme il faut).

3) (a) C'est une équation nonhomogene, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \quad \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \;\text{ avec }\; c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\begin{aligned}
\text{et alors} \qquad c_1 &= 2c_1 + 1 \quad \text{et} \;\; c_1 = -1 \\
c_2 &= -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et} \;\; c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\
\tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\
t_0 &= = 0 = -1 + A \quad \text{et} \;\; A = 1 \\
t_i &= -i - 1 + 2^i
\end{aligned}$$

(b) C'est une équation nonhomogène, alors :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \;\; \tilde{t}_i = ci2^i \;\; \text{avec} \;\; ci2^i = 2(c(i-1)2^i/2) + 52^i$$

$$\begin{aligned}
\text{et alors} \qquad c &= 5, \quad t_i = 5i2^i + A2^i \quad \text{et finalement,} \\
t_0 &= = 0 = A \quad \text{et} \;\; A = 0 \\
t_i &= 5i2^i
\end{aligned}$$

(c) C'est une équation differentielle nonhomogène et l'equation quadratique attachée a les racines $1, 2$, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 2^i + A_2, \;\; \tilde{t}_i = ci \;\; \text{avec} \;\; ci = 3(ci - c) - 2(ci - 2c) + 2$$

$$\begin{aligned}
\text{et alors} \qquad c &= -2 \quad \text{et} \;\; c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\
\tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\
t_0 &= = 0 = -1 + A \quad \text{et} \;\; A = 1 \\
t_i &= -i - 1 + 2^i
\end{aligned}$$

(d) C'est une équation différentielle nonhomogène avec des racines confondues egales a 1 de l'equation quadratique attachée, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 + A_2 i, \;\; \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \;\; \text{avec} \;\; c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\begin{aligned}
\text{et alors} \qquad c_1 &= 2c_1 + 1 \quad \text{et} \;\; c_1 = -1 \\
c_2 &= -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et} \;\; c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\
\tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\
t_0 &= = 0 = -1 + A \quad \text{et} \;\; A = 1 \\
t_i &= -i - 1 + 2^i
\end{aligned}$$

4) (a) Soit $(Gf)_x = p\ (f_{x+1} - f_x) + q\ (f_{x-1} - f_x)$ (formellement, la même expression comme dans le cas "non-paresseux", sauf que maintenant $p + q < 1$.

Les équations sont respectivement :

$$\begin{aligned}(Gp)_x = 0, p_K = 1, p_0 = 0\\ (Gf)_x = 0, f_K = K, f_0 = 0\\ (Gt)_x + 1 = 0, t_K = 0, t_0 = 0\\ (Gc)_x + x = 0, c_K = 0, c_0 = 0\\ (Gw)_x = (a^{-1} - 1)w_x, w_K = 1, w_0 = 1\end{aligned}$$

Ces sont exactement les mêmes équations comme pour une marche non-paresseuse, sauf que l'opérateur est different.

(b) Pour p_x et f_x on obtient donc les mêmes équations comme pour une marche symmetrique avec $p = 1/2$, par exemple :

$$\begin{aligned} 2pp_x &= pp_{x+1} + pp_{x-1} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1\\ p_K &= 1, \quad p_0 = 00 \end{aligned}$$

et donc les mêmes réponses $p_x = \frac{x}{K}, \quad f_x = x$ Pour $t_x = E_x[T]$ (temps de sortie esperé) on trouve :

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + \frac{1}{2p} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1\\ t_K &= 0, \quad t_0 = 0 \end{aligned}$$

avec solution $t_x = \frac{x(K-x)}{2p}$.

Remarque : Le fait que les équations sont identiques pour ces deux marches (paresseuse et non-paresseuse) n'est pas une coincidence. En fait, il s'avère que les réponses obtenues sont les mêmes por n'importe quel processus Markovien homogène, si on defini l'opérateur de la façon juste. Donc, la réponse pour tous les problèmes concernant espérances va impliquer un seul opérateur G (seulement les conditions frontière et la partie non-homogène changent d'un problème à l'autre)- en fait, la famille des processus aléatoires Markoviens est isomorphe à une famille d'opérateurs déterministes.

En plus, la structure des reponses en fonction de G est la même pour toutes les processus aléatoires Markoviens, malgré leur diversité ; c'est un fait remarquable, qui démontre la puissance de ce concept.

5) a) L'équation de Chapman-Kolmogorov donne imédiatement une formule explicite : $P^n(1,1)$. On note aussi que les marches cycliques ont la matrice de transition P circulante, et donc une decomposition spectrale bien-connue explicite, qui utilise les racines (complexes) de l'unité. Mais, on peut faire mieux. La matrice P^n est aussi circulante, et contient donc seulement deux inconnues : $b_n = P^n(1,2), c_n = P^n(1,3)$. Soit $b = P(1,2), c = P(1,3), a = P(1,1) = 1-b-c$ les probabilités après un pas. On trouve la récurrence :

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} - 1/3 \\ c_{n+1} - 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & c-b \\ b-c & a-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n - 1/3 \\ c_n - 1/3 \end{pmatrix}$$

Le cas $b = c = 1/2$ et $a = b = c = 1/3$ donnent des récurences "decouplées". Le cas $b = 2/3, c = 1/3$ est plus difficile. En utilisant l'ordinateur, on rémarque que :

$$(b_n - 1/3, c_n - 1/3) = (1/3, 1/3) + 3^{-1-n/2} v_n$$

où $v_n = v_{n+12}$ est périodique.

1. a) X, le nombre total des faces a une distribution binomiale $B(n, p)$. Il y a deux possibiltés : - que Marc tire une pile et perd, dans quel cas son gain sera 0, et qu'il tire une face, dans quel cas le gain sera $Y = \frac{n}{1+X'}$ où X' a une distribution binomiale $B(n, p)$. Donc, l'espérance du gain est

$$Y = pE\frac{n}{1+X'} = p\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} = p\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} p^k q^{n-1-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-1-k} = \sum_{j=1}^{n} C_n^j p^j q^{n-j} = 1 - q^n$$

b) Le gain esperé d'un "joueur aléatoire" $Y = Y(X)$ est 0 si $X = 0$, a.p. q^n. Au cas contraire, le "joueur aléatoire" est gagnant avec probabilité $\frac{X}{n}$ et perdant avec probabilité $1 - \frac{X}{n}$. Le gain esperé est toujours $(1 - q^n)E[\frac{X}{n}\frac{n}{X}] = (1 - q^n)$.

Finalement, cet exercice suggère la question générale du calcul des "sommes binomiales", comme par exemple

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i$$

où $x = \frac{p}{q}$. Parfois, ces sommes peuvent être déduites à partir de l'identité $(1+x)^m = \sum_{i=0}^m C_m^i x^i$ en dérivant ou en intégrant. Mais, le proces d'integration n'abouti pas toujours à des sommes closes. Une somme $S_n = \sum_1^n f_n$ est une solution d'une relation de recurrence de premier ordre $S_n - S_{n-1} = f_n$ et donc la question de l'existence des formules closes pour f_n polynomes ou fonctions rationelles est un cas particulier de la question de l'existence des formules closes pour les recurrences avec coefficients polynomiaux.

Cette question est assez difficile, et le plus efficace est d'utiliser un logiciel symbolique. Ceux ci nous informent s'il y a des formules closes dans la famille relativement simple des solutions "d'Alembertiennes", ou si non.

5.13 Projet

Soit X_t une chaîne de Markov absorbante, soit ∂ l'ensemble de ses états absorbantes, soit B, A une decomposition de l'ensemble des états transitoires, et soit

$$\boldsymbol{p}(k,B) = (p_x(k,B), x \notin \partial)$$

où

$$p_x(k,B) := \mathbb{P}_x\{\text{exactement } k \text{ visites en } B \text{ avant l'absorbtion en } \partial\}, x \notin \partial$$

1. Quel type de distribution on trouve pour $p_x(k,B)$, quand $B = \{x\}$? (Specifiez les paramètres). Quel est le résultat pour la chaîne associé à : $\begin{pmatrix} 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 1-b & 0 & b & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & x_4 & 1-x_1-x_2-x_4 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $B = \{3\}$, et en particulier pour $a = b = c = 1/2, x_1 = x_2 = x_4 = 1/4$ ("le papillon").

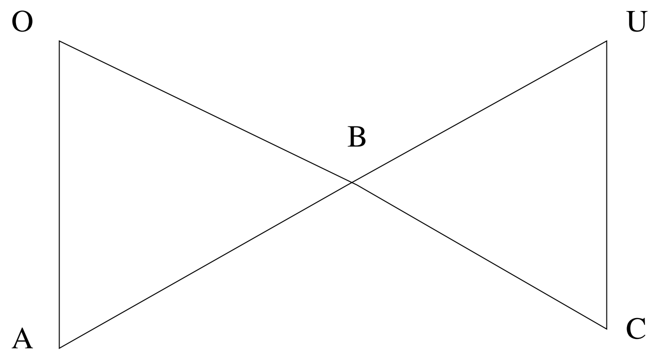


FIG. 9 – **Marche aléatoire simple sur le graphe papillon**

2. Pour B quelqonque, en conditionnant sur le premier pas, trouvez une relation entre les variables $p_x(k,B), x \in A, k \in \mathbb{N}$, et finalement une récurrence vectorielle $\boldsymbol{p}(k) = M\boldsymbol{p}(k-1)$, en spécifiant comment obtenir la matrice M à partir de la matrice P de transition de la chaîne. Vérifiez votre formule avec le cas $B = A$.
3. Retrouvez le résultat pour le "papillon généralisé" ci-dessus, dans le cas qu'on cherche la probabilité p_k en partant de $U = 5$ que la marche visite $O = 1$ exactement k fois ($k = 0, 1, 2, ...$) avant le premier retour à U) (les autres sommets seront libelés $A = 2, B = 3, C = 4$), **à partir de la formule générale**.
4. Considerez aussi le "papillon généralisé", en prenant $B = \{1,2,3\}$. Vérifiez pour cet exemple que la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(i,B) = 1, \forall i \in \{1,2,3\}$.

5. Ecrivez un program dans votre language de choix qui calcule $\boldsymbol{p}(k,B)$ et une approximation $\boldsymbol{p}(k,B) \approx c\lambda^k$ pour une chaîne et ensemble B arbitraires et démontrez sa performance sur les exemples 3.5, 3.6 (pages 23-24) et ensembles B de votre choix.

Solution :

1. Quand $|B| = 1$, on trouve une distribution geometrique $p_x(k,\{x\}) = \lambda^{k-1}(1-\lambda)$ où : $1-\lambda = p_x(1,\{x\}) = Q(x,\partial(A) + \sum_{y\in A-B} p(x,y)P_y[T_{\partial(A)} < T_x] = Q(x,\partial(A) + \sum_{y\in A-B} p(x,y)(1-P_y[T_{\partial(A)} > T_x])$, et $\lambda = Q_{B,B} + \sum_{y\in A-B} p(x,y)P_y[T_{\partial(A)} > T_x] = Q_{B,B} + Q_{B,A}(I-Q_A)^{-1}Q_{A,B}$, car pour $k \geq 2$ on a :

$$p_x(k,\{x\}) = \sum_{y\in A-B} p(x,y)P_y[T_{\partial(A)} > T_x]p_x(k-1,\{x\}) = \lambda p_x(k-1,\{x\})$$

Pour le papillon, $B = \{3\}$, $\lambda_B = x_1 + x_2 + cx_4 = 5/8$ et pour $B = \{1\}$, $\lambda_B = 3/8$.

2. Il est convenable de partager $\boldsymbol{p}_k = (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_k)$, où $\boldsymbol{b}_k = (p_x(k,B), x\in B)$, $\boldsymbol{a}_k = (p_x(k,B), x \in A, x \notin B)$. On peut supposer qu'il y a un seul état absorbant (en "collant ensemble" tous les états absorbants), et soit

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} Q_A & Q_{A,B} & \boldsymbol{q}_A \\ Q_{B,A} & Q_B & \boldsymbol{q}_B \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

la partition de la matrice de transition contenant les états dans l'ordre $A-B, B, \partial$. On a $\boldsymbol{b}_0 = 0, \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{q}_B + Q_{B,A}\boldsymbol{a}_0$ et

$$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{q}_A + Q_A\boldsymbol{a}_0 \Longrightarrow \boldsymbol{a}_0 = (I-Q_A)^{-1}\boldsymbol{q}_A, \quad \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{q}_B + Q_{B,A}(I-Q_A)^{-1}\boldsymbol{q}_A$$

Pour $k \geq 2, x \in B$, $p_x(k,B) = \sum_{y\in A} P(x,y)p_y(k-1,B)$, et donc

$$\boldsymbol{b}_k = Q_B\boldsymbol{b}_{k-1} + Q_{B,A}\boldsymbol{a}_{k-1}$$

tant que pour $x \notin B, k \geq 1$, $p_x(k,B) = \sum_{y\in A} P(x,y)p_y(k,B)$ et donc

$$\boldsymbol{a}_k = Q_{A,B}\boldsymbol{b}_k + Q_A\boldsymbol{a}_k \Longrightarrow \boldsymbol{a}_k = (I-Q_A)^{-1}Q_{A,B}\boldsymbol{b}_k$$

Comme

$$\boldsymbol{b}_1 = (I_B - Q_B)\mathbf{1}_B - Q_{B,A}\mathbf{1}_A + Q_{B,A}(I-Q_A)^{-1}((I_A-Q_A)\mathbf{1}_A - Q_{A,B}\mathbf{1}_B) = (I_B - M)\mathbf{1}_B)$$

on trouve

$$\boldsymbol{b}_k = (Q_B + Q_{B,A}(I-Q_A)^{-1}Q_{A,B})\boldsymbol{b}_{k-1} \Longrightarrow \boldsymbol{b}_k = M^{k-1}\left((I_B - M)\mathbf{1}_B\right)$$

où $M = Q_B + Q_{B,A}(I-Q_A)^{-1}Q_{A,B}$ est la matrice de transition de la "chaîne induite" sur B (où "complement de Shur" de A en Q).
Quand $B = A$, on retrouve $\boldsymbol{b}_k = Q_B^{k-1}\boldsymbol{q}_B$.

