Probabilités avancées

Florin Avram

24 janvier 2014

Table des matières

Chapitre 1

Mise en scène discrète

1.1 Espace des épreuves/résultats possibles, événements, espace probabilisé, mesure de probabilités, variables aléatoires discrétes, espérance

Définition 1.1 *Une variable aléatoire X est une fonction mesurable définie sur un espace probabilisé $(\mathbb{Q}, \mathcal{F}, P)$. La fonction $F_X(x) := P[X \leq x]$ est appelée fonction de répartition.*

Définition 1.2 *Une variable aléatoire X prenant un nombre au plus dénombrable des valeurs x_i s'appelle discrète. Pour une telle variable, la fonction de répartition $F_X(x) = \sum_{i: x_i \leq x} P[X = x_i]$ est une fonction escalier.*

Exercice 1.1 *On lance trois pièces équilibrées.*

1. *Spécifiez l'espace des tous les résultats possibles $\mathbb{Q}$ pour cet expériment.*
2. *Deux pièces sont de 5 c., et une de dix. Soit X la somme des monnaies montrant leur face. Donnez la formule de la variable aléatoire X comme fonction sur $\mathbb{Q}$.*
3. *Quelle sont les les valeurs possibles de X. Donnez une table avec les probabilités $p_X(x) := P[X = x]$ associées.*
4. *Calculer l'espérance de X deux fois, en utilisant les deux formules*

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \int_{\mathbb{Q}} X(w) P(dw)$$

Les exemples les plus importants des variables discrètes sont les variables binomiales, géométriques et Poisson.

Exercice 1.2 *Dessiner les graphes des fonctions de répartition des variables : a) binomiale $B(N, p), N = 5, p = 1/4$, b) Poisson $P(\lambda), \lambda = \frac{5}{4}$, et c) géométrique avec $p_k = p(1-p)^k, k = 0, 1, 2, ..., p = \frac{1}{4}$. d) Quelles sont les espérances $E[X] = \sum_i x_i P[X = x_i]$ de ces variables ?*

Exercice 1.3 *On considère une pièce équilibrée qu'on lance un nombre $N = 2n$ de fois, les lancers étant indépendants. Quelle est la probabilité que le nombre des piles soit égal à celui des faces ?*

1.2 Probabilité et espérance conditionnelle par rapport à un événement

Définition 1.3 *Soit B un ensemble* **avec mesure positive** *dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout ensemble A on appelle probabilité conditionnelle de A en* <u>*sachant*</u> *B la fraction*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarque 1.1 *Aussi utile est la formulation équivalente*

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B),$$

ou, plus généralement,

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\,P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Exercice 1.4 *Evaluer la probabilité pour que n personnes ($n \leq 365$) choisies au hasard aient des dates de naissance différentes. Combien le groupe doit-il comprendre de membres pour que la probabilité de dates de naissance différentes soit inférieure à 1/2 ?*

L'espérance conditionnelle peut-etre introduite par des formules différentes dans les cas discret et continue, ou, de manière unifiée, par la définition suivante.

Définition 1.4 *Pour toute variable aléatoire réelle intégrable X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on appelle espérance conditionnelle en* <u>*sachant*</u> *un ensemble B de mesure positive la moyenne pondérée*

$$E(X \mid B) = \frac{1}{P(B)} \int_B X\ P(dw) = \frac{1}{P(B)} \int (X\ \mathbb{1}_B) P(dw) \tag{1.1}$$

Remarque 1.2 *Les probabilités conditionnelles sont un cas particulier, correspondant a une variable indicatrice $X(w) = \mathbb{1}_A(w)$.*

L'idée de ces deux définitions est claire : on «'jette»' la partie de l'espace en dehors de B, en tenant compte seulement de la partie contenue en B. Par conséquent, il faut «normaliser l'espace» en divisant par $P(B)$.

Exercice 1.5 *On jette trois monnaies de 10c, 20c, et 50c respectivement. Soit Y la somme des monnaies tombées face. a) Quelle est l'espérance de Y ? ($40c$) b) Quelle est l'espérance de Y, en sachant que le nombre N des monnaies tombées face est deux ? ($160/3 = 53.33$)*

Les probabilités conditionnelles interviennent naturellement dans des nombreuses situations, comme dans le Texas Hold'Em Poker, ou les joueurs doivent estimer des probabilités conditionnelles qui évoluent en temps, avec l'information fournie par les nouvelles cartes montrées. Elles sont souvent plus faciles à calculer que les probabilités nonconditionnelles, et peuvent aider dans le calcul des dernières, par la méthode du conditionnement et la loi de la probabilité totale.

1.3 Les lois de la probabilité et de l'espérance totale

Les probabilités conditionnelles sont un des outils les plus puissants des probabilités, à travers la méthode du conditionnement. L'idée de cette méthode est de décomposer l'espace probabiliste des ≪'toutes les possibilités≫' dans des sous-ensembles $E_1, E_2, ...E_I$ où le calcul des probabilités devient plus facile. Si on sait quelles sont les probabilités d'un événement A dans tous les cas possibles $E_1, E_2, ...E_I$ d' une partition finie de l'espace probabilisé $\Omega = E_1 \cup E_2 ...$, alors on peut trouver aussi la ≪'probabilité totale≫' en appliquant **la loi des probabilités totales** :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap [\cup E_i]) = P(\cup_i [A \cap E_i]) \\ &= \sum_i P(A \cap E_i) = \sum_i P(E_i) P(A \mid E_i) \end{aligned}$$

Pareillement, on a une loi des espérances totales :

$$E(X) = \sum E(X \, \mathbb{1}_{E_i}) = \sum P(E_i) E(X \mid E_i) \tag{1.2}$$

Exercice 1.6 *On lance trois pièces équilibrées. Deux pièces sont de 5 c., et une de dix. Soit X la somme des monnaies montrant leur face.*

1. *Calculer l'espérance de X.*
2. *Calculer l'espérance conditionnée $E[X|Nb(faces) \geq 2]$.*
3. *Calculer l'espérance conditionnée $E[X|Nb(faces) < 2]$.*
4. *Verifier la formule* (1.2).