3. En résolvant le système d'absorbtion pour p_A, p_B, p_C, on trouve $p_A = 3/4, p_B = 1/2, p_C = 1/4$. 5) Soit $p_{A,k} = \mathbb{P}_A\{$exactement k visites en U avant le retour en $O\}$, avec $p_{B,k}, p_{C,k}$ définies pareillement, et $\boldsymbol{p}_k = (p_{A,k}, p_{B,k}, p_{C,k})$.
Ainsi, $\boldsymbol{p}_0 = (p_A, p_B, p_C)$ et $p_0 = \frac{1}{2}(p_{A,0} + p_{B,0}) = \frac{1}{2}(p_A + p_B)$.
Pour $k \geq 1$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_k + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_{k-1} \\
\iff \boldsymbol{p}_k &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_{k-1} \\
\iff \boldsymbol{p}_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_{k-1}
\end{aligned}$$

Les vecp à droite sont les colonnes de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & 2/3/ \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, les valp correspondantes sont : $0, 0, 5/8$ et le vecp de PF à gauche est : $(0, 3/5, 3/5)$.
Dés lors, $\boldsymbol{p}_k = (5/8)^{k-1}(p_B + p_C) \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ et $p_k = (5/8)^{k-1}(p_B + p_C)3/10$

6 Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ et relations de récurrence

Motivation : Les marches aléatoires sont parmi les modèles probabilistes les plus utiles (par exemple en physique, mathématiques financières, files d'attente, statistique, etc...). Ils sont aussi parmi les modèles les meilleurs compris, car ils permettent souvent des solutions analytiques.

6.1 Marches aléatoires sur $\mathbb{R}^d$

Définition 6.1 Marches aléatoires sur $\mathbb{R}^d$.

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles **i.i.d** *(i.e. indépendantes et de même loi), à valeurs en $\mathbb{R}^d$.*

Le processus $X_n \in \mathbb{R}^d, n = 0, 1, \ldots$ donné par la somme de ces variables

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{20}$$

s'appelle **marche aléatoire**. *Comme alternative, la marche aléatoire peut-être definie récursivement par la récurrence*

$$X_n = X_{n-1} + Z_n \tag{21}$$

Exemple 6.1 Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ *Typiquement, on s'interesse au cas où l'espace d'états est un maillage régulier comme* $\mathbb{Z}^d$, *i.e.* $X_0, Z_n \in \mathbb{Z}^d$ *ont une distribution discrète* $\boldsymbol{p} = (p_i, i \in \mathbb{Z}^d)$. *Dans ce cas, nous avons à faire à une chaîne à espace d'états dénombrable.*

Exemple 6.2 *Si en plus* $|Z_n| = 1$, *i.e.* $p_i \neq 0$ *ssi* i *est un voisin de l'origine, le processus (20) est appelé une* **marche aléatoire simple**.

Exemple 6.3 Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$ *Pour les marches sur* $\mathbb{Z}$, *la matrice de transition*

$P = (p_{ij} = \mathbb{P}\{X_n = j/X_{n-1} = i\} = \mathbb{P}\{Z_n = j - i\})_{i,j \in \mathbb{N}}$ *a aussi la propriété que* $P_{i,j} = p_{i-j}$, *où* $p_k = \mathbb{P}\{Z_n = k\}$; *les matrices de cette forme, i.e. à "diagonales" constantes, s'appellent matrices Toeplitz.*

Exemple 6.4 *Pour une marche aléatoire simple en dimension* $d = 1$, *la distribution de* Z_n *est de la forme* $p\delta_1 + (1-p)\,\delta_{-1}$, *i.e.* $P\,[Z_n = 1] = p$ *et* $P\,[Z_n = -1] = 1 - p$ *avec* $0 < p < 1$. *Si* $p = q = .5$ *on parle d'une* **marche aléatoire symmetrique**, *et avec* $p \neq q$ *on parle d'une* **marche aléatoire biaisée**.

Rq : Lire les exemples 4-6, Belisle.

Théorème 6.1 *Les marches aléatoires sur* $\mathbb{R}^d$ *ont la propriété de Markov.*

Démonstration: Ce résultat est assez facile à démontrer en général, en partant de (21), mais nous allons considérer seulement les marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$, pour rester dans le cadre des processus à espace d'états dénombrable. Dans ce cas, il est suffisant d'exhiber la matrice de transition .

Notes : 1) On a à faire ici à des sommes des v.a. i.i.d.. Donc, $P^n(0,:)$ la distribution de la somme $\sum_{i=1}^n Z_i$, est donnée par la n-ième convolution de la distribution $\boldsymbol{p}$ de Z_i (et la fonction génératrice des moments est la puissance n de la fonction génératrice des moments de $\boldsymbol{p}$). Le comportement des puissances P^n pour $n \to \infty$ est lié au théorème de la limite centrale.

2) Il y a plusieurs résultats interessants concernant l'ergodicité des chaînes à espace d'états dénombrable ; par exemple, les marches simples sur $\mathbb{Z}^d$ sont récurrents ssi $d \leq 2$.

6.2 Solutions explicites des problèmes de Dirichlet pour la marche aléatoire unidimensionnelle simple

Nous considérons maintenant un exemple unidimensionnel, dans le quel les probabilités d'absorbtion (appelées aussi fonctions harmoniques) et les solutions d'autres problèmes de Dirichlet sont disponibles explicitement.

Exemple 6.5 La ruine du joueur et autres problèmes de Dirichlet pour la marche aléatoire simple. *Nous allons étudier la marche aléatoire simple*

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, X_n \in \mathbb{Z}$$

avec (Z_n) *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi* $P[Z_n = \pm 1] = p, q$. *On considère la marche jusqu'au "temps d'arrêt/sortie"* $T = \min[T_0, T_N]$ *quand le process sort de l'interval* $[0, N]$ *pour* N *donné, i.e. on prend* 0 *et* N *comme états absorbants. On appelle ce problème* **la ruine du joueur**, *a cause de l'interpretation d'un joueur qui s'engage dans une série de parties (indépendantes) à un jeu où à l'issue de chaque partie il gagne 1F avec une probabilité* p *et perd 1F avec une probabilité* $q = 1 - p$, *et qui décide de s'arrêter de jouer dès qu'il aura* N *francs en poche, ou dès qu'il n'a plus d'argent. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on note* X_n *la fortune du joueur au bout de* n *parties, et* $X_0 = i$ *représente sa fortune à l'entrée dans le Casino. On dénotera par* $\mathbb{E}_i$ *l'esperance en commençant de* i *(conditionnant sur* $X_0 = i$*), et on designe par* E *l'événement que le joueur gagne, i.e.*

$$E = \{x_T = N\} = [\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } X_n = N, X_i > 0, i = 1, ..., n-1] .$$

Pour tout i *de* $\{0, ..., N\}$, *on pose :*

$$p_i = P(E \mid [X_0 = i]) .$$

1. *Calculer* p_0 *et* p_N .
2. *Montrer que :*

$$\forall\, i \in \{1, ..., N-1\} \ \ , p_i = p\, p_{i+1} + q\, p_{i-1} \text{ (on rappelle que } q = 1 - p).$$

3. *Obtener une expression explicite de* p_i *pour tout* i *de* $\{1, ..., N\}$. Indication : *Remarquez que la solution satisfaisant* $p_0 = 0$ *est de la forme :*

$$p_i = \begin{cases} k\,(1 - \rho^i) & \text{quand } p \neq q \\ k\, i & \text{quand } p = q \end{cases}$$

   et déterminer k *tq la condition frontière de* p_N *soit satisfaite.*

4. *Pour tout* i *de* $\{0, ..., N\}$, *on pose* $a_i = P(F \mid [X_0 = i])$ *où* F *est l'événement "le joueur repart ruiné" . En procédant comme auparavant, montrer que :*

$$a_i = \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \ si\ p \neq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{N-i}{N} \ si\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Pour tout i *de* $\{0, ..., N\}$, *calculer* $a_i + p_i$. *Que peut-on en déduire ?*

5. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du gain final* $f_i = \mathbb{E}_i X_T$. *Calculez cette fonction, (i) pour* $p = q$, *et (ii) pour* $p < q$, *quand* $N \to \infty$.
6. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du temps de jeu :* $t_i = \mathbb{E}_i T$. *Calculez cette fonction, pour* $p = q$, *et pour* $p < q$, *quand* $N \to \infty$.
7. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du "coût cumulé d'inventoire"* $c_i = \mathbb{E}_i \sum_{t=0}^{T-1} X_t$. *Calculez cette fonction, pour* $p = q$, *et pour* $p < q$, *quand* $N \to \infty$.
8. *Obtenez un système d'équations pour la fonction génératrice des probabilitées* $w_i = \mathbb{E}_i a^T = sum_{k=0} \mathbb{P}_i T = k a^k$. *Calculez cette fonction, (i) pour* $p = q$, *et (ii) pour* $p < q$, *quand* $N \to \infty$.
9. *Obtenez les équations de récurrence et les conditions frontière satisfaites* $wg_x = \mathbb{E}_x a^\tau g(X_\tau), a \in (0,1)$.

Solution : Note : Toutes les questions ci-dessous utiliseront le même opérateur

$$(Gf)_n = (P - I)(f)_n = p\, f_{n+1} + q\, f_{n-1} - f_n \tag{22}$$

la seule difference étant dans les conditions frontière et dans la partie nonhomogène.

L'idée de la méthode du **conditionnement** sur le premier pas Z_1 est d'obtenir des relations de récurrence qui lient les valeurs de l'espérance conditionnée à partir de tous les points de départ possibles.

Nous verrons en examinant les points 2)-8) de cet exercice qu'ils se regroupent en deux types de questions :

1. Gain final esperé, satisfaisant :

$$F_x = \mathbb{E}_x[g(X_T)] = pF_{x+1} + qF_{x-1}, \quad F(0) = g(0), F(N) = g(N)$$

2. Coût total accumulé esperé

$$F_x = \mathbb{E}_x[\sum_0^{T-1} h(X_i)] = h(x) + pF_{x+1} + qF_{x-1}, \quad F(0) = 0, F(N) = 0$$

1. $p_0 = 0, p_N = 1$
2. Gain final esperé, $g(x) = 1_{x=N}$.
   En conditionnant, on trouve :

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}_n[X(T) = K] \\ &= p\, \mathbb{P}_n[X(T) = K/X(1) = n+1] + q\, \mathbb{P}_n[X(T) = K/X(1) = n-1] \\ &= p\, p_{n+1} + q\ _{n-1} \quad 1 \le n \le N-1 \end{aligned}$$

car

$$\mathbb{P}_n[X(T)=K/X(1)=n\pm 1]=\mathbb{P}[X(T)=K/X(0)=n,X(1)=n\pm 1]=$$
$$\mathbb{P}[X(T)=K/X(1)=n\pm 1]=\mathbb{P}[X(T)=K/X(0)=n\pm 1]=b_{n\pm 1}$$

en utilisant la proprieté de Markov et l'homogeneité.

3. Quand $p=q=1/2$, $p_x=P_x[X(T)=N]$ satisfait :

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{p_{n+1}}{2}+\frac{p_{n-1}}{2} \quad \text{for any } 1\leq n\leq K-1 \\ p_N &= 1 \\ p_0 &= 0 \end{aligned}$$

La méthode de résolution des équations de récurrence homogènes à coefficients constants commence en cherchant des solutions de la forme $p_n=r^n$. Si les racines de l'équation auxiliaire sont distinctes, la solution générale est :

$$p_n=k_1r_1^n+k_2r_2^n+...$$

où k_1,k_2 sont déterminés en utilisant les conditions frontière.
Ici, cherchant des solutions puissances r^x ramène à l'équation $r^2-2r+1=0$ à deux racines identiques $r_{1,2}=1$. La solution générale est $p_x=A+Bx$. Les conditions frontière donnent $p_x=\frac{x}{N}$.
Solution finale si $p\neq q$: $b_n=\frac{(q/p)^n-1}{(q/p)^K-1}$.

4. $a_i+p_i=1$. La marche ne peut pas rester toujours à l'intérieur. Elle sera eventuellement absorbé dans une des deux frontiéres.

5. $f_x=E_x[X(T)]$ (valeur finale ésperée) satisfait $Gf(x)=0,f(0)=0,f(N)=N$. Pour $p=q$, la solution $f_x=x$ est obtenue comme ci-dessus :

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{f_{x+1}}{2}+\frac{f_{x-1}}{2} \quad \text{for any } 1\leq x\leq N-1 \\ f_N &= N \\ f_0 &= 0 \end{aligned}$$

(C'est aussi une fonction "harmonique", mais avec conditions frontière différentes.)

6. $t_x=E_x[T]$ (temps de sortie ésperé) est un coût total accumulé esperé (obtenu en prenant $h(x)=1$), qui satisfait le système inhomogène $Gt(x)+1=0,t(0)=0,t(N)=0$.
Pour $p=q$

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{t_{x+1}}{2}+\frac{t_{x-1}}{2}+1 \quad \text{for any } 1\leq x\leq N-1 \\ t_N &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution d'une équation nonhomogène est donnée par

$$t_x = t_p(x) + h(x)$$

où $t_p(x)$ est une solution particulière et $h(x)$ est la solution générale de l'équation homogène. Commençons par l'équation homogène.