Exercice 1.7 *On dispose d'un dé équilibré et d'une pièce de monnaie qui tombe sur pile avec une probabilité $p = 1/3$. On lance le dé une fois puis on lance la pièce un nombre de fois égal au chiffre obtenu avec le dé.*

1. *Si le dé est tombé sur le chiffre k, quelle est la probabilité de n'obtenir que des faces avec la pièce ? D'obtenir au moins une pile ? (il s'agit donc de probabilités conditionnellement au chiffre k obtenu avec le dé).*
2. *Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de a) la probabilité (non conditionnelle) d'obtenir au moins une pile.*
3. *L'espérance du nombre total des piles.*

Exercice 1.8 *Un marchand vend des articles dont 30 % proviennent d'un fournisseur B_1 et 70% d'un fournisseur B_2 ; 6 % de la production de B_1 est défectueuse, contre 3% pour B_2. a. Calculer la probabilité qu'un article choisi au hasard soit défectueux (considérer que l'article a des probabilités 0.3 et 0.7 de provenir de chacun des deux fournisseurs, ce qui vous met sur la voie pour l'utilisation de la formule des probabilités totales). b. (***la loi de Bayes***) Sachant que l'article est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de B_1 ? de B_2 ? (R : $\frac{.018}{.039}$.)*

1.4 Événements indépendants

Exercice 1.9

1. *Donner une formule pour la probabilité qu'un réseau de n composants i.i.d. en série transmette de l'information de la gauche vers la droite.*
2. *Donner une formule pour la probabilité qu'un réseau de 2 composants i.i.d. en parallèle transmette de l'information de la gauche vers la droite.*

3. *Donner une formule pour la probabilité qu'un réseau de n composants i.i.d. en parallèle transmette de l'information de la gauche vers la droite.*
4. *Donner une formule pour la probabilité qu'un réseau de 2 composants en parallèle, chaque une étant une série de n «passages Bernoulli» i.i.d., transmette de l'information de la gauche vers la droite.*

1.5 Divide et Impera

Nous allons illustrer maintenant l'utilité de la loi des probabilités totales par un exemple plus subtil. **Exemple en fiabilité : calcul des probabilités nonconditionnelles, par conditionnement**. Donner une formule pour la probabilité $P[G \to D]$ que le réseau suivant transmette de l'information de la gauche vers la droite : (sans simplications algébriques !)

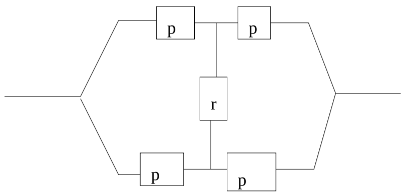


FIGURE 1.1 – **p,r sont les probabilités que les composantes fonctionnent**

Solution : $(1-r)(1-(1-p_1p_3)(1-p_2p_4)) + r(1-(1-p_1)(1-p_2))(1-(1-p_3)(1-p_4))$.

1.6 Conditionnement sur le premier pas

exa:EG **Exemple 1.1 Le calcul de l'espérance** m **d'une variable géométrique** N, *avec* $p_k = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, ...,$ *c.-à-d. du nombre des essaies nécessaires jusqu'à l'arrivée de la première pile, en l'incluant. Cet exemple peut abordé par la méthode de* **conditionnement sur le premier pas**, *en utilisant* (1.2). *Après un pas, on a*

$$m = E[N] = P[pile]E[N/pile] + P[face]E[N/face] = p \times 1 + (1-p)(1+m), \Longrightarrow m = \frac{1}{1-p}.$$

Exercice 1.10 *Reformuler le calcul ci-dessus sans faire appel à la formule* (1.2).

R : $m = \sum_{k=1} kp(1-p)^{k-1} = p + \sum_{k=2} kp(1-p)^{k-1} = p + (1-p)\sum_{k=2} kp(1-p)^{k-2} = p + (1-p)\sum_{j=1}(j+1)p(1-p)^{j-1} = p + (1-p)(m+1) = 1 + (1-p)m \Longrightarrow m = \frac{1}{p}$.

Remarque 1.3 *Pour mieux comprendre la méthode, il est utile de dessiner l'arbre de toutes les possibilités, en indiquant sur chaque branche a) la proba associée et b) la modification du «coût» associée (dans le cas des problèmes de nombre des essaies espéré, le coût est* 1*) En suite, il y aura des branches la contribution desquelles peut etre déterminée après le premier pas, et des branches où on «recommence» après le premier pas, après avoir tenu compte du coût du premier pas.*

Chapitre 2

Variables aléatoires continues

Définition 2.1 *Pour toute variable aléatoire $X \in \mathbb{R}$, la fonction*

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$

est appelée fonction de répartition de X. La fonction

$$\bar{F}_X(x) = P[X > x] = 1 - F_X(x)$$

est appelée fonction de survie de X.

Exercice 2.1 *Soit X un nombre entre 0 et 2, toutes les valeurs étant également possibles. a) Tracer graphiquement l'espace des résultats possibles pour X, ainsi que l'événement $X > 1/4$. b) Calculer la fonction de répartition de X. Quelle est la probabilité $P[X > 1/4]$?*

Exercice 2.2 *On lance une monnaie équilibrée. Si face, on choisit alors un nombre entre 0 et 1, toutes les valeurs étant également possibles. Si pile, on choisit alors un nombre entre 1 et 2, toutes les valeurs étant également possibles. Soit X le nombre choisi. Calculer la fonction de survie de X, et tracer la graphiquement. Quelle est la probabilité $P[X > 1/4]$? Calculer la «densité» $f(x) = F'(x)$.*

Définition 2.2 *Une variable aléatoire X ayant la fonction de répartition de la forme*

$$F_X(x) := P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) du$$

est appelée variable (absolument) continue, et $f_X(u)$ est appelée densité. On rappelle qu'une fonction $F(x)$ qui est représentable comme intégrale d'une autre fonction $f(x)$, c.-à-d. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$, est appelée absolument continue.

Remarque 2.1 *(*) L'idée est qu'on a besoin de supposer que la fonction de répartition est différentiable presque partout afin de pouvoir parler de sa dérivé/ densité $f(x)$, et en plus que $F(x)$ est l'intégrale/primitive de $f(x)$ (ce qui malheureusement n'est pas vrai pour toutes les fonctions différentiables presque partout). Sous ces hypothèses, une variable continue X prenant des valeurs dans un intervalle $[a, b]$ par exemple, peut etre vue comme une limite des variables discrètes. Pour voir ça, prenons une division de notre intervalle $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, en n morceaux $[x_i, x_{i+1}], i = 0, ..., n-1$ égaux, c.-à-d. $x_{i+1} - x_i = dx, \forall i$. En suite, approximons notre variable continue par une variable discréte X_n prenant les valeurs $y_i := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, i = 0, ..., n-1$, avec probabilités*

$$p(y_i) = P[X \in [x_i, x_{i+1}] = F(x_{i+1}) - F(x_i) \approx f(y_i)dx \tag{2.1}$$

où nous avons utilisé la formule d'approximation des probabilités des intervalles infinitésimaux. Prenons maintenant un intervalle I arbitraire. Si dx est suffisamment petit, alors

$$P[X \in I] = \int_I f(x)dx \approx \sum_{\{i:[x_i,x_{i+1}]\subset I\}} P[X \in [x_i, x_{i+1}] \approx \sum_{\{i:[x_i,x_{i+1}]\subset I\}} f(y_i)dx = P[X_n \in I]$$