La solution générale homogène ("fonction harmonique") $h(x) = A + Bx$ pour cet opérateur a été déjà obtenue ci-dessus.

Nous aimerions maintenant trouver une solution particulière $t_p(x)$ de l'équation $Gt_p(x) = -1$ de la même forme que la partie nonhomogène -1 de l'équation, donc $t_p(x) = C$; mais, comme les constantes, et puis aussi les fonctions linéaires vérifient l'équation homogène $Gt_p(x) = 0$, nous devrons modifier deux fois cette forme en multipliant par x, en arrivant donc à $t_(x) = Cx^2$. Comme $Gx^2 = 2x(p-q) + 1 = 1$, on trouve $C = -1$ et finalement la solution particulière $t_p(x) = -x^2$.

La solution générale est donc $t(x) = -x^2 + A + Bx$ et les conditions frontière ramènent à $t_x = x(N-x)$.

Pour $p \neq q$

$$\begin{aligned} t_x &= pt_{x+1} + qt_{x-1} + 1 \quad \text{for any } 1 \leq x \leq N-1 \\ t_N &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution generale homogène avec $p \neq q$ est $h(x) = k_1(q/p)^n + k_2$ et le terme nonhomogène 1 sugere une solution particulière constante k, mais comme ça satisfait l'équation homogène, on modifie à kn. Finalement, $k = \frac{1}{q-p}$.

La solution particulière est $t_p(x) = \frac{x}{q-p}$; elle satisfait deja $t_p(0) = 0$. La partie homogène $h(x) = t_x - t_p(x)$ devra aussi satisfaire $h(0) = 0$ et donc elle sera de la forme $h(x) = A\tilde{h}(x)$ où $\tilde{h}(x) = ((q/p)^x - 1)$.

En demandant que $t_n = \frac{n}{q-p} + A(q/p)^n - 1)$ satisfait la condition frontière $t_N = 0$ on trouve :

$$t_n = t_p(n) - t_p(N)\frac{\tilde{h}(n)}{\tilde{h}(N)} = \frac{n}{q-p} - \frac{N}{q-p}\frac{(q/p)^n - 1}{(q/p)^N - 1}.$$

La limite quand $N \to \infty$ est $t_n = \begin{cases} \infty \text{ si } p > q \\ \frac{n}{q-p} \text{ si } p < q \end{cases}$.

7. $c_x = E_x[\sum_0^T X(t)]$ (coût total d'inventaire éspéré) satisfait le système inhomogène $Gc(x) + x = 0, c(0) = 0, c(N) = 0$.

   Pour $p = q$:

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{c_{x+1}}{2} + \frac{c_{x-1}}{2} + x \quad \text{for any } 1 \leq x \leq N-1 \\ c_N &= 0 \\ c_0 &= 0 \end{aligned}$$

   La solution particulière est $\frac{-x^3}{3}$. Finalement, on arrive à $c(x) = \frac{x(K^2-x^2)}{3}$.

8. On arrive a $w(x) = A_1 z_1^x + A_2 z_2^x$, où z_i sont les racines de $pz^2 - a^{-1}z + q = 0$, et A_i satisfont $A_1 z_1^K + A_2 z_2^K = 1, A_1 + A_2 = 1$ et $w(x) = \frac{z_1^x - z_2^x + z_1^x z_2^x (z_1^{K-x} - z_2^{K-x})}{z_1^Z - z_2^K}$
   Pour $p \neq q$ la solution particulière est $c_p(x) = \frac{x^2}{2(q-p)} + \ldots$; elle satisfait deja $c_p(0) = 0$.
   La partie homogène satisfaisant $h(0) = 0$ sera toujours $h(x) = A\tilde{h}(x)$ où $\tilde{h}(x) = ((q/p)^x - 1)$.
   En demandant que $c_n = c_p(n) + A(q/p)^n - 1)$ satisfait la condition frontière $c_N = 0$ on trouve :
   $$c_n = c_p(n) - c_p(N)\frac{\tilde{h}(n)}{\tilde{h}(N)}$$
   La limite quand $N \to \infty$ est $c_n = \begin{cases} \infty \text{ si } p > q \\ c_p(n) \text{ si } p < q \end{cases}$.
9. Le conditionnement donne la relation : $w_x = \mathbb{E}_x[a^\tau g(X_\tau)] = a(pw_{x+1} + qw_{x-1})$.

Remarque : Les problèmes de cette section ont des versions à espace d'états continu, obtenu en considérant des marches avec incréments infinitésimaux ϵ, et en prenant la limite $\epsilon \to 0$. La marche aléatoire devient ainsi un processus avec chemins continus, appelé mouvement Brownien.

Conclusion : Une des idées les plus importantes de la modélisation Markovienne est son équivalence à la résolution des certaines familles d'équations (Chapman-Kolmogorov, Dirichlet, etc) liées a un operateur appellé **générateur du processus**, qui intervient dans tous les problèmes concernant le processus. Le cas qui ramène aux équations les plus faciles à résoudre est celui des équations de Dirichlet, corréspondant aux **problèmes de premier passage/absorbtion/Dirichlet**.

Les équations trouvées ici :

$$\begin{aligned} (Gp)_x = 0, p_K = 1, p_0 = 0 \\ (Gf)_x = 0, f_K = K, f_0 = 0 \\ (Gt)_x + 1 = 0, t_K = 0, t_0 = 0 \\ (Gc)_x + x = 0, c_K = 0, c_0 = 0 \\ (Gw)_x + (1 - a^{-1})w_x = 0, w_K = 1, w_0 = 1 \end{aligned}$$

auront la même forme pour des processus de Markov très différents de la marche aleatoire simple etudiée ci-dessous, vivant sur des espaces S considerablement plus compliqués, avec la seule difference que l'operateur sera remplacé par d'autres opérateurs $G : 2^S -> 2^S$.

6.3 Les fonctions harmoniques d'un couple $(A, \partial(A))$

Théorème 6.2 *Les fonctions harmoniques d'un couple $A, \partial(A)$ constituent un espace vectoriel.*

Une généralisation des probabilités d'absorbtion est le calcul des **prix finaux esperés** :

$$f_g(x) := \mathbb{E}g(X_T), \quad f_g : A- > \mathbb{R}$$

où $g_y, y \in \partial$ est un "prix" ou condition frontière donné. On vérifie par CPP (conditionnement sur le premier pas) qu'elles satisfont :

$$f(x) = g(x), x \in \partial, \quad (Gf)_x = 0 \Longleftrightarrow f_x = (Pf)_x, x \in int(A)$$

et sont donc aussi des **fonctions harmoniques**. Ces fonctions harmoniques "à conditions frontière données" sont en corréspondance biunivoques avec les conditions de frontière $g : \partial(A)- > \mathbb{R}$ et la rélation

$$f_g(x) = \sum_{y\in\partial} p_x(y)g(y) \Longleftrightarrow f_g(.) = \sum_{y\in\partial} p_.(y)g(y)$$

démontre qu'elles appartiennent à l'espace vectoriel engendré par les probabilités d'absorbtion $p_.(y), y \in \partial$. Il s'avère que cet espace contient tous les fonctions harmoniques.

Théorème 6.3 *L'espace vectoriel des fonctions harmoniques d'un couple $A, \partial(A)$ est engendré par les probabilités d'absorbtion $p_x(y)$.*

6.4 Conclusions

Un des outils les plus importants de la théorie des chaînes de Markov est l'étude des variables d'absorbtion, qui réflechissent le comportement d'une chaîne X jusqu'au temps de premier passage T dans un ensemble des états l'absorbants ∂. Cinq types des problèmes fondamentaux rencontrés sont :

1. La distribution de la position d'absorbtion X_T

   $$p_x(y) := \mathbb{P}_x\{X_T = y\}, y \in \partial(A), x \in int(A) := A - \partial(A)$$

   parmi les différents états absorbants $y \in \partial$.

   Quand x varie, ces probabilités satisfont le système

   $$p_x(y) = \delta_y(x), x \in \partial, \quad (Gp)_x = 0 \Longleftrightarrow p_x = (Pp)_x, x \in int(A)$$

   Définition 6.2 *Une fonction $f : A- > \mathbb{R}$ s'appelle harmonique sur $int(A) := A - \partial(A)$ si elle satisfait*

   $$(Gf)_x = 0 \Longleftrightarrow f_x = (Pf)_x, x \in int(A)$$

   est sont appelées (à cause de la dernière rélation).

Corollaire 6.1 *Pour chaque $y \in \partial(A)$ fixe, les probabilités d'absorbtion $p_x(y)$ sont des fonctions harmoniques en x.*

2. Les espérances des temps d'absorbtion $t_x = \mathbb{E}_x T = \mathbb{E}_x \int_0^T 1 ds, x \in \int(A)$ ou des coûts accumulés esperés :

$$c_x = \mathbb{E}_x \int_0^T h(X_s) ds$$

(le cas particulier $h(x) = 1$ rends les espérances des temps d'absorbtion t_x).
Quand x varie, ces coûts satisfont le système

$$c_x = 0, x \in \partial, \quad (Gg)_x + h(x) = 0 \Longleftrightarrow c_x = (Pc)_x + h(x), x \in int(A)$$

3. La distribution de T

$$P_x(k) = \mathbb{P}_x\{T \geq k$$

Dans le cas $k \in \mathbb{N}$, elle satisfait une recurrence simple.

4. Probabilités et coûts d'absorption "actualisés" :

$$\mathbb{E}_x e^{-rT} g(X_T), \quad \mathbb{E}_x \int_0^T e^{-rs} h(X_s) ds$$

importants dans les mathématiques financières ; ceux ci rendent en particulier la fonction génératrice de la distribution jointe de la position et du temps d'absorbtion.

5. "Autres problèmes", comme le calcul de

$$p_x(k, B) := \mathbb{P}_x\{\text{exactement } k \text{ visites en } B \text{ avant l'absorbtion en } \partial(A)\}$$

Dans ce dernier cas, nous cherchons des recurrences liant $p_x(k, B), x \in A$ à $p_x(k-1, B), x \in A$.

7 Analyse spectrale et comportement limite de chaînes de Markov

7.1 *Le théorème de Perron-Frobenius

Exercice 7.1 *Est-ce qu'il existent des matrices réeles 2×2, sans éléments négatifs, et avec des valeurs propres complexes ?*

La réponse est un cas particulier du :

Théorème 7.1 *(Perron-Frobenius) Soit P une matrice sans éléments négatifs. Alors :*

1. *Parmi les valeurs propres de module maximal il existe toujours une,* $\lambda = \lambda_{PF}$ *qui est* **réelle positive**, *qu'on apellera* **la valeur propre PF** *(de Perron-Frobenius). Dès lors, toutes les autres valeurs propres ont une valeur absolue inférièure ou égale à la valeur propre* λ_{PF}.
2. *Le bloque de Jordan correspondant à* λ_{PF} *a une structure diagonale (i.e. la multiciplité algebrique* ν_{PF} *de* λ_{PF} *est égale à la dimension de son espace de vecteurs propres), et les espaces des vecteurs propres à droite et à gauche de* λ_{PF} *contiennent chacun une base de vecteurs propres* $\boldsymbol{v}_i^{(PF)}, \boldsymbol{\pi}_i^{(PF)}, i = 1, 2, ..., \nu_{PF}$ *ayant* **toutes leurs composantes nonnégatives**.
3. *S'il y a d'autres valeurs propres égales à* λ_{PF} *en valeur absolue, elles doivent être des racines de* λ_{PF}, *i.e. de la forme* $\lambda_{PF}^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$.

Rémarque : Le théorème de PF a plusieurs implications pour l'analyse des chaînes de Markov homogènes à espace d'états **fini**. Par exemple, l'existance des valeurs propres qui sont des racines de λ_{PF} est équivalente à la presence des périodicités dans la suite des puissances $P^n, n = 1, 2, ...$

Exercice 7.2 *Démontrer qu'une matrice stochastique n'a pas de valeurs propres avec module plus grand que* 1, *et donc sa valeur propre PF est égale à* 1.

Exercice 7.3
1. *Montrez qu'une chaîne homogène à espace d'états* **fini** *a au moins une distribution stationnaire.*
2. *Montrez que la dimension de l'espace d'états des distributions stationnaires coincide avec le nb des classes de récurrence.*

7.2 Le comportement limite des chaînes, à partir de la représentation spectrale

Le comportement limite de chaînes de Markov, i.e. le calcul de

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_0 P^n := \boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{P}$$

est facile à obtenir via une approche completement algébrique, en utilisant :

1. le théorème PF. Plus precisément, le fait que 1 est la valeur propre PF pour toutes les matrices stochastiques P (exercice (7.2), et que donc dans l'absence des classes périodiques, toutes les autres valeurs propres sont strictement inférièures à 1 en valeur absolue.
2. La décomposition spectrale. Rappelons ici le cas le plus simple d'une matrice diagonalisable P, avec valeurs propres λ_i et vecteurs propres à droite/gauche $\boldsymbol{v}_i$ et $\boldsymbol{\pi}_i$, normalisés tq $\boldsymbol{\pi}_i \boldsymbol{v}_j = \delta_{i,j}$. Soit Λ la matrice diagonale des valeurs propres, V une matrice ayant v_i comme colonnes, et Π une matrice ayant π_i comme lignes.