Pour conclure que la probabilité du côté droit converge vers celle du côté gauche, il faut encore analyser la somme des erreurs provenant de l'approximation (2.1). *En utilisant les développements limités de $F(y \pm dx/2)$, on trouve que $\int_{y-dx/2}^{y+dx/2} f(u)du - f(y)dx = \frac{dx^3}{3!2^3}(f''(\xi) + f''(\xi'))$, et donc les erreurs sont d'ordre $O(dx^3)$, et l'erreur de la somme est d'ordre $O(dx^2) \to 0$, au moins si $f(x)$ est deux fois différentiable.*

Les exemples les plus importants des variables continues sont les variables uniformes, uniformes par morceaux, exponentielles, Pareto et Gaussiennes.

2.1 L'espérance des variables continues

La formule de l'espérance des variables discrètes

$$E[X] = \sum_x x \, P[X = x]$$

et l'utilisation d'une partition dans des intervalles infinitésimaux $I = [x, x+dx]$, avec $P[X \in I] = F(x + dx) - F(x) \approx f(x)dx$ donnent immédiatement la formule de l'espérance des variables continues

$$E[X] = \int_x x f_X(x)dx.$$

Les deux formules (discrète et continue) peuvent etre unifiées dans une seule formule

$$E[X] = \int_{\mathbb{Q}} X(w)P(dw) = \int_x x P_X(dx),$$

en faisant appel à la théorie de la mesure sur l'espace mère $\mathbb{Q}$.

Exercice 2.3 *Un système de trois composantes i.i.d. en parallèle, avec probabilité de chaq'une de fonctionner p, fonctionne si au moins deux composantes fonctionnent. p est une variable de loi uniforme $U[0, 1]$. Trouver la probabilité que le système fonctionne.*

Exercice 2.4 *On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans R_+ suit la loi exponentielle de paramètre λ si : $P(X > x) = e^{-\lambda x}, \forall x \geq 0$. Dans la suite, X désigne une telle variable aléatoire.*

1. *Montrer que X admet une densité.*
2. *Calculer la moyenne de X, sa médiane et sa variance.*
3. *Calculer $E[e^{-sX}]$.*
4. *Montrer que λX suit une loi exponentielle de paramètre 1.*
5. *Calculer la loi de la partie entière de X*

Exercice 2.5 *On dit que X suit une loi de Paréto si elle admet pour densité :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ k(a/x)^{b+1} & si\ x < a \end{cases}$$

1) Determiner k tel que f soit bien une densité et determiner la fonction de répartition correspondante.

2) Sous quelles conditions X admet-elle une espérance ? Une variance ?

3)On considere que la loi de repartition des revenus dans un pays developpé est une loi de Pareto de parametre b=1.5 . Que represente alors le parametre a ? L'espérance de X ? La variance de X ?

Exercice 2.6 Loi gaussienne centrée réduite. *Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite, c'est à dire admettant pour densité* $f(x) = \sqrt{1}2\pi e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Montrer que $E(X^k)$ *est nulle si k est un entier positif impair.*

2. (*) Calculer $E(e^{sX})$ *et* $E(X^{2k}), \forall k \in \mathbb{N}$. *On pourra procéder par récurrence.*

Exercice 2.7 *a) Soit X une variable aleatoire de loi uniforme* $U[0, 8]$.

Quelle est la probabilité que $X^2 - 3X + 2 < 0$ *?*

b) Soit X une variable aleatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. *Quelle est la probabilité que* $Sin[X] < 0$ *?*

Exercice 2.8 *Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par* $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

1. Vérifier que f est bien une densité. Donner son espérance et sa variance. 2. Quelle est la probabilité que l'équation $a^2 + Xa + 1 = 0$ *possède : (a) Deux racines réelles distinctes ? (b) Une racine double ? (c) Deux racines complexes non réelles ?*

Exercice 2.9 *Quelle est la probabilité* $P[X > 1/4]$ *en supposant une densité d'arrivée* $f(x)$ *≪chapeau≫ symétrique continue, linéaire sur les morceaux* $[0, 1]$ *et* $[1, 2]$, *et tq* $f(0) = f(1) = 0$ *?*

Exercice 2.10 *Calculer k tel que la fonction* $f(x) = kh(x)$ *soit une densité, si : a)*

$$h(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}, x \geq 0; \quad b) h(x) = \frac{x}{x^3 + x^2 + x + 1}, x \geq 1; \quad c) h(x) = \frac{1}{x^3 + 1}, x \geq 0.$$

Sol : c) En utilisant $\int \frac{dt}{(t-a)^2 + b^2} = \frac{1}{b} Arctg(\frac{t-a}{b})$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \lim_{M\to\infty} \int_0^M \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}\right) dx$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_0^M (\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-1/2}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}) dx$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{3}(ln(x+1) - ln(x^2-x+1)^{1/2}) + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4})|_0^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{3} ln(\frac{M+1}{\sqrt{M^2-M+1}}) + \frac{1}{\sqrt{3}} Arctg(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-1/2))|_0^M$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(Arctg(\infty) - Arctg(-1/\sqrt{3})) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\pi/2 + \pi/6) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, k = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

2.2 Couples aléatoires et vecteurs aléatoires

Les probabilités deviennent plus intéressantes quand on a faire avec plusieurs v.a., et le cas le plus simple et celui des variable aléatoire i.i.d., avec des probabilités (ou densités) conjointes qui sont des produits des probabilités (ou densités) marginales.

exe:ca **Exercice 2.11 Couple aléatoire continu.** *Une étudiante donne rendez-vous à son ami entre 0 h et 1 h. On suppose qu'ils arrivent indépendamment et à des instants uniformément distribués dans l'heure convenue. Les deux amis conviennent de n'attendre pas plus de 15 minutes (à l'initiative du jeune homme, qui est habitué à la ponctualité douteuse de sa copine, mais redoute sa susceptibilité). Soit X, Y les heures d'arrivée des deux copains, et A l'événement que les deux se rencontrent.*

1. *Tracer graphiquement le domaine du plan des paires des arrivées possibles (X, Y), et le domaine du plan représentant l'événement A.*
2. *Quelle est la probabilité pour que les deux amis se rencontrent ?*
3. *Supposons que le jeune homme arrive à une heure donnée t. Quelle est la probabilité qu'il rencontre sa copine ?*

R :

3. $P[A] = P[|x - y|] \leq 1/4] = \frac{7}{16}$
4. $P[A|X = t] = \begin{cases} t + 1/4 & t \leq 1/4 \\ (t + 1/4) - (t - 1/4) = 1/2 & 1/4 \leq t \leq 3/4 \\ 1 - (t - 1/4) = 5/4 - t & t \geq 3/4 \end{cases}$

Quelques formules à remarquer pour les paires des variables continues.

1. Les densités marginales s'obtiennent en intégrant les densités jointes :

$$\boxed{f_X(x) = \int_y f_{Y,X}(y, x) dy}$$

2. Rappelons que les probabilités conditionnelles sont définies comme quotients des probabilités conjointes et probabilités marginales.

$$p_{Y/X}(y/x) = \frac{p_{Y,X}(y, x)}{p_X(x)}. \tag{2.2}$$

Les densités conditionnelles sont définies par un analogue de la loi discrète :

$$\boxed{f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{Y,X}(y, x)}{f_X(x)}} \Longleftrightarrow f_{Y/X}(y/x) dy = \frac{f_{Y,X}(y, x) dx dy}{f_X(x) dx} \tag{2.3}$$

où la deuxième formule (évidemment correcte, mais inutile) a été rajouté pour mettre en évidence l'analogie avec (2.2), en utilisant le fait que les densités multipliées par des éléments de volume infinitésimaux sont justes des probas. La démonstration demande un traitement théorique plus difficile, comportant un passage limite $dy \to 0$, comme suggéré par la deuxième formule.

3. On utilisera souvent la décomposition «chaîne» des probabilités conjointes (ou «loi des probabilités composées») :

$$\boxed{f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y/X}(y/x) = f_Y(y) f_{X/Y}(x/y)} \tag{2.4}$$

4. Une fois une loi marginale obtenue, ses espérances se calculent comme pour toutes les lois. Remarquer la loi de l'espérance totale quand on conditionne sur toutes les valeurs possibles d'une variable continue X :

$$EY = \int_{x,y} y f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_x \left(\int_y y f_{Y/X}[y/x] dy \right) f_X(x) dx = E[E[Y/X]] \tag{2.5}$$

Bien sûr, l'égalité entre la première et dernière expresssion (interpretées comme integrales sur un espace probabilisé Ω arbitraire) est en effet vrai pour toutes les variables aléatoires.

Remarque 2.2 *Aussi utile est la loi de Bayes pour les probabilités marginales :*

$$f_Y(y) = \int_x f_{X,Y}(x,y) dx = \int_x f_{Y/X}(y/x) f_X(x) dx \tag{2.6}$$

Exercice 2.12 *On choisit de manière aléatoire, selon la loi uniforme, un point $(X; Y)$ du disque D de centre (0, 0) et de rayon 1. 1) Donner la densité jointe du couple $(X; Y)$.*
2) Quelles sont les densités des lois marginales de X et Y ?
3) Quelle est la loi conditionnelle $\mathcal{L}(Y|X)$?
4) Quelle est le sous ensemble des points (X, Y) satisfaisant l'inégalité $Y \leq zX$? Montrer que la loi du quotient $Z = Y/X$ est une loi de Cauchy.

Exercice 2.13 *Soit $Z = (X, Y)$ un* **couple aléatoire** *de densité donnée par $f_{X,Y}(x,y) = ke^{-y}$ si $0 < x < y$ et $f_{X,Y}(x,y) = 0$ sinon.*

1. *Dessiner le domaine du plan sur lequel f n'est pas nulle. Calculer k.*
2. *Déterminer les densités marginales et conditionnelles de X et Y. Ces variables sont-elles indépendantes ?*
3. *Déterminer la loi de $Y - X$, puis celle de X/Y*

R :

1. Soit $T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y\}$. $k = \frac{1}{\int_T e^{-y} dy dx} = 1$
2.

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= e^{-y} \mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq y\}} = \left(e^{-x} \mathbb{I}_{\{0 \leq x\}}\right) \left(e^{-[y-x]} \mathbb{I}_{\{0 \leq y-x\}}\right) \\ &= \left(y e^{-y} \mathbb{I}_{\{0 \leq y\}}\right) \left(\frac{1}{y} \mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq y\}}\right) \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{L}(X) = Exp(1), \mathcal{L}(Y - x|x) = Exp(1), \mathcal{L}(Y) = \Gamma(2,1), \mathcal{L}(X|y) = Unif[0,y]$

3. $\mathcal{L}(Y - X) = Exp(1)$, $\mathcal{L}(X|Y) = Unif[0,1]$.

Exercice 2.14 *Comment retrouver la réponse de l'exercice 2.11 b) à partir de l'exercice 2.11 c) ?*

R : $P[A] = \int_{t=0}^1 P[A|X=t] f_X(t) dt = \int_{t=0}^{1/4} (t + 1/4) dt + \int_{t=1/4}^{1/2} 1/2 dt + \int_{t=1/2}^1 (5/4 - t) dt = ...$

2.3 Fonctions génératrices des probabilités et des moments

Définition 2.3 *a) Pour $X \in \mathbb{N}$, la fonction $p_X(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ s'apelle fonction génératrice des probabilités.*

b) La fonction $\varphi_X(s) = E[e^{sX}]$ s'apelle fonction génératrice des moments.

Exercice 2.15 *a) Soit X une v.a. de loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer sa fonction génératrice des probabilités.*

b) Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.a. iid de loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer la fonction génératrice des probabilités et la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Exercice 2.16 *On dit que X suit une loi uniforme discrète sur [1 :n] si et seulement si pour tout entier $k \in [1:n]$ on a P(X = k) = 1/n. Déterminer la fonction génératrice des probabilités $p_X(z)$.*

Exercice 2.17 *Soit Z un v.a. avec loi de Poisson de paramètre λ.*

a) Calculer les fonctions génératrice des probabilités (fgp) et des moments (fgm) de Z.

b) Calculer l'espérance et la variance de la loi de Poisson de paramètre λ à l'aide de la fonction fgp.

c) Calculer l'espérance et la variance de la loi de Poisson de paramètre λ à l'aide de la fonction fgm.

Exercice 2.18 *Calculer l'espérance et la variance de la loi géométrique de paramètre p*

2.4 Sommes des variables aléatoires i.i.d. (indépendantes, identiquement distribuées) et sommes aléatoires des variables aléatoires i.i.d.