Remarquons que la diagonalisation

$$\Lambda = V^{-1}PV = \Pi PV \Longleftrightarrow P = V\Lambda\Pi$$

nous permet aussi!!! de représenter P comme

$$P = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{\pi}_i$$

On trouve alors dans le cas diagonalisable que

$$P^n = V\Lambda^n\Pi = \sum_i \lambda_i^n \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{\pi}_i$$

et que convergence peut avoir lieu seulement dans l'absence des valeurs propres $\lambda_i \neq \lambda_{PF}$ tq $|\lambda_i| = \lambda_{PF}$ (i.e., de périodicités). Dans ce cas,

$$P^n \Longrightarrow \boldsymbol{P} \to \sum_{i:\lambda_i=1}^{\nu_{PF}} \boldsymbol{v}_i^{(PF)} \boldsymbol{\pi}_i^{(PF)} \tag{23}$$

Pareillement, dans le cas général, en utilisant la décomposition de Jordan, et le fait que les chaînes de Jordan associées à des valeurs propres tq $|\lambda_{(i)}| < 1$ disparaissent dans la limite $n \to \infty$, on obtient encore que dans l'absence des périodicités, la limite de P^n est donnée par (23). On démontre ainsi :

Théorème 7.2 *1. La limite $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ existe ssi la matrice P n'a pas des valeurs propres avec $|\lambda| = 1$ à part la valeur propre de Perron-Frobenius $\lambda_{PF} = 1$ (i.e. s'il n y a pas des périodicités), dans quel cas elle est donnée par (23).*

2. La distribution stationnaire est unique ssi la valeur propre de Perron-Frobenius $\lambda = 1$ a multiplicité 1.

3. Une chaîne de Markov est ergodique, i.e. $P^n \Longrightarrow \mathbf{1}\boldsymbol{\pi}$ ssi les deux conditions ci dessus sont verifiées.

En conclusion, l'étude de l'existence et l'unicité de distributions à la longue, et l'étude du comportement asymptotique de P^n, peuvent être abordés algébriquement.

Il convient quand même de s'intéresser aussi aux interprétations probabilistes, comme par exemple, au fait que ν_{PF} coincide avec le nombre de classes récurrentes, et nous aborderons ensuite plusieurs aspects probabilistes du théorème de Perron-Frobenius (en fait, la théorie des chaînes de Markov finies/dénombrables peut être conçue comme une explication probabiliste du théorème de Perron-Frobenius).

7.3 L'existence de la matrice des distributions à la longue $\boldsymbol{P}$

Nous attaquons maintenant la question de l'existence des distributions "à la longue" (ou simplement limites) d'une chaîne spécifiée par $\mu(0)$ et P :

$$\boldsymbol{\pi}_\infty = \lim_{n\to\infty} \mu\,(n) = \lim_{n\to\infty} \mu(0)P^n$$

pour n'importe quelle distribution initiale $\mu(0)$. Il est évident que cette question est équivalente à l'existence de la limite $\boldsymbol{P} = lim_{n\to\infty}P^n$.

On analysera maintenant, pour chaque état e_i, l'ensemble A_i de temps pour lequels il est possible de se trouver en i en partant de i, i.e.

$$A_i = \{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Remarque 7.1 *Cet ensemble est fermé sous l'opération d'addition, i.e. cet ensemble est un sous groupe de* $\mathbb{N}$.

Définition 7.1 *Soit* e_i *dans* E*. On appelle* *période de* e_i *l'entier* $d\,(i) = p\gcd\left\{n > 0\,;\, p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$ *(autrement dit :* $p_{ii}^{(n)} > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n = md\,(i)$ *).*

Si $d\,(i) = 1$ *, l'état* e_i *est dit* *apériodique.*

Remarque 7.2 *La période ne dépend que de la classe. Une classe de période 1 est dite* *apériodique.*

Remarque 7.3 *L'existence d'une boucle, i.e.* $p_{ii} > 0$*, assure l'apériodicité.*

Exemple 7.1 *Une classe de communication à matrice de transition* $\tilde{P}$*, pour laquelle il existe un entier c tel que* $\tilde{P}^c = I$*, apellée cyclique d'ordre c, est forcement périodique, et la période d est parmi les diviseurs de c. Par exemple, en changeant la classe transitoire dans l'exemple ci-dessus en sorte qu'elle contient un cycle de longueur* 4 *et un de longueur* 2*, on obtient une classe cyclique d'ordre* 4 *et période* 2*.*

L'existence de la matrice des distributions à la longue est liée à la question de la périodicité.

Exemple 7.2

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On aperçoit immédiatement la classe récurrente $6, 7$ et les classes transitoires 1 et $2, 3, 4, 5$. La dernière classe est le collage des deux cycles de période 3, ce que donne immédiatement que $A_2 = \{3k, k \geq 0\} = \{3, 6, 9, ...\}$. Si par contre un de ces cycles avait une longueur pas divisible par 3, par exemple 4, on aurait eu : $A_2 = \{3k + 4l, k, l \geq 0\} = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, ...\}$, dans quel cas A_2 contien tous les nombres en partant de 6.

On voit que les ensembles A_i contiennent toujours tous les nombres de la forme $k\, d(i)$, pour k assez grand (cela est un résultat valable pour n'importe quel semigroup de $\mathbb{N}$). En ce qui concerne la périodicité, il y a deux possibilités pour A_i, en dépendant de d=p.g.c.d de la longueur des deux cycles :

1. Dans le cas $d = 1$, cet ensemble contien "tous les nombres assez grands" (en partant d'un certain point).
2. Dans le cas $d > 1$, cet ensemble est un sous ensemble du sous groupe $d\,\mathbb{N}$. Donc, la matrice $P^{(n)} = P^n$ ne peut converger quand $n \to \infty$ (car il y aura des 0 qui alternent avec des nombres positives pour toujours : voir par exemple la marche cyclique sur $\mathbb{Z}^3$).

Remarque 7.4 *On vera que la périodicité des classes transitoires n'empêche pas du tout le calcul de la matrice de distributions à la longue, parce que la masse totale de la partie transitoire d'une chaîne converge vers 0 (voir la troisième remarque qui suit le théorème* **??***).*

Par contre, la périodicité dans une classe récurrente rend la convergence impossible. On peut démontrer que son absence assure la convergence, car cela est équivalent à l'absence des valeurs propres qui sont racines de l'unité, et à l'absence des valeurs propres de valeur absolue $|\lambda| = 1$, sauf $\lambda = 1$ (par Perron-Frobenius). Finalement, le fait que λ^n converge pour chaque valeur propre λ assure l'existence de la limite $\lim_{n\to\infty} P^n$.

Donc, la limite à la longue $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n(i, j)$ d'une chaîne existe ssi il n'y a pas des classes récurrentes périodiques.

En conclusion, dans l'exemple suivant 7.3, comme la périodicite est présente seulement dans une classe transitoire et il y a une seule classe récurrente, on peut immédiatement calculer la distribution à la longue en utilisant (24).

Exemple 7.3

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer la décomposition spectrale, en utilisant un logiciel si nécessaire.

7.4 Un exemple de chaîne non-ergodique

Nous allons examiner maintenant une chaîne non-ergodique, pour la quelle la distribution stationnaire n'est pas unique.

Exemple 7.4 Exemple de non unicité de la distribution stationaire π *: Dans l'exemple défini par la matrice ci dessous, cherchons* $\boldsymbol{\pi} \in (\mathbb{R}^+)^5$ *tel que* $\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$ *et* $\sum_{i=1}^{5} \pi_i = 1$.

$$\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi} \iff (\boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{\pi}_2 \boldsymbol{\pi}_3 \boldsymbol{\pi}_4 \boldsymbol{\pi}_5) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \pi \iff \begin{cases} \boldsymbol{\pi}_2 = 0 \\ \boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi}_3 \\ \boldsymbol{\pi}_5 = 2\boldsymbol{\pi}_4 \end{cases}$$

On voit clairement qu'il n'y a pas unicité (par exemple $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$ *et* $\left(0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ *sont des distributions stationnaires).*

Cette chaîne étale des "pathologies", qu'on peut percevoir en examinant le **graphe de communication de la chaîne** :

Remarque : afin d'apercevoir la structure de la chaîne et de calculer plus facilement P^n , il peut être intéressant de renuméroter les états en sorte que des états qui conduisent l'un à l'autre) soient groupés ensemble.

Dans cet exemple, si on échange les états e_2 et e_3, on obtient, après le rangement facilitant des éléments dans l'ordre $1, 3, 2, 4, 5$, la matrice de transition :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

à structure : $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et encore $P = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & B_{1,2} \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}$ où A, correspondant aux états $(1, 3)$ (qui conduisent l'un à l'autre) et B_2, correspondant aux états $(4, 5)$ (qui conduisent l'un à l'autre aussi) sont des matrices stochastiques, et B_1, correspondant aux transitions entre les états transitoires ((2) est une matrices sous-stochastique.

Il y'a ici deux pathologies :

1. il existe un élément "**transitoire**" 2 (qu'on peut quitter sans retour pour toujours)
2. le graph de communication se décompose en deux classes : $(1,3)$ et $(2,4,5)$ qui ne communiquent pas et la matrice de transition a une structure block diagonale, appellée "**réducibilité**" en probas.

Le fait que la réducibilité se traduise dans une structure de matrice à "bloques", montre immédiatement qu'on peut traiter $(1,3)$ et $(2,4,5)$ séparément. Aussi, en enlevant l'élément " transitoire" 2, il nous restent deux "classes de communication fermées", $(1,3)$ et $(4,5)$, appellées "**classes de récurrence**", où on reste pour toujours une fois entré.

On verifie facilement que : $P^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 & 0 \\ 0 & B_1^n & B_{1,2,(n)} \\ 0 & 0 & B_2^n \end{pmatrix}$

en reflexion du fait qu'on peut étudier les trois chaînes correspondant aux A, B_1 et B_2 séparément.

Concernant la matrice B_1 contenant les probabilités de transition entre les éléments transitoires (appellée aussi projection de la matrice P sur la réunion des classes transitoires), remarquons d'abord que elle est une matrice **sous-stochastique**.

Définition 7.2 *Une matrice Q s'appelle sous-stochastique si la somme deséléments de chaque ligne est ≤ 1, avec inegalité stricte dans au moins une ligne.*

Théorème 7.3 *Toutes les valeurs propres d'une matrice sous-stochastique Q ont valeurs absolues inferieurs à 1. Par conséquent*

$$\lim_{n\to\infty} Q^n = 0$$

i.e. **la limite des probabilités de transition entre les états transitoires est** 0.

On verifie ici que $P^n(2,2) = (1/2)^n$, en illustrant le théorème ci-dessus. En conclusion,

$$\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Il reste encore à déterminer x_1, x_2. Une approche directe par un systéme des récurrences nous montrera que ces deux quantités sont aussi $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$.

En general, ce dernier problème peut être abordé algébriquement via la décomposition spectrale, ou par une approche probabiliste qui décompose la vie d'une particule dans la partie qui précede l'absorbtion, et la partie qui s'ensuit.

Définition 7.3 *Soit i un élément transitoire d'une chaîne X_n, et soit j un élément apartenant à une classe de récurrence $\hat{j}$. On appelera* **probabilité d'absorbtion** $p_i(\hat{j})$ *la probabilité que la chaîne commençée en i finisse en $\hat{j}$.*

Le calcul des probabilités d'absorbtion sera abordé en detail plus tard.

Finalement, on arrivera à la conclusion que si la limite $\boldsymbol{P} = lim_{n\to\infty} P^n$ existe, elle satisfait :

$$\boxed{lim_{n\to\infty} P^n(i,j) = p_i(\hat{j})\ \pi(j)}$$

où on a dénoté par $p_i(\hat{j})$ la probabilité d'absorption dans la classe de récurrence de j et par $\pi(j)$ la probabilité stationnaire de j dans sa classe (qui coincide avec $lim_{n\to\infty} P^n(i,j)$ pour $i \in \hat{j}$). Ce deuxième facteur reflète le fait évident qu'une fois absorbée dans une classe fermée, la marche oubliera sa position initiale et donc aura exactement les probabilités limites de la classe.

Dans notre exemple, le fait qu'il existe une seule classe destination possible pour l'élément transitoire 2, et donc que l'absorption dans cette classe est sûre, implique $p_2(\hat{4}) = p_2(\hat{5}) = 1$. En conclusion

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Mais, si dans l'exemple 7.4 l'élément transitoire aurait eu des possibilités de passage vers les deux classes récurrentes existantes, ça nous aurait obligé de résoudre un problème d'absorbtion avant de calculer la limite $\lim_{n\to\infty} P^n$.

En conclusion, une procédure qui fournisse la limite $\boldsymbol{P}$ doit :

1. établir si elle existe, ce qui n'est pas toujours le cas, comme on voit en examinant les chaînes de Markov qui bougent cycliquement sur les noeuds d'un graphe
2. inclure la résolution des **problèmes de Dirichlet** concernant l'absorbtion de la chaîne de Markov dans les classes récurentes
3. calculer la distribution stationnaire des classes récurentes.

7.5 La structure de la matrice de distributions a la longue $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n(i,j)$

Nous donnerons maintenant une méthode pour la détermination des distributions “a la longue” d'une chaîne, dans l'absence des classes récurrentes périodiques. Soit

$$P = \begin{pmatrix} Q_t & T_1 & ... & ... & T_I \\ 0 & P_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ... & P_I \end{pmatrix}$$

une décomposition de la matrice de transition P, avec $P_i, i = 1, ..., I$ étant les projections de la matrice P sur les classes récurrentes, et avec Q_t étant la projection de la matrice P sur les classes transitoires. Il est facile de verifier que la puissance P^n est de la forme :

$$P^n = \begin{pmatrix} Q_t^n & T_{1,n} & ... & ... & T_{I,n} \\ 0 & P_1^n & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & P_2^n & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ... & P_I^n \end{pmatrix}$$

Cette formule de décomposition reflète les idées suivantes :

1. Les classes récurrentes ”ne savent” pas du tout qu'il existe un ”monde extérieur” ; par conséquent, la projection P_i de la matrice P sur une classe récurrente $\hat{i}$ est elle même une matrice stochastique et la projection de la puissance P^n sur la classe i est précisément P_i^n ; ce calcul peut être effectué en ignorant le reste des éléments. Le même est vrai pour les probabilités de transition $Q^n(i,j)$ entre i et j transitoires, i.e. la projection de la puissance P^n sur les classes transitoires est précisément Q^n et peut être donc aussi calculée en ignorant le reste des éléments.
2. Les probabilités $P^n(i,j)$ pour i,j récurrentes mais dans des classes différentes sont toujours 0 (comme pour $n = 1$) et alors la limite est aussi 0. Le même est vrai pour les probabilités $P^n(i,j)$ pour i récurrent et j transitoire.
3. La limite de Q^n sera toujours 0, parce que la matrice Q est sous-stochastique, et les limites de P_i^n seront donné par le théorème ergodique.

En conclusion, si la limite $\boldsymbol{P}$ existe, elle est de la forme :

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & X_1 & ... & ... & X_I \\ 0 & \Pi_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ... & \Pi_I \end{pmatrix}$$

où $X_1, ..., X_I$ sont encore à détérminer, cf. la lemme 7.2 ci-dessous, en résolvant un pb d'absorbtion.

Exercice 7.4 *Que devient la décomposition spectrale (23) dans le cas décomposable et sans éléments transitoires ?*

Avant le cas général, nous analyserons encore deux cas particuliers :

1. les chaînes (faiblement) ergodiques, donc avec $I = 1$ classes récurrentes
2. les chaînes absorbantes, i.e avec les classes récurrentes étant toutes de cardinalité 1.

7.5.1 La distribution limite dans le cas faiblement ergodique

Exercice 7.5 *Calculez par l'approche algébrique (donc en résolvant les équations $P\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\pi}P = \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi v} = 1$) la matrice limite $\boldsymbol{P}$ si*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & b \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Théorème 7.4 *Soit X_n une chaîne de Markov finie avec une seule classe récurrente, qui est apériodique.*

a) Cela est algébriquement équivalent à une multiplicité un pour la valeur propre $\lambda = 1$, et à l'absence des autres valeurs propres de valeur absolue $|\lambda| = 1$.

b) La distribution limite est unique et la limite $\boldsymbol{P}$ est une matrice de rang 1 :

$$\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n = \mathbf{1} \times (\mathbf{0} \quad | \boldsymbol{\pi}_\infty) \tag{24}$$

où $\boldsymbol{\pi}_\infty$ est la distribution stationnaire de la classe récurrente.

La démonstration du théorème 7.4 b) par l'approche algébrique est immédiate. En effet, prenons $\boldsymbol{v} = \mathbf{1}$. Soit $P = \begin{pmatrix} Q & T \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$ et cherchons a trouver un vecteur propre à gauche de la forme $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{p}_1)$, donc satisfaisant

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{p}_t Q = \boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{p}_t T + \boldsymbol{p}_1 P_1 = \boldsymbol{p}_1 \Longleftrightarrow \\ &\boldsymbol{p}_t = (I - Q)^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}, \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{\pi} \end{aligned}$$

En conclusion, la structure de la matrice limite $\boldsymbol{P}$ pour les chaînes faiblement ergodiques est assez simple, pareille à celle du théorème fondamental ergodique ; il suffit de trouver la distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}_\infty$ de la seule classe récurrente, et a "l'étendre" par des zeros sur les classes transitoires. En suite on utilise la formule

$$\boldsymbol{P} = \mathbf{1}\,\boldsymbol{p}$$

où $\boldsymbol{p}$ est le vecteur $\boldsymbol{\pi}_\infty$ completé avec des zeros. Rémarquons encore que $\mathbf{1}, \boldsymbol{p}$ sont des vecteurs propres à droite et gauche, normalisés tel que $\boldsymbol{p}$ est un vecteur des probabilités et tel que $< \boldsymbol{p}, \mathbf{1} >= 1$, et donc la décomposition ci-dessus est un cas particulier de la forme specifiée en (23).

7.5.2 La distribution limite dans le cas purement absorbant

Un autre cas simple est celui des chaînes qui n'ont que des états récurrents absorbants, où $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{T} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ et où $\boldsymbol{T}$ contient comme colonnes les probabilités d'absorption immédiate dans les états absorbants.

Nous savons que $\boldsymbol{P}$ est de la forme

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{X} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

En utilisant $P\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}$, on trouve explicitement, la solution est

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{P}^{(abs)}$$

qui est précisément la formule de la matrice des probailités d'absorption (pratiquement, il est plus convenable de les obtenir en résolvant le "système d'absorption" trouvé en conditionnant sur le premier pas.

Lemma 7.1 *Pour une chaîne absorbante, les probabilités limite $\boldsymbol{P}^{(abs)}_{i,j} := \boldsymbol{P}_{i,j}, \forall i$ transitoire, $\forall j$ absorbant sont égales aux probabilités d'absorption $p_i(j) = \mathbb{P}_i\{X_\tau = j\}$.*

En conclusion, on trouve que la matrice limite est

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{P}^{(abs)} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

Exercice 7.6 *Que devient la décomposition spectrale (23) et les vecteurs propres à droite et gauche de la valeur 1 dans le cas absorbant ?*

Solution : Cherchons à trouver un vecteur propre à droite $\boldsymbol{v}_j$ et un vecteur propre à gauche $\boldsymbol{\pi}_j$ pour chaque élément absorbant j.

On trouve $\boldsymbol{\pi}_j = e_j = (0, 0, ..., 1, ..., 0)$. Décomposant $\boldsymbol{v}_j = (\boldsymbol{v}_t, 0, 0, ..., 1, ..., 0)$ on trouve $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{p}_j$, où p_j sont les probabilités d'absorbtion dans la classe j.

7.5.3 La distribution limite dans le cas général

Nous considerons maintenant le cas général à plusieurs classes récurrentes. Il nous reste seulement de calculer les limites $X(i, j) := lim_{n\to\infty} P^n(i, j)$ pour i transitoire et j récurrent.

Nous avons vu dans nos exemples qu'il y a deux vecteurs de probabilités à déterminer :

a) $p_i(\hat{j})$, de finir dans la classe de récurrence de j à partir de l'élément transitoire i, et

b) $\pi(j)$ la probabilité stationnaire que la chaîne soit observée dans l'état j (ou la proportion de temps passé dans l'état j.

Pour cela, on utilisera :

Lemma 7.2

$$\boxed{lim_{n\to\infty} P^n(i, j) = p_i(\hat{j})\ \pi(j)} \tag{25}$$

où on a dénoté par $p_i(\hat{j})$ la probabilité d'absorption dans la classe de récurrence de j (et par $\pi(j)$ la probabilité stationnaire de j dans sa classe).

En forme matricielle, $X_{\hat{j}} = \boldsymbol{p}_{\hat{j}} \times \boldsymbol{\pi}_{\hat{j}}$

Cette loi multiplicative est assez claire intuitivement : elle reflète l'indépendance entre le comportement avant et après absorption, et se verifie facilement [2].

Donc, le calcul des limites $lim_{n\to\infty} P^n(i, j)$ pour i transitoire et j récurrent demande le calcul des probabilités d'absorbtion $p_i(\hat{j})$ et l'application de la lemme 7.2.

[2]En conditionnant sur la position k d'arrivée dans la classe de récurrence $\hat{j}$ de j après le temps T de transition de la partie transitoire, on trouve que :

$$lim_{n\to\infty} P^n(i, j) = \sum_{k\in\hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\}\ \ lim_{n\to\infty} P^n(k, j) \text{ (par propr. Markov)} \tag{26}$$

$$= \sum_{k\in\hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\}\ \pi(j) \text{(par ergodicité de la classe récurrente)} \tag{27}$$

$$= \pi(j) \sum_{k\in\hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\} = p_i(\hat{j})\ \pi(j) \tag{28}$$

Exemple 7.5 *Calculer la matrice* $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ *pour l'exemple :*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 1-a-b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution : Après le rangement facilitant des éléments dans l'ordre $1, 4, 6, 2, 3, 5$ la matrice de transition devient :

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1-a-b & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

On aperçoit par la structure de matrice à "bloques" qu'on peut traiter les classes (2) et $(3, 5)$ séparément. Ici, l'absorption dans les classes récurrentes se fait toujours en partant de 1, et alors les probabilités d'absorption de 4 et 6 sont identiques aux celles de 1. En plus, l'absorption se fait avec les probabilités données a, b dans les classes récurrentes (2) et $(3, 5)$, respectivement.

Finalement, on trouve par la lemme (7.2)

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} & \frac{b}{a+b}\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Le problème du calcul de $\boldsymbol{P}$ a été simplifié ci-dessus par la connaisance immédiate des probabilités d'absorption $p_i(\hat{j})$ dans chaqune des classes récurrentes.

En applications, il faudra calculer les probabilités d'absorption $p_i(\hat{j})$ séparément pour chaque classe, sauf une, en résolvant un système d'absorption correspondant, obtenu en "collant ensemble" toutes les éléments de chaque classe (pour la dernière classe, on peut obtenir les probabilités d'absorption comme complémentaires de celles dans les autres classes)

Exemple 7.6 *Calculer la matrice* $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$ *pour l'exemple :*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & b & 0 & 1-b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution : Aprés le rangement des éléments dans l'ordre $1, 4, 6, 2, 3, 5$ la matrice de transition devient :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1-b \end{pmatrix}$$

Le système d'absorption :

$$\begin{aligned} p_1(2) &= \frac{1}{3}p_4(2) + \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}0 \\ p_4(2) &= \frac{1}{2}p_4(2) + \frac{1}{2}1 \\ p_6(2) &= p_1(2) \end{aligned}$$

donne $p_1(2) = 3/5 = p_6(2)$ et $p_4(2) = 4/5$, et alors les probabilités complémentaires sont : $p_1(\hat{3}) = 2/5 = p_6(\hat{3})$ et $p_4(\hat{3}) = 1/5$ (les résultats auraient pu être dévinés, en observant que l'absorption dans les classes récurrentes se fait seulement en partant de 1 et de 4, tandis que 6 a les mêmes probabilités d'abs. que 1. Posant $\tilde{a} = \frac{a}{a+b}, \tilde{b} = \frac{b}{a+b}$ on trouve finalement :

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\tilde{b} & \frac{2}{5}\tilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\tilde{b} & \frac{1}{5}\tilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\tilde{b} & \frac{2}{5}\tilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 7.7 *Démontrer la lemme, à partir des deux équations* $P\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}P = \boldsymbol{P}$. *Que devient la décomposition (23), i.e. les vecteurs propres à droite et gauche de la valeur* 1 *dans le cas général ?*

Solution : Cherchons à trouver un vecteur propre à droite $\boldsymbol{v}^{(j)}$ et un vecteur propre à gauche $\boldsymbol{\pi}^{(j)}$ pour chaque élément absorbant j.

On trouve $\boldsymbol{\pi}^{(j)} = (0, 0, ..., \boldsymbol{\pi}_j, ..., 0)$, la distribution stationnaire de la classe j. Décomposant $\boldsymbol{v}^{(j)} = (\boldsymbol{v}_t, 0, 0, ..., 1, .., 1, 0, ..., 0)$ on trouve $\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{p}_j$, où p_j sont les probabilités d'absorbtion dans la classe j.

En travaillant en forme matricielle, on trouve les matrices de rangue 1 $X_j = \boldsymbol{p}_j \times \boldsymbol{\pi}_j$.

Conclusion : On voit que la connaissance de la structure du graphe de communication simplifie considerablement le problème du calcul de la limite $\boldsymbol{P}$.

7.6 Exercices

1. L'espace des etats d'une chaine est $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Dessinez le graphe de communication et identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrents et transitoires. Y' a-t-il des classes periodiques ?
   (b) Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.
   (c) Trouvez la limite quand $n \to$ inf de la matrice de transition apres n étapes P^n

2. Pour une **marche aléatoire** $X_t,\ t = 0, 1, 2, ...$ **sur le graphe cubique** ci-dessous, calculer :
   (a) L'ésperance en partant de U du nombre de pas T_O jusq'au coin opposé O.*Indication :* Utiliser la symmetrie.
   (b) L'ésperance en sortant de O du nombre de pas $\tilde{T}_O$ jusq'au premier retour à O.
   (c) La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_T = U\}$, ou $T = \min[T_U, T_O]$.
   (d) La probabilité p_k en partant de O que la marche visite U exactement k fois $(k = 0, 1, 2, ...)$ avant le premier retour à O. Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.
   (e) Les probabilités stationnaires du chaque noeud. **Indication :** Devinez la rèponse et montrez qu'elle satisfait le systême des équations d'équilibre.