Exercice 2.19
1. *Soient $X, Y \in \mathbb{Z}$ deux variables aléatoires discrétes, indépendantes, de pmf respectives p[x] et q[y]. Montrer que $S = X + Y$ a une pmf*
$$p_S(z) = \sum_{x=-\infty}^{I} p(x)q(z-x)$$
2. *Soient $X, Y \in \mathbb{N}$ deux variables aléatoires discrétes, indépendantes et positives, de pmf respectives p[x] et q[y]. Montrer que $S = X + Y$ a une pmf $p_S(z) = \sum_{x=0}^{z} p(x)q(z-x)$.*
3. *Qu'obtient-on si X et Y suivent la loi géométrique $p(k) = q(k) = (1-p)p^k, k \geq 0$?*

Exercice 2.20 *Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.*
1. *Quelle est la loi de $Z = X + Y$?*
2. *Pout tout entier $n \geq 0$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Z = X+Y = n$.*
3. *Déterminer $m(n) := E(X \mid Z = n)$, et $m(Z) := E(X \mid Z)$ («fonction de Doob»).*

Exercice 2.21
1. *Soient $X, Y \in \mathbb{R}$ deux variables aléatoires indépendantes continues, de densités respectives $f(x)$ et $g(y)$. Montrer que $S = X + Y$ a une densité*
$$f_S(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$$

2. *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes continues et positives, de densités respectives $f(x)$ et $g(y)$. Montrer que $S = X + Y$ a une densité $f_S(z) = \int_{x=0}^{z} f(x)g(z-x)dx$.*
3. *Qu'obtient-on si X et Y suivent la loi Exp[λ] ?*
4. *Qu'obtient-on si X et Y suivent respectivement les loi Exp[λ] et Exp[μ], $\lambda \neq \mu$?*
5. *Qu'obtient-on si X et Y suivent la loi U[$[-1/2, 1/2]$] ?*
6. *Qu'obtient-on si X et Y suivent la loi de densité $f(x) = \begin{cases}(1+x)_+ & x \leq 0\\(1-x)_+ & x \geq 0\end{cases}$?*

R : 6. $S \in [-2, 2]$, $f_S(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)dx = \int_{-2}^{2} f(x)f(z-x)dx$. Remarquons que $f(z-x) = \begin{cases}(1-x+z)_+ & x \geq z\\(1+x-z)_+ & x \leq z\end{cases} = \begin{cases}(1+x-z)_+ & x \leq z\\(1-x+z)_+ & x \geq z\end{cases}$, i.e. les cotés du triangle sont renversées.

En superposant les graphes de $f(x), f(z-x)$ et deplaçant le dernier tel qu'il soit centré en z, on voit qu'il y a quatre cas : $z \in [1, 2], z \in [-1, -2], z \in [0, 1], z \in [-1, 0]$. Dans le premier cas :

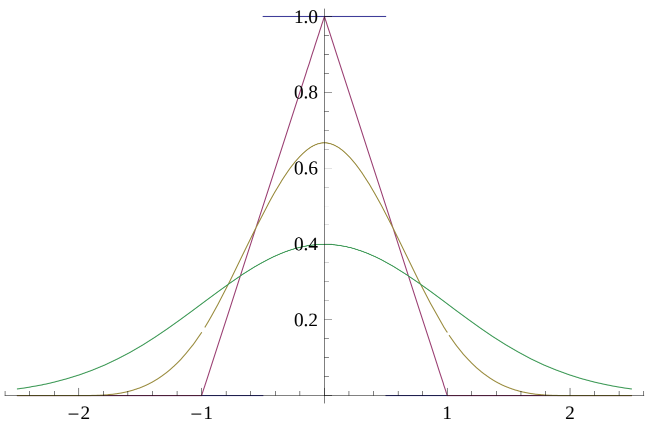
$$f_S(z) = \int_{z-1}^{1} (1-x)(1+x-z)dx = \int_{z-1}^{1} (1-x^2+zx-z)dx = z^2 - 2z + \frac{8-z^3}{6}$$

Dans le deuxième cas :

$$f_S(z) = \int_{z-1}^{0} (1+x)(1+x-z)dx + \int_{0}^{z} (1-x)(1+x-z)dx + \int_{z}^{1} (1-x)(1-x+z)dx$$
$$= \int_{z-1}^{1} (1-x^2+zx-z)dx = 2/3 - z^2 + z^3/2$$

On observe sur le plot la convergence vers le densité Gaussienne.

fig:CLT



Exercice 2.22 *Pour $\alpha > 0$, soit Γ la fonction définie par $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ (fonction gamma).*

1. *Calculer $\Gamma(1), \Gamma(2)$.*

2. *En supposant que $\alpha > 1$ et que $\Gamma(\alpha+1)$ et $\Gamma(\alpha)$ convergent, trouver une relation qui les relie.*
3. *En déduire l'expression de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.*
4. *Vérifier que l'intégrale converge au voisinage de 0 $\forall \alpha > 0$.*
5. *Vérifier que si l'intégrale $f(\alpha) = \int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ est convergente, alors elle définit une fonction monotone.*
6. *(*) Concluez que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge globalement pour $\alpha > 0$.*
7. *Montrez que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.*
8. *Montrez que la densité d'une somme de n variables i.i.d. exponentielles de paramètre λ est $\lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\,lx}$.*

Exercice 2.23 *Soit $T = \sum_{i=1}^N Z_i$, où Z_i sont des variables exponentielles i.i.d de paramètre λ, et N est indépendante de Z_i, avec $P[N = k] = (1-p)p^{k-1}, k = 1, 2, ...$ Déterminer la fonction génératrice des moments de T, et sa fonction de survie.*

R : $Ee^{sT} = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)p^{k-1} (\frac{1}{1+s/\lambda})^k = (1-p)(\frac{1}{1+s/\lambda}) \frac{1}{1-p(\frac{1}{1+s/\lambda})} = \frac{1-p}{1-p+s/\lambda} = \frac{1}{1+s/(\lambda(1-p))}$

Exercice 2.24 *Soit S une variable binomiale avec paramètres N, p, où N, p peuvent-etre des variables aléatoires. Déterminer la loi de S, si a) N est une variable de Poisson avec paramètre λ b) N est une variable binomiale avec paramètres n, q c) (*) p est une variable de loi $U[0, 1]$.*

R : a) $P[S = k] = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$

`ex:der` **Exercice 2.25**

1. *Montrer que*

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k,$$

si $|x| \leq 1$, en différenciant $\frac{1}{(1-x)^1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