Solution : 2) $X(t)$ représente une marche aléatoire simple sur le cube $[0, 1]^3$, $\vec{0}$ est l'origine $(0, 0, 0)$, le coin oposé $(1, 1, 1)$ est noté par u. On remarque que dans toutes les questions les voisins de l'origine ont un role symetrique et cela nous permet de le noter

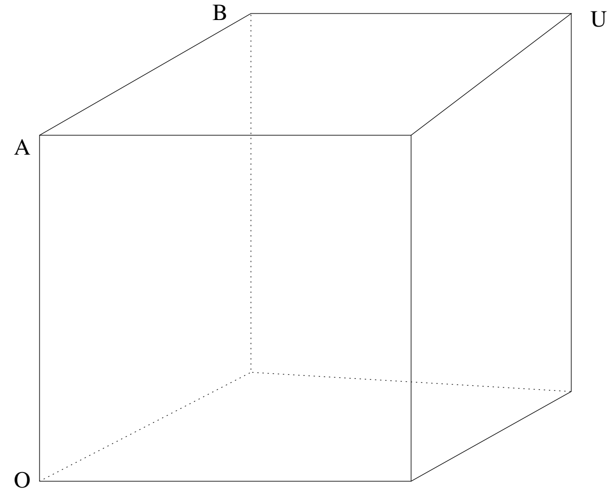


FIG. 10 – **Marche aléatoire simple**

par la même lettre $a = (0, 0, 1), \ldots.$. De la même manière on appelle les voisins de u par $b = (0, 1, 1), \ldots.$

a) Pour trouver $t_u = E_u[T_0]$, on résout le systeme :

$$t_u = 1 + t_b$$
$$t_b = 1 + \frac{2}{3}t_a + \frac{1}{3}t_u$$
$$t_a = 1 + \frac{2}{3}t_b$$

dont la solution est $t_a = 7, t_b = 9, t_u = 10$.

b) $E_0[\bar{T}_0]$ où $\bar{T}_0$ représente le temps esperé jusqu'à la prochaine visite de 0 en commencant de 0, est donné par $1 + t_a = 1 + 7 = 8$. A remarquer que c'est exactement l'inverse de la probabilité "de long parcour" d'être à 0,ce qui est un résultat bien connu sur les temps de retours espérés.

c) $P_a[X(T) = u]$, s'obtient de la solution du système

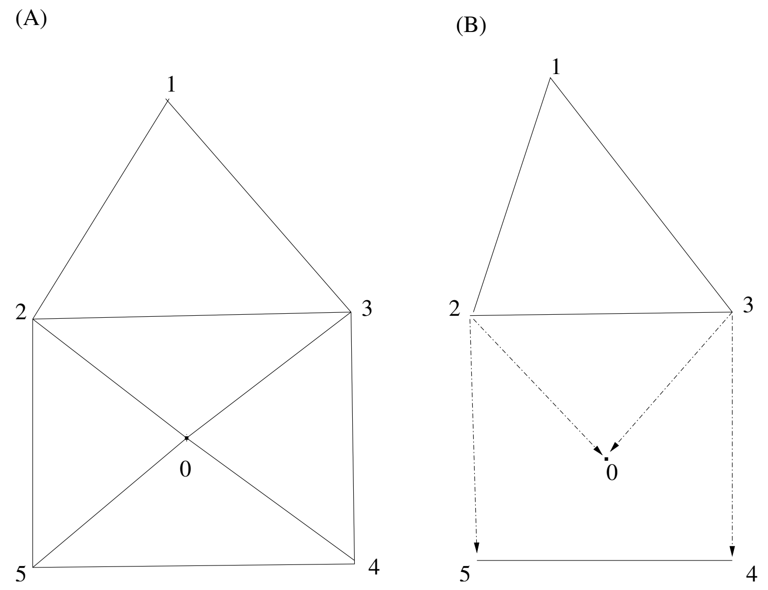
$$p_a = \frac{2}{3}p_b$$
$$p_b = \frac{2}{3}p_a + \frac{1}{3}$$

qui est $p_b = \frac{3}{5}, p_a = \frac{2}{5}$.

d) Soit p_k la probabilité d'avoir exactement k visites à $(1, 1, 1)$ avant de retourner à 0. Alors p_0 c'est le même que la probabilité commencant en a que la marche revient à 0 avant de visiter $(1,1,1)$, qui est $\frac{3}{5}$. $p_1 = (\frac{2}{5})^2$, $p_2 = (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})$, et en général $p_k = (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^{k-1}$. (verifiez que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{2}{5}$, comme il faudrait).

7.7 Exercices : TD 3

1. Considérez une particule effectuant une **marche aléatoire simple** $X_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots$ sur le graphe (A) ci-dessous : i.e. à chaque moment $t = 1, 2, \ldots$, la particule se déplace vers l'un de ses voisins sur le graphe à sa position actuelle, avec la même probabilité pour chaque choix.



   (a) Calculer :

      i. L'ésperance en sortant de 1 du nombre de pas T_0 jusq'au noeud 0. *Indication : Utiliser la symmetrie.*

      ii. L'ésperance en sortant de 0 du nombre de pas $\tilde{T}_0$ jusq'au premier retour en 0.

      iii. Les probabilités stationnaires de chaque noeud. *Indication : On peut utiliser les èquations d'équilibre detaillé.*

      iv. La probabilité $x_2 = \mathbb{P}_2\{X_T = 1\}$, où $T = \min[T_1, T_0]$.

      v. Les probabilités p_k en partant de 1 que la marche visite 0 exactement k fois $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ avant le premier retour en 1.

   (b) À un moment donné, le passage sur certaines arrêts du graphe devient impossible, ou possible seulement dans une direction, comme indiqué par des flèches dans le graphe (B). Plus précisement, la particule continue de choisir des destinations suivant le graphe (A) ("aveuglement"), mais les choix qui ne sont plus disponibles résultent dans un pas annulé, donc sur place.

      i. Donnez la matrice de transition de la marche.

      ii. Identifiez les classes de la chaîne, et classifiez les en récurrentes et transitoires. Y' a-t-il des classes périodiques ?

iii. Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.

iv. Est-ce que la limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition apres n étapes P^n existe ? Le cas écheant, trouvez-la.

Solution :

(a) i. Soit

$$t_i = \mathbb{E}_i\, T_0 = \mathbb{E}_i[\text{ nombre de pas jusq'au noeud } 0]$$

La symmetrie implique $t_2 = t_3, t_5 = t_4$, donc trois équations suffiront (au lieu de 5). En conditionnant sur le premier pas, on trouve que t_i satisfont :

$$t_1 = 1 + t_2$$
$$t_2 = 1 + \frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_2 + \frac{1}{4}t_5$$
$$t_5 = 1 + \frac{1}{3}t_5 + \frac{1}{3}t_2$$

Ça donne : $t_5 = \frac{11}{3}, t_2 = \frac{13}{3}, t_1 = \frac{16}{3}$

ii. $\mathbb{E}\tilde{T}_0 = 1 + \frac{1}{4}(t_2 + t_3 + t_4 + t_5) = 1 + \frac{12}{3} = 5\ (= \frac{1}{\pi_0})$

iii. $\pi_i = \frac{v_i}{\sum_j v_j}$ donne $(2/(2 + 4 * 3 + 3 * 2) = \frac{1}{10}, 4/20 = \frac{1}{5}, \frac{3}{20})$ (en vérifiant ainsi le théorème $\mathbb{E}\tilde{T}_0 = \frac{1}{\pi_0}$).

iv. Le système d'absorption donne : $x_2 = \frac{2}{5}, x_5 = \frac{1}{5}$.

v.

2. L'espace des états d'une chaîne est $S = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ et la matrice de transition est

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(a) Tracez le graphe de communication et identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrents et transitoires. Y' a-t-il des classes périodiques ?

(b) Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.

(c) Trouvez la limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition apres n étapes P^n

3. L'espace des états d'une chaine est $S = 1, 2, 3, 4, 5$ et la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Dessinez le graphe de communication et identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrents et transitoires. Y' a-t-il des classes periodiques ?

(b) Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.

(c) Trouvez la limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition apres n étapes P^n

4. L'espace des etats d'une chaine est $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & 0 & 1-b & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Dessinez le graphe de communication et identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrents et transitoires. Y' a-t-il des classes periodiques ?

(b) Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.

(c) Trouvez la limite quand $n \to \inf$ de la matrice de transition apres n étapes P^n

Solutions :

1. (a) La matrice de transition est :

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Classes récurrentes : (0) et $(4, 5)$. Classe transitoire, périodique : $(1, 2, 3)$.

(b) Les distributions stationnaires des classes récurrentes sont (1) et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(c) La limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition apres n étapes P^n existe. Elle est :

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_{1,0} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_{1,\hat{4}} & \frac{1}{2}b_{1,\hat{4}} \\ b_{2,0} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_{2,\hat{4}} & \frac{1}{2}b_{2,\hat{4}} \\ b_{3,0} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_{3,\hat{4}} & \frac{1}{2}b_{3,\hat{4}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

où $b_{2,0} = b_{3,0} = b_{1,0} = \frac{1}{2}$ (en résolvant le système d'absorption) et donc leurs complementaires sont aussi : $b_{1,\hat{4}} = \frac{1}{2} = b_{2,\hat{4}} = b_{3,\hat{4}}$

7.8 Controle continu

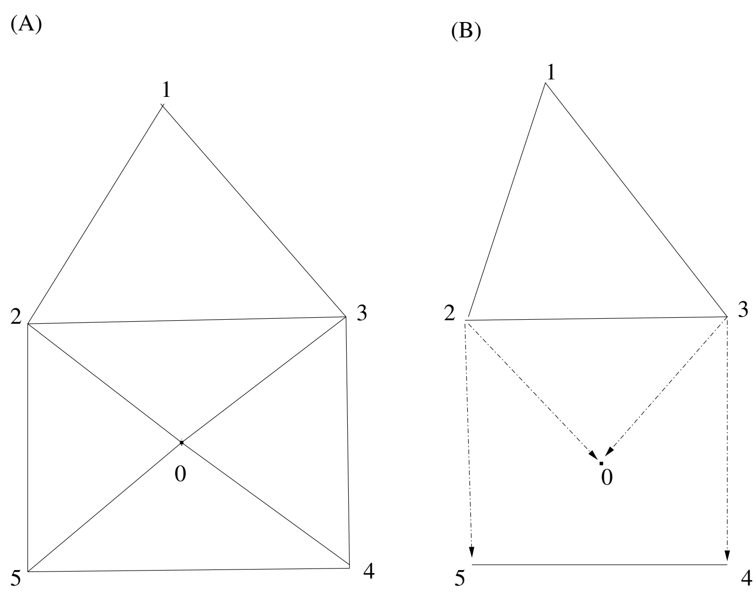
1. **La marche paresseuse :** Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = 1]$ =p, $P[Z_n = -1]$ =q et $P[Z_n = 0]$ =1- p-q, avec $0 < p + q < 1$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par $\mathbb{E}_x$ l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés.

   (a) Quelles sont les équations de récurrence et conditions frontière satisfaites par $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\}$, $f_x = E_x[X_T^2]$, $t_x = \mathbb{E}_x T$ et $c_x = E_x[\sum_0^T X_t]$?

   (b) Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $w_x = \mathbb{E}_x a^T$.

   (c) Résolvez les premières deux équations de a) dans le cas $p = q$, et les dernières deux équations de a) dans le cas $p < q, K = \infty$, en sachant que les résultats dans ce cas ne peuvent pas contenir des termes qui augmentent exponentiellement.

2. Considérez une particule effectuant une **marche aléatoire simple** $X_t,\ t = 0, 1, 2, ...$ sur le graphe (A) ci-dessous : i.e. à chaque moment $t = 1, 2, ...$, la particule se déplace vers l'un de ses voisins sur le graphe à sa position actuelle, avec la même probabilité pour chaque choix.



   (a) Calculer :

      i. L'ésperance en sortant de 0 du nombre de pas T_1 jusq'au noeud 1. *Indication :* Utiliser la symmetrie.

      ii. L'ésperance en sortant de 1 du nombre de pas $\tilde{T}_1$ jusq'au premier retour en 1.

iii. Les probabilités stationnaires de chaque noeud.

iv. Les probabilités $x_i = \mathbb{P}_i\{X_T = 1\}$, où $T = \min[T_1, T_0], i = 2, 3, 4, 5$.

v. Les probabilités p_k en partant de 2 que la marche visite 1 exactement k fois ($k = 0, 1, 2, ...$) avant le premier retour en 0.

vi. Les probabilités p_k en partant de 5 que la marche visite 1 exactement k fois ($k = 0, 1, 2, ...$) avant le premier retour en 0. Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.

(b) À un moment donné, le passage sur certaines arrêts du graphe devient impossible, ou possible seulement dans une direction, comme indiqué par des flèches dans le graphe (B). Plus précisement, la particule continue de choisir des destinations suivant le graphe (A) ("aveuglement"), mais les choix qui ne sont plus disponibles résultent dans un pas annulé, donc sur place.

i. Donnez la matrice de transition de la nouvelle marche.

ii. Identifiez les classes de la chaîne, et classifiez les en récurrentes et transitoires.

iii. Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.

iv. Est-ce que la limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition apres n étapes P^n existe ? Le cas écheant, trouvez-la.

Solution :

1. (a,b) Soit $(Gf)_x = p\ (f_{x+1} - f_x) + q\ (f_{x-1} - f_x)$ (formellement, la même expression comme dans le cas "non-paresseux", sauf que maintenant $p + q < 1$.
   Les équations sont respectivement :

$$\begin{aligned}(Gp)_x &= 0, p_K = 1, p_0 = 0\\ (Gf)_x &= 0, f_K = K^2, f_0 = 0\\ (Gt)_x + 1 &= 0, t_K = 0, t_0 = 0\\ (Gc)_x + x &= 0, c_K = 0, c_0 = 0\\ (Gw)_x + (1 - a^{-1})w_x, w_K &= 1, w_0 = 1\end{aligned}$$

   Ces sont exactement les mêmes équations comme pour une marche non-paresseuse, sauf que l'opérateur est different.

   (c) Pour p_x et f_x on obtient donc les mêmes équations comme pour une marche symmetrique avec $p = 1/2$, par exemple :

$$\begin{aligned}2pp_x &= pp_{x+1} + pp_{x-1} \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1\\ p_K &= 1, \quad p_0 = 00\end{aligned}$$

   et donc les mêmes réponses $p_x = \frac{x}{K}, \quad f_x = K^2 \frac{x}{K} = xK$.
   Pour $t_x = E_x[T]$ (temps de sortie esperé) on trouve :

$$\begin{aligned}0 &= pt_{x+1} - (p+q)t_x + qt_{x-1} + 1 \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1\\ t_K &= 0, \quad t_0 = 0\end{aligned}$$

Soit $t_0(x)=\frac{x}{q-p}$ une solution particulière qui satisfait $t_0(0)=0$. La solution est $t_x=t_0(x)-t_0(K)\frac{h(x)}{h(K)}$ où $h(x)=1-(q/p)^x$ est une solution homogène satisfaisant $h(0)=0$. Pour $K=\infty, q>p$ on obtient $t(x)=t_0(x)$.

Pour c_x on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= pc_{x+1}-(p+q)c_x+qc_{x-1}+x \quad \text{for any } 1\leq x\leq K-1 \\ c_K &= 0, \quad c_0=0 \end{aligned}$$

Soit $c_0(x)=\frac{x^2}{2(q-p)}+\frac{x(q+p)}{2(q-p)^2}$ une solution particulière qui satisfait $c_0(0)=0$. La solution est

$c_x=c_0(x)-c_0(K)\frac{h(x)}{h(K)}$ où $h(x)=1-(q/p)^x$ est une solution homogène satisfaisant $h(0)=0$. Pour $K=\infty, q>p$ on obtient $c(x)=c_0(x)$.

2. (a) Soit

$$t_i=\mathbb{E}_i\, T_1=\mathbb{E}_i[\text{ nombre de pas jusq'au noeud 1}]$$

La symmetrie implique $t_2=t_3, t_5=t_4$, donc trois équations suffiront (au lieu de 5). En conditionnant sur le premier pas, on trouve que t_i satisfont :

$$\begin{aligned} t_0 &= 1+\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2}t_5 \\ t_2 &= 1+\frac{1}{4}t_2+\frac{1}{4}t_0+\frac{1}{4}t_5 \\ t_5 &= 1+\frac{1}{3}t_5+\frac{1}{3}t_2+\frac{1}{3}t_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_0 &- \frac{1}{2}t_2-\frac{1}{2}t_5=1 \\ -\frac{1}{4}t_0 &+ \frac{3}{4}t_2-\frac{1}{4}t_5=1 \\ -\frac{1}{3}t_0 &- \frac{1}{3}t_2+\frac{2}{3}t_5=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_0 &- \frac{1}{2}t_2-\frac{1}{2}t_5=1 \\ -t_0 &+ 3t_2-t_5=4 \\ -t_0 &- t_2+2t_5=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_0 &- \frac{1}{2}t_2-\frac{1}{2}t_5=1 \\ 0 &+ \frac{5}{2}t_2-\frac{3}{2}t_5=5 \\ 0 &- \frac{3}{2}t_2+\frac{3}{2}t_5=4 \end{aligned}$$

Ça donne : $t_5=t_2+\frac{8}{3}, t_2=9, t_5=\frac{35}{3}, t_0=\frac{34}{3}$.

(b) $\mathbb{E}\tilde{T}_1 = 1 + t_2 = 10\ (= \frac{1}{\pi_1})$

(c) La distribution stationnaire (obtenue en utilisant les èquations d'équilibre detaillé) donne $\pi_i = \frac{v_i}{\sum_j v_j}$ et donc $\pi_1 = (2/(2+4*3+3*2) = \frac{1}{10}, \pi_0 = 4/20 = \frac{1}{5}, \pi_5 = \frac{3}{20})$ (en vérifiant ainsi le théorème $\mathbb{E}\tilde{T}_1 = \frac{1}{\pi_1}$).

(d) Le système d'absorption donne : $x_2 = \frac{2}{5}, x_5 = \frac{1}{5}$.

(e) Soit p_k la probabilité d'avoir exactement k visites à 1 avant de visiter 0, à partir de 2. Alors p_0 c'est la probabilité commençant en 2 que la marche visite 0 avant de visiter 1, qui est $\frac{3}{5}$, et pour $k \geq 1$, $p_k = \frac{2}{5})p_{k-1}$, et $p_k = \frac{3}{5}\ (\frac{2}{5})^{k-1}$, donc une distribution geometrique.

(f) Soit p_k la probabilité d'avoir exactement k visites à 1 avant de visiter 0, à partir de 5. Alors, p_0 c'est la probabilité commençant en 5 que la marche visite 0 avant de visiter 1, qui est $\frac{4}{5}$.
Pour $k = 1$ visite, "le chemin" observé seulement en O, 1 et l'état aprés 1" est 5,1,2,0. Donc, $p_1 = P_5[1,2,0] = \frac{1}{5}\frac{3}{5}$, $p_2 = P_5[1,2,1,0] = \frac{1}{5}\frac{2}{5}\frac{3}{5}$, et en général $p_k = \frac{2}{5}p_{k-1} = (\frac{1}{5}\frac{3}{5})(\frac{2}{5})^{k-1}, k \geq 1$. La distribution pour $k \geq 1$ est geometrique, et $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{1}{5}$, comme il faut.

3. (a) En numerotant $1,2,3,4,5,0$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La limite est

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. a) Une mouche effectue une marche cyclique sur les sommets $\{1,2,3\}$ d'un triangle, avec matrice de transition "circulante"

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \geq 0$ et $a + b + c = 1$. Il est facile de verifier que la matrice de transition P^n est aussi "circulante" (i.e. chaque ligne est déduite de la ligne précédente par une permutation cyclique de ses éléments vers la droite) et on dénote par (a_n, b_n, c_n) les éléments de sa première ligne.

(a) Quelles sont les valeurs limites de (a_n, b_n, c_n) quand $n \to \infty$?

(b) On cherche une formule explicite, aussi simple que possible, pour la probabilité $a_n = P^n(1,1)$ qu'après n étapes, la mouche soit retournée au sommet 1 d'où elle est partie. Soit $v_n = (b_n, c_n)$. Trouvez une récurrence pour le vecteur v_n.

(c) Résolvez cette récurrence et trouvez a_n, au cas $a = b = c = 1/3$ et au cas $b = c = 1/2$.

(d) Résolvez la récurrence, au cas où la mouche a deux fois plus de chances de sauter dans le sens des aiguilles d'une montre, i.e. $b = 2/3, c = 1/3$.

5. La matrice P^n est aussi circulante, et contient donc seulement deux inconnues : $b_n = P^n(1,2), c_n = P^n(1,3)$. Soit $b = P(1,2), c = P(1,3), a = P(1,1) = 1 - b - c$ les probabilités après un pas. On trouve la récurrence :

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} - 1/3 \\ c_{n+1} - 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & c-b \\ b-c & a-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n - 1/3 \\ c_n - 1/3 \end{pmatrix}$$

Le cas $b = c = 1/2$ et $a = b = c = 1/3$ donnent des récurences "decouplées". Le cas $b = 2/3, c = 1/3$ est plus difficile. En utilisant l'ordinateur, on rémarque que :

$$(b_n - 1/3, c_n - 1/3) = (1/3, 1/3) + 3^{-1-n/2} v_n$$

où $v_n = v_{n+12}$ est périodique.

8 Examens d'entraînement

8.1 Examen d'entraînement 1.

1. L'espace des états d'une chaîne est $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 & 0 & 1-a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(a) Tracez le graphe de communication et identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrentes et transitoires. Y' a-t-il des classes périodiques ?

(b) Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.

(c) Trouvez la limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition apres n étapes P^n

2. Pour une **marche aléatoire** $X_t,\ t = 0, 1, 2, ...$ **sur le graphe cubique** ci-dessous, calculer :

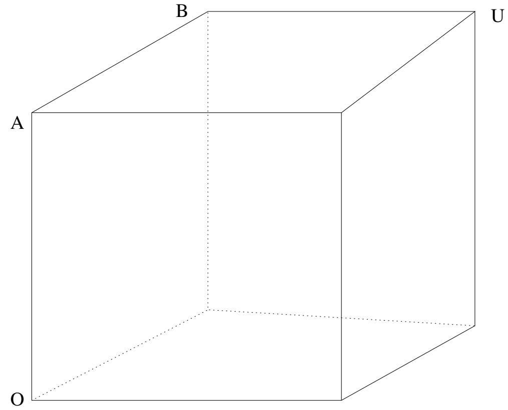


FIG. 11 – **Marche aléatoire simple**

(a) L'ésperance en sortant de U du nombre de pas T_O jusq'au noeud O. *Indication :* Utiliser la symmetrie.

(b) Les probabilités stationnaires du chaque noeud.

(c) L'ésperance en sortant de O du nombre de pas $\tilde{T}_O$ jusq'au premier retour à O.

(d) La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_T = U\}$, ou $T = \min[T_U, T_O]$.

(e) La probabilité p_k en partant de O que la marche visite U exactement k fois ($k = 0, 1, 2, ...$) avant le premier retour à O. Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $\{1, 2\}$, de distribution initiale $\boldsymbol{\mu}_0 = (p, 1-p)$ et de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$

   (a) Calculez $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2\}$, $\boldsymbol{\mu}_1(2) = \mathbb{P}\{X_1 = 2\}$ $\mathbb{P}\{X_0 = 2|X_1 = 2\}$, et $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 1, X_4 = 2\}$.

   (b) Trouvez toutes les lois stationnaires $\boldsymbol{\pi}$ de la chaîne donnée (s'il y en a plus d'une seule). Spécifiez, en justifiant, si la limite $lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}_0 P^n$ existe pour la chaîne donnée. Si c'est le cas, quelles sont les limites $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{X_n = 2\}$, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{X_n = 2, X_{n+1} = 2\}$ et $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{X_n = 2|X_{n+1} = 2\}$?

   (c) Étant donné des coûts de stockage per unité de temps $h(1), h(2)$, calculez le coût moyen stationnaire

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}\ n^{-1}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)$$

   ou $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}$ denote l'espérance avec distribution initiale de X_0 egale à $\boldsymbol{\pi}$.

Soit $Y_i, i = 1, ...$, une suite des lancées de dé indépendantes. Déterminer dans les exemples suivantes si la suite X_n est Markov, en donnant (si possible) la matrice de transition et le graph de communication. Classifier les classes en récurrents et transitoires et calculer si possible la limite $\boldsymbol{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$

(a) Le maximum de résultats $X_n = \max_{1\le i\le n} Y_i$

(b) Le nombre cumulatif de non 6, aprés le temps n, jusqu'au prochaîne 6.

(c) $X_n = Y_n + Y_{n-1}$

(d) $X_n = Max_{1\leq i\leq n} S_i$, ou $S_i = \sum_{k=1}^{i} Y_i$ et

(e) $X_n = S_1 + S_2 + ... + S_n$

Solutions :

1. (a) Classes récurrentes : (1) et $(6,7)$. Classe transitoire, nonpériodique : $(2,3,4,5)$.

   (b) Les distribution stationnaire des classes récurrentes sont (1) et $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

   (c) La limite quand $n \to \infty$ de la matrice de transition apres n étapes P^n est

$$P_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_{2,6} & \frac{2}{3}b_{2,6} \\ b_{3,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_{3,6} & \frac{2}{3}b_{3,6} \\ b_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_{2,6} & \frac{2}{3}b_{2,6} \\ b_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_{2,6} & \frac{2}{3}b_{2,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

   où $b_{2,1} = \frac{2a}{2-b}$, $b_{3,1} = \frac{a}{2-b}$ et $b_{2,6} = 1 - b_{2,1}$, $b_{3,6} = 1 - b_{3,1}$.

3) (a)

$$(1-p)(1-b)$$

$$(1-p)(1-b) + p\,a$$

$$\frac{(1-p)(1-b)}{(1-p)(1-b) + p\,a}$$

(b) Loi stationnaire : $(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$

$$\frac{a}{a+b}$$

$$\frac{a}{a+b}(1-b)$$

$$1-b$$

(c)

$$\frac{b}{a+b}h(1) + \frac{a}{a+b}h(2)$$

8.2 Examen d'entraînement 2

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $\{1,2\}$, de distribution initiale $\boldsymbol{\mu}_0 = (1/5, 4/5)$ et de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

   (a) Calculez $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2\}$, $\boldsymbol{\mu}_1(1) = \mathbb{P}\{X_1 = 2\}$ et $\mathbb{P}\{X_0 = 2|X_1 = 2\}$.

   (b) Démontrez que si la limite $\boldsymbol{\mu} = lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}_0 P^n$ existe, elle doit etre une distribution stationnaire, i.e. elle doit satisfaire léquation $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} P$.

   (c) Trouvez toutes les lois stationnaires $\boldsymbol{\pi}$ de la chaîne donnée (s'il y en a plus d'une seule). Spécifiez, en justifiant, si la limite $lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}_0 P^n$ existe pour la chaîne donnée. Si c'est le cas, quelles sont les limites $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2\}$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2, X_{n+1} = 2\}$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2|X_{n+1} = 2\}$?

   (d) Étant donné un coût de stockage per unité de temps $h(1) = 0, h(2) = 3$, calculez le coût moyen stationnaire
   $$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}\, n^{-1} \sum_{i=1}^{n} h(X_i)$$
   ou $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}$ denote l'espérance avec distribution initiale de X_0 egale à $\boldsymbol{\pi}$.