2. *Calculer le développement limité autour de $x = 0$ de $\frac{1}{(1-x)^3}$, en différenciant $\frac{1}{(1-x)^1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.*
3. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $|x| \leq 1$, montrer que*

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k,$$

en différenciant $\frac{1}{(1-x)^1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

Exercice 2.26 *Soit X, Y deux variable aléatoire géométriques indépendantes de loi $p_k = (1-p)p^k, k = 0, 1, 2, ...,$ des paramètres p (X, Y comptent le nombre des jetés d'une monnaie jusqu'à la première et deuxième pile, en excluant les piles).*

1. *Quelle est la loi de $Z = X + Y$?* **R :** *La fonc. gen. des probas de la v. géométrique est $(1-p)(1+pz+p^2z^2+p^kz^k...) = \frac{1-p}{1-pz}$. La fgp de la somme Z est*

$$P(z) = (1-p)^2(1+pz+p^2z^2+p^kz^k...)(1+pz+p^2z^2+p^kz^k...) = (1-p)^2(1+2pz+3p^2z^2+...,$$

par un calcul direct ou en appliquant le développement limité de l'exercice 2.25 précédent. Les probabilités d'une somme des deux v. géométriques sont :

$$P[Z=k] = (k+1)(1-p)^2p^k, k = 0, 1, ...,$$

avec l'interprétation qu'il faut choisir la place de la première parmi les $k+1$ lancées qui précèdent la deuxième pile.

2. *Pout tout entier $n \geq 0$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Z = X+Y = n$.*
3. *Déterminer $E(X \mid Z = n)$ et la fonction de Doob $h(Z) = E(X \mid Z)$.*
4. *Calculer la loi (binomiale négative) d'une somme des r variable aléatoire géométriques Y_i indépendantes, des paramètres p. Donner une interprétation combinatoire du résultat.* **R :** *Nous allons effectivement redécouvrir ici l'expansion binomiale négative de Newton. Commençons par la fgp d'une somme des trois v. géométriques, qui est*

$$P(z) = (1-p)^3(1+pz+p^2z^2+p^kz^k...)(1+pz+p^2z^2+p^kz^k...)(1+pz+p^2z^2+p^kz^k...)$$
$$= (1-p)^3(1+3pz+6p^2z^2+10p^2z^3...)$$

Les probabilités d'une somme des trois v. géométriques sont :

$$P[Z=k] = \frac{(k+1)(k+2)}{2}(1-p)^3p^k = \binom{k+2}{2}(1-p)^3p^k, k = 0, 1, 2, 3...,$$

en appliquant le développement limité de l'exercice 2.25, ou par un calcul direct, ou $c_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ est obtenu en remarquant que les prémi'eres différences sont affines en k, et les deuxièmes différences sont constantes, égales a 1. Par conséquent c_k est un polynôme de deuxième dégrée en k, et les valeurs initiales $c_0 = 1, c_1 = 3$ nous donnent $c_k = \frac{k^2}{2} + a_1k + a_0 = \frac{k^2+3k+2}{2}$ (on peut aussi chercher $1, 3, 6, 10$ avec http ://oeis.org/). On peut deviner maintenant que les probabilités d'une somme des n v. géométriques sont :

$$P[Z=k] = \binom{n+k-1}{n-1}(1-p)^np^k, k = 0, 1, ...$$

Une fois deviné, le résultat est évident, car c'est juste le nb. des possibilités pour choisir $n-1$ piles parmi les $n-1+k$ résultats qui précèdent la k-ieme pile.

On aurait pu aussi prendre une voie directe, en suivant Newton, en se posant la question si l'expansion binomiale valable pour des entiers naturels α :

$$(1-pz)^\alpha = 1 - \alpha pz + \binom{\alpha}{2}p^2z^2 - ...$$

tienne aussi pour des entiers négatifs. En effet, pour $\alpha = -1$,

$$(1-pz)^{-1} = 1 - (-1)pz + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}p^2z^2 - ... = 1 + pz + p^2z^2 + ...$$

est juste la série géométrique, donc la formule tient aussi dans ce cas, sauf que l'expansion est infinie. A partir de $\alpha = -1$, on démontre par récurrence, comme ci-dessus, que la formule tienne pour $k = -2, -3, ...$. Il s'avère que la formule binomiale généralisée de Newton est valable pour chaque $\alpha \in \mathbb{C}$, si $|pz| < 1$. http ://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_series

Exercice 2.27 *Soit S une variable binomiale négative avec paramètres N, p, c.-à-d.*

$$P[S = k|N = r] = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^r p^k = \frac{r^{(k)}}{k!}(1-p)^r p^k,$$

où N est une variable aléatoire géométrique avec paramètre β, et $r^{(k)} := r(r+1)...(r+k-1)$. Déterminer la loi de S.

Exercice 2.28 *Un examen se présente sous la forme d'un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.) comportant $K = 20$ questions. Pour chacune des questions, il est proposé 4 réponses dont une et une seule est bonne. Le correcteur compte 1 point pour une réponse juste et 0 en cas de mauvaise réponse. Un candidat se présente en n'ayant appris rien. Il reçoit une note N égale au nombre des questions auxquelles il répond correctement (par chance).*

1. *Quelle est la loi de la note N ? Calculer l'espérance mathématique et la variance de N.*
2. *(**Sommes aléatoires**) Répeter la question précédente, si K est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.*

Exercice 2.29 *(Somme aléatoire) Soit $(X_n), n \leq N$ une suite de v.a. iid à valeurs dans $\mathbb{N}$ et T une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et indépendante des $(X_n), n \leq N$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $S(w) = S_{T(w)}(w)$.*

a) Montrer que $g_S = g_T \circ g_X$. b) Montrer que si X_1 et T sont intégrables, alors $E[S] = E[T]E[X]$. c) On prend pour les $(X_n), n \leq N$ des v.a. iid de loi de Bernoulli de paramètre p, et pour T une loi de Poisson de paramètre λ. Quelle est la loi de S ?