Solution :

(a)
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2\} &= \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6} = \frac{2}{3} \\
\mathbb{P}\{X_1 = 2\} &= \frac{20}{30} + \frac{2}{30} = \frac{22}{30} \\
\mathbb{P}\{X_0 = 2|X_1 = 2\} &= \frac{2}{3}/\frac{22}{30} = \frac{10}{11}
\end{aligned}$$

(b)

(c) Un calcul imediat montre que le vecteur propre a gauche de P, i.e. la loi stationnaire, est unique $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. La limite $lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}_0 P^n$ existe parce que la chaîne est apériodique ; par consequent, elle est egale a $\boldsymbol{\pi}$.
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2\} &= \frac{2}{3} \\
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2, X_{n+1} = 2\} &= \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{10}{30} \\
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2|X_{n+1} = 2\} &= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

(d)
$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}\, n^{-1} \sum_{i=1}^{n} h(X_i) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}} h(X_1) = 3\boldsymbol{\pi}(2) = 2$$
ou $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}$ denote l'espérance avec distribution initiale de X_0 egale à $\boldsymbol{\pi}$.

2. Une agence de notation de titres évalue les différentes entreprises chaque trimèstre ; les notations sont, en ordre decroissante de mérite A, B, C et D (défaut). Les donnés historiques suggérent qu'on peut modéliser l'évaluation de crédit d'une entreprise typique par une chaîne de Markov avec matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha-\alpha^2 & \alpha^2 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1-2\alpha-\alpha^2 & \alpha^2 \\ 1-2\alpha-\alpha^2 & \alpha & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre qui dépend de l'entreprise.

(a) Trouvez les limites des valeurs de α pour lesquelles la matrice P est une matrice de transition valable (i.e. "stochastique").

(b) Tracez le graph de communication de la chaîne. Identifiez les classes de communication et classifiez-les en récurrents et transitoires, périodiques ou pas. Spécifier s'il y a des valeurs de α pour lesquelles la structure est differente.

(c) Trouvez toutes les lois stationnaires $\boldsymbol{\pi}$ de cette chaîne, dans tous les cas trouvés ci dessus.

Solution :

(a) All transition probabilities must lie in $[0,1]$. Now $1-2\alpha-\alpha^2 \leq 1-\alpha-\alpha^2 \leq 1$ for $\alpha \geq 0$, so it suffices to ensure that $1-2\alpha-\alpha^2 \geq 0$ i.e. $\alpha \leq \sqrt{2}-1$. So the range of possible values of α is $[0, \sqrt{2}-1]$.

(b) Pour $\alpha > 0$, la chaîne a une classe transiente (A, B, C) et une classe absorbante D, et est apériodique by inspection. Pour $\alpha = 0$, nous avons deux classes reccurrentes, la première périodique.

(c) A stationary probability distribution, if it exists must obey

$$\begin{aligned} \alpha\pi_A + \alpha\pi_B + (1-2\alpha-\alpha^2)\pi_C &= \pi_A \\ (1-\alpha-\alpha^2)\pi_A + \alpha\pi_B + \alpha\pi_C &= \pi_B \\ \alpha^2\pi_A + (1-2\alpha-\alpha^2)\pi_B + \alpha\pi_C &= \pi_C \\ \alpha^2\pi_B + \alpha^2\pi_C + \pi_D &= \pi_D \end{aligned}.$$

Pour $\alpha > 0$, la dernière équation implies $\pi_B = \pi_C = 0$, and this in turn shows that $\pi_A = 0$. Hence the stationary probability distribution is $\pi = (0,0,0,1)^T$.
It is unique : there is just one recurrent class and it is apériodique.

3. Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = \pm 1]$ =p et $P[Z_n = 0]$ =1- 2 p, avec $0 < p < 1/2$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par $\mathbb{E}_x$ l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés.

(a) Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\}$, $t_x = \mathbb{E}_x T$, et $f_x = \mathbb{E}_x X_T$ *Indication :* Conditionez sur le premier pas Z_1

(b) Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour p_x, t_x et f_x dans le cas $p = q = 1/2$.

Solution :

(a) Pour p_x et f_x on obtient les mêmes équations comme pour une marche symmetrique avec $p = 1/2$, (ca veut dire qu'on arrive a manipuler l'équation de reccurence a la même forme). Par exemple, p_x satisfait :

$$\begin{aligned} 2pp_x &= pp_{x+1} + pp_{x-1} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ p_K &= 1 \\ p_0 &= 0 \end{aligned}$$

$t_x = E_x[T]$ (temps de sortie esperé) satisfait

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + \frac{1}{2p} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ t_K &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

(b) On trouve

$$t_x = \frac{x(K-x)}{2p}, \quad p_x = \frac{x}{K}, \quad f_x = x$$

4. Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ une chaîne de Markov en temps continu sur l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$. Supposons que la matrice infinitésimale (de taux de transitions) de X est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Donnez les probabilités de transition infinitesimales $\mathbb{P}_i\{X_{dt} = j\}$ de la chaîne, en sachant que l'état initial est $i = 2$. Quelles sont les probabilités de transition de la chaîne au moment du premier saut, en sachant que l'état initial est $i = 2$?

(b) Quelle est la loi conditionelle de $U = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 2\}$, en sachant que $X_0 = 2$?

(c) Posant $V = \inf\{t \geq U : X_t = 2\}$, calculez $\mathbb{E}[V | X_0 = 2]$

Solution :

(a) Les probabilités de transition infinitesimales en sachant que l'état initial et $i = 2$ sont $P_{2,1}(dt) = dt, P_{2,3}(dt) = 2dt, P_{2,2}(dt) = 1 - 3dt$. Les probabilités de transition au moment du premier saut sont : $P_{2,1} = \frac{1}{3}, P_{2,3} = \frac{1}{3}, P_{2,2} = 0$.

(b) La loi conditionelle de $U = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 2\}$, en sachant que $X_0 = 2$, est $Expo(2)$.

(c) Posant $V = \inf\{t \geq U : X_t = 2\}$, nous avons

$$\mathbb{E}[V|X_0 = 2] = \mathbb{E}U + \mathbb{E}(V - U) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3$$

ou x_i, les éspérances du temps jusqu'on arrive en 2, en sachant que $X_0 = i$, satisfont le système :

$$x_1 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_3$$
$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1$$

De lors, $x_1 = \frac{5}{7}, x_3 = \frac{6}{7}$. et $\mathbb{E}[V|X_0 = 2] = \frac{8}{7}$

9 Examen d'entraînement

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $\{1,2\}$, de distribution initiale $\boldsymbol{\mu}_0 = (1/5, 4/5)$ et de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

   (a) Calculez $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2\}$, $\boldsymbol{\mu}_1(1) = \mathbb{P}\{X_1 = 2\}$ et $\mathbb{P}\{X_0 = 2|X_1 = 2\}$.

   (b) Démontrez que si la limite $\boldsymbol{\mu} = lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}_0 P^n$ existe, elle doit etre une distribution stationnaire, i.e. elle doit satisfaire léquation $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}P$.

   (c) Trouvez toutes les lois stationnaires $\boldsymbol{\pi}$ de la chaîne donnée (s'il y en a plus d'une seule). Spécifiez, en justifiant, si la limite $lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}_0 P^n$ existe pour la chaîne donnée. Si c'est le cas, quelles sont les limites $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{X_n = 2\}$, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{X_n = 2, X_{n+1} = 2\}$ et $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{X_n = 2|X_{n+1} = 2\}$?

   (d) Étant donné un coût de stockage per unité de temps $h(1) = 0, h(2) = 3$, calculez le coût moyen stationnaire

   $$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}\, n^{-1}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)$$

   ou $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}$ denote l'espérance avec distribution initiale de X_0 egale à $\boldsymbol{\pi}$.

   Solution :

   (a)

   $$\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2\} = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6} = \frac{2}{3}$$
   $$\mathbb{P}\{X_1 = 2\} = \frac{20}{30} + \frac{2}{30} = \frac{22}{30}$$
   $$\mathbb{P}\{X_0 = 2|X_1 = 2\} = \frac{2}{3}/\frac{22}{30} = \frac{10}{11}$$

(b)

(c) Un calcul imediat montre que le vecteur propre a gauche de P, i.e. la loi stationnaire, est unique $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. La limite $lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}_0 P^n$ existe parce que la chaîne est apériodique ; par consequent, elle est egale a $\boldsymbol{\pi}$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2\} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2, X_{n+1} = 2\} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{10}{30}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2 | X_{n+1} = 2\} = \frac{5}{6}$$

(d)

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}\, n^{-1} \sum_{i=1}^{n} h(X_i) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}} h(X_1) = 3\boldsymbol{\pi}(2) = 2$$

ou $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}}$ denote l'espérance avec distribution initiale de X_0 egale à $\boldsymbol{\pi}$.

2. Une agence de notation de titres évalue les différentes entreprises chaque trimèstre ; les notations sont, en ordre decroissante de mérite A, B, C et D (défaut). Les donnés historiques suggérent qu'on peut modéliser l'évaluation de crédit d'une entreprise typique par une chaîne de Markov avec matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha-\alpha^2 & \alpha^2 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1-2\alpha-\alpha^2 & \alpha^2 \\ 1-2\alpha-\alpha^2 & \alpha & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un paramètre qui dépend de l'entreprise.

(a) Trouvez les limites des valeurs de α pour lesquelles la matrice P est une matrice de transition valable (i.e. "stochastique").

(b) Tracez le graph de communication de la chaîne. Identifiez les classes de communication et classifiez-les en récurrents et transitoires, périodiques ou pas. Spécifier s'il y a des valeurs de α pour lesquelles la structure est differente.

(c) Trouvez toutes les lois stationnaires $\boldsymbol{\pi}$ de cette chaîne, dans tous les cas trouvés ci dessus.

Solution :

(a) All transition probabilities must lie in $[0, 1]$. Now $1 - 2\alpha - \alpha^2 \leq 1 - \alpha - \alpha^2 \leq 1$ for $\alpha \geq 0$, so it suffices to ensure that $1 - 2\alpha - \alpha^2 \geq 0$ i.e. $\alpha \leq \sqrt{2} - 1$. So the range of possible values of α is $[0, \sqrt{2} - 1]$.

(b) Pour $\alpha > 0$, la chaîne a une classe transiente (A, B, C) et une classe absorbante D, et est apériodique by inspection. Pour $\alpha = 0$, nous avons deux classes reccurrentes, la première périodique.

(c) A stationary probability distribution, if it exists must obey

$$\begin{aligned} \alpha\pi_A + \alpha\pi_B + (1-2\alpha-\alpha^2)\pi_C &= \pi_A \\ (1-\alpha-\alpha^2)\pi_A + \alpha\pi_B + \alpha\pi_C &= \pi_B \\ \alpha^2\pi_A + (1-2\alpha-\alpha^2)\pi_B + \alpha\pi_C &= \pi_C \\ \alpha^2\pi_B + \alpha^2\pi_C + \pi_D &= \pi_D \end{aligned} .$$

Pour $\alpha > 0$, la dernière équation implies $\pi_B = \pi_C = 0$, and this in turn shows that $\pi_A = 0$. Hence the stationary probability distribution is $\pi = (0, 0, 0, 1)$. It is unique : there is just one recurrent class and it is apériodique.

3. Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = \pm 1]$ =p et $P[Z_n = 0]$ =1- 2 p, avec $0 < p < 1/2$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par $\mathbb{E}_x$ l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés.

   (a) Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\}$, $t_x = \mathbb{E}_x T$, et $f_x = \mathbb{E}_x X_T$ *Indication :* Conditionez sur le premier pas Z_1

   (b) Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour p_x, t_x et f_x dans le cas $p = q = 1/2$.

   Solution :

   (a) Pour p_x et f_x on obtient les mêmes équations comme pour une marche symmetrique avec $p = 1/2$, (ca veut dire qu'on arrive a manipuler l'équation de reccurence a la même forme). Par exemple, p_x satisfait :

$$\begin{aligned} 2pp_x &= pp_{x+1} + pp_{x-1} \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \\ p_K &= 1 \\ p_0 &= 0 \end{aligned}$$

   $t_x = E_x[T]$ (temps de sortie esperé) satisfait

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + \frac{1}{2p} \quad \text{for any } 1 \le x \le K-1 \\ t_K &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

   (b) On trouve

$$t_x = \frac{x(K-x)}{2p}, \quad p_x = \frac{x}{K}, \quad f_x = x$$

4. Soit $X = (X_t; t \ge 0)$ une chaîne de Markov en temps continu sur l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$. Supposons que la matrice infinitésimale (de taux de transitions) de X est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Donnez les probabilités de transition infinitesimales $\mathbb{P}_i\{X_{dt} = j\}$ de la chaîne, en sachant que l'état initial est $i = 2$. Quelles sont les probabilités de transition de la chaîne au moment du premier saut, en sachant que l'état initial est $i = 2$?

(b) Quelle est la loi conditionelle de $U = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 2\}$, en sachant que $X_0 = 2$?

(c) Posant $V = \inf\{t \geq U : X_t = 2\}$, calculez $\mathbb{E}[V|X_0 = 2]$

Solution :

(a) Les probabilités de transition infinitesimales en sachant que l'état initial et $i = 2$ sont $P_{2,1}(dt) = dt, P_{2,3}(dt) = 2dt, P_{2,2}(dt) = 1-3dt$. Les probabilités de transition au moment du premier saut sont : $P_{2,1} = \frac{1}{3}, P_{2,3} = \frac{1}{3}, P_{2,2} = 0$.

(b) La loi conditionelle de $U = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 2\}$, en sachant que $X_0 = 2$, est $Expo(2)$.

(c) Posant $V = \inf\{t \geq U : X_t = 2\}$, nous avons

$$\mathbb{E}[V|X_0 = 2] = \mathbb{E}U + \mathbb{E}(V - U) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3$$

ou x_i, les éspérances du temps jusqu'on arrive en 2, en sachant que $X_0 = i$, satisfont le système :

$$x_1 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_3$$
$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1$$

De lors, $x_1 = \frac{5}{7}, x_3 = \frac{6}{7}$. et $\mathbb{E}[V|X_0 = 2] = \frac{8}{7}$