Exercice 2.30 *Soit X une variable de loi Poisson de paramètre Y, où Y est une variable de loi exponentielle de paramètre λ. a) Trouver la loi de X. b) Trouver la loi conditionnelle $\mathcal{L}[Y|X = k]$.*

R : $P[X = k] = \int_0^\infty \frac{y^k}{k!} e^{-y} \lambda e^{-\lambda y} dy$

s:CLT0 2.5 Théorème de limite centrale

Le théorème de limite centrale, le premier grand théorème des probabilités, concerne la convergence de la fonction de répartition $F_n(x)$ d'une somme des variable aléatoire Z_i i.i.d., avec $\mathrm{Var}\, Z = \sigma^2$:

$$\lim_{n\to\infty}^{(L)} \frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - EZ_i)}{\sigma n^{1/2}} = N_{(0,1)}, \tag{2.7}$$

c.-à-d.

$$P[\tilde{S}_n \leq x] \to \Phi(x), \quad \tilde{S}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - EZ_i)}{\sigma n^{1/2}},$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale. Ce théorème a une longue histoire, qui commence par le théorème De Moivre-Laplace des convergence des sommes binomiales– voir http ://w3.mi.parisdescartes.fr/smel/articles/ etoiles/cadre_etoiles.html

Nous allons aborder cette loi par quelques examples :

Exemple 2.1 *Soit Z_i i.i.d., $Z_i \sim U[-1/2, 1/2]$. a) Montrer que la densité de $Y_2 = Z_1 + Z_2$ est*

$$f_{Y_2}(x) = \begin{cases} 1-x & x \in [0,1] \\ x+1 & x \in [-1,0] \end{cases}$$

Ind : *La formule de convolution reviens ici a calculer la longueur de l'intersection*

Exercice 2.31 *Soit X une variable aléatoire, et soit $Y_a = X/a$. Calculer l'esperance et l'écart type de Y_a. b) Calculer la fonction de répartition Y_a, et aussi la densité, en supposant que X est continu c) Dessiner les densités f_X et f_{Y_a} pour $a = 2$ et $a = 4$ au cas où $X \sim U[-1, 1]$.*

2.6 Transformations des variables aléatoires

Exercice 2.32 *Soit $U_i, i = 1, 2$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme discrète sur $0, 1, ..., n$ c'est-à-dire que pour $0 \leq k \leq n$, $P[U_i = k] = \frac{1}{n+1}$. Quelles sont les loi de $n - U_1, 2U_1, U_1^2, U_1 + U_2$?*

Exercice 2.33 *Soit X de loi exponentielle $Exp(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.*

1. *Quelle sont les lois de $X + a$, aX et e^{-aX} ?*
2. *Quelle est la loi de $Z = \sqrt{X}$? Calculer $EZ, \mathrm{Var}\,(Z)$.*
3. *Quelle est la loi de $Z = e^{-\lambda X}$?*
4. *Quelle est la loi de $Z = \bar{F}[X]$, où X est une v.a. continue ?*

Exercice 2.34 *Quelle est la loi de $Z_1 = \sqrt{X_1} + \sqrt{X_2}$, où X_1, X_2 sont des variable aléatoire i.i.d., de loi $Exp(\lambda)$?*

Exercice 2.35 *Quelle sont la fonction de répartition et la densité du carré d'une variable de loi normale $N(0, 1)$?*

Exercice 2.36 *Soit X une variable qui suit la loi de Cauchy avec densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. a) Verifier qu'il s'agît d'une densité. b) Trouver la fonction de répartition. c) Calculer $P[1/3 \leq X^2 \leq 1$. c) Montrer que 1/X a la même loi que X. d) Déterminer la fonction de répartition de T = max(X, 0). Est-ce que la variable aléatoire T est continue (le cas échéant, donnez sa densité) ?*

R : d) T est une variable aléatoire **hybride** (avec une partie discrète, et une continue).

Exercice 2.37 *a) Soit X une variable aléatoire continue de loi uniforme sur [0, 1]. Déterminer les lois de $Z_i = h_i(x), i = 1, 2$, où $h_1(x) = 1 - x$ et $h_2(x) = min(x, 1 - x)$. b) Déterminer les lois de $Z_3 = min(X_1, X_2)$, $Z_4 = X_1 + X_2$, $Z_5 = X_1 + X_2 + X_3$, $Z = \sqrt{X_1} + \sqrt{X_2}$, où X_1, X_2, X_3 sont des variable aléatoire i.i.d., de loi uniforme sur [0, 1].*

Ind : Pour calculer $P[Z = h(X) \leq z] = P_X[x : h(x) \leq z]$, tracer le graph de $y = h(x)$, de $y = z$, déterminer l'ensemble $A_z = [x : x(x) \leq z]$, et sa probabilité $\int_{A_z} f_X(x)dx$.

R :

$$f_{\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}}(x) = \begin{cases} \frac{2x^3}{3} & 0 < x \leq 1 \\ -\frac{2}{3}\left(x^3 - 6x + 4\right) & 1 < x < 2 \end{cases}$$

f:csu

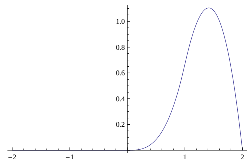


FIGURE 2.1 –

2.7 Complements sur la loi exponentielle

Exercice 2.38 *Soit X1 et X2 la durée de vie de deux composants. On suppose que ces deux composants suivent la même loi E(λ = 1/1000). 1. Si ces composants sont montés en série, quelle est la loi de la durée de vie du circuit électronique ? (On suppose que les deux composants fonctionnent indépendemment l'un de l'autre) 2. Même question si ces composants sont montés en parallèle. 3. Calculer la durée de vie moyenne du circuit dans le premier cas, dans le deuxième cas. 4. Généraliser au cas de n composants.*

Théorème 2.1 La loi exponentielle et la propriété de »'manque de mémoire»' *Soit X une variable aléatoire réelle positive. Alors, X suit une loi exponentielle si, et seulement si la «fonction de survie conditionnelle» satisfait :*

$$\forall t, h \geq 0 \ , \ P\left[X \geq t+h \mid X \geq t\right] = P\left[X \geq h\right],$$

qu'on appelle la propriété de manque de mémoire.

Démonstration : Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors pour tous $t, h \geq 0$ on a :

$$P\left[X \geq t+h \mid X \geq t\right] = \frac{P\left(\left[X \geq t+h\right] \cap \left[X \geq t\right]\right)}{P\left[X \geq t\right]} = \frac{P\left[X \geq t+h\right]}{P\left[X \geq t\right]}$$
$$= \frac{\bar{F}_X\left(t+h\right)}{\bar{F}_X\left(t\right)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = \bar{F}_X\left(h\right) = P\left[X \geq h\right]$$

où $\bar{F} = \bar{F}_X = 1 - F_X$. Réciproquement , si on suppose que $\forall t, h \geq 0 \ , \ P\left[X - t \geq h \mid X \geq t\right] = P\left[X \geq h\right]$ c'est-à-dire :

$$\forall t, h \geq 0 \ , \ P\left[X \geq t+h\right] = P\left[X \geq t\right] P\left[X \geq h\right],$$

alors la fonction de survie $\bar{F}$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$(**) \ \ \bar{F}\left(t+h\right) = \bar{F}\left(t\right)\bar{F}\left(h\right) \ \text{ pour tous } t, h \geq 0$$

En prenant logarithmes, on trouve que la fonction $f(x) = \log(\bar{F}(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$(**) \ \ f\left(t+h\right) = f\left(t\right) + f\left(h\right) \ \text{ pour tous } t, h \geq 0$$

On utilise maintenant le résultat :

Théorème 2.2 *Une fonction monotone f satisfaisant l'équation fonctionnelle*

$$(**) \ \ f\left(t+h\right) = f\left(t\right) + f\left(h\right) \ \textit{ pour tous } t, h \geq 0$$

doit être linéaire, c.-à-d.

$$f(t) = tf(1)$$

Remarque 2.3 *Il suffit de supposer que la fonction f soit mesurable, mais alors le théorème est beaucoup plus difficile à démontrer.*

Démonstration : À partir de $(**)$, on obtient que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \ , \ f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left((f(1))^{\frac{1}{n}}\right)^m = (f(1))^{\frac{m}{n}}$$

Montrons que $f(1) \neq 0$: si $f(1) = 0$ alors d'après ce qui précède f est nulle sur $\mathbb{Q}^+$, or on sait que pour tout réel $x > 0$, il existe r dans $\mathbb{Q}^+$ tels que $r \leq x$, comme f est décroissante, on aura alors $0 \leq f(x) \leq f(r) = 0$ donc $f(x) = 0$ et $f = 0$, ce qui est faux. Par conséquent les fonctions f et $x \mapsto (f(1))^x = e^{x \ln f(1)}$ coïncident sur $\mathbb{Q}^+$, comme ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^+$, on peut alors affirmer que $\forall x \geq 0$, $f(x) = e^{x \ln f(1)}$ On sait que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 - \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 0$ donc $\ln f(1) < 0$ et on peut écrire que

$$\forall x \geq 0 \ , \ F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ avec } \lambda = -\ln f(1) > 0$$

et on en déduit que la loi de X est une loi exponentielle ■ La fonction

$$\lambda(t) := \lim_{h \to 0} \frac{P[X \leq t + h \mid X \geq t]}{h} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = -\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)}$$

appelée «risque instantané» ou «taux de hasard/mort» offre encore une caractérisation importante d'une loi.

Exercice 2.39 *Montrez que la seule loi avec un taux de hasard constant $\lambda(t) = \lambda$ est la loi exponentielle.*

Exercice 2.40 *Montrez qu'à chaque fonction bornée $\lambda : \mathbb{R}_+ - > \mathbb{R}_+$ avec intégrale $\int_0^\infty \lambda(u)du = \infty$ on peut associer une loi de probabilité avec fonction de survie $\bar{F}(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$ et taux de hasard $\lambda(u)$.*

Remarque 2.4 *Le «taux de hasard/mort» immédiat $\lambda(0)$ coïncide pour une variable positive avec la densité $f(0)$*

$$\lambda(0) = \lim_{h \to 0} \frac{P[X < h | X \geq 0]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{P[X < h]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F_h}{h} = f(0)$$

La formule correcte au premier ordre pour h très petit

$$F_h \approx f(0)h$$

est souvent utilisée pour conditionner sur une arrivée en temps continu avant h. Pour une variable exponentielle X à paramètre λ par exemple, on utilise souvent

$$F_h \approx \lambda h,$$

au lieu de la formule exacte $F_h = 1 - e^{-\lambda h}$.

2.8 Exercices

1. Soit

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)(x+3)}, & x \geq 0 \\ 0 & X < 0 \end{cases}$$

a) Calculer la fonction $H(x) = \int_0^x h(u)du$
Est-ce que la fonction $h(x)$ est positive et integrable sur $[0, \infty)$?
b) Calculer k tel que la fonction $f(x) = kh(x), x \geq 0$ soit une densité.
Calculer la fonction de répartition $F(x) = \int_0^x f(u)du$.
c) Calculer la mediane m de $F(x)$.

2. Soient X et Y deux variable aléatoire indépendantes continues et positives, de densités respectives $f(x)$ et $g(y)$, et soit $S = X + Y$ leur somme.
a) Quelle est la densité $f(z) = f_S(z)$, si X et Y suivent la loi Exp$[\lambda]$?
b) Quelle est la densité $g(z) = g_S(z)$, si X et Y suivent respectivement les lois Exp$[\lambda_1]$ et Exp$[\lambda_2]$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$?
c) Trouver les transformées de Laplace $\widehat{f}(s) = \int_0^\infty f(z)e^{-sz}dz, \widehat{g}(s) = \int_0^\infty g(z)e^{-sz}dz$ dans les deux cas.

3. Une paire (X, Y) est choisi uniformément sur $A = \{x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \leq 6\}$.
   (a) Quelle est la densité conjointe $f_{X,Y}(x, y)$? Dessiner le domaine du plan sur lequel elle n'est pas nulle.
   (b) Quelle est la densité marginale de X ? Calculer l'espérance $E[X]$
   (c) Quelle est la densité conditionelle $f_{X|Y}(x|y)$?
   (d) Calculer l'espérance conditionelle $E[X|Y = y]$.
   (e) Calculer par deux méthodes l'espérance $E[E[X|Y]]$
4. Un point U est choisi uniformément sur $[0, 1]$. En suite, un point T est choisi uniformément sur $[0, U]$.
   (a) Calculer la densité conjointe $f(t, u)$ et dessiner le domaine du plan sur lequel elle n'est pas nulle.
   (b) Quelle est la densité marginale de T et la probabilité que $T > 1/2$?

Sol :

1. a) $H(x) = \int_0^x h(u)du = \frac{1}{2}(ln[\frac{x+1}{x+3}] - ln[\frac{1}{3}]) = \frac{1}{2}(ln[\frac{x+1}{x+3}] + ln[3]),\ H(\infty) = \frac{ln[3]}{2}$
b) $k = H(\infty)^{-1} = \frac{2}{ln[3]}$ c) $F(x) = \frac{2}{ln[3]}H(x) = \frac{ln[\frac{x+1}{x+3}]}{ln[3]} + 1$
d) $F(m) = 1/2 \iff ln[\frac{m+1}{m+3}] + ln[3] = \frac{ln[3]}{2} \iff ln[\frac{m+3}{m+1}] = ln[3^{\frac{1}{2}}], m + 3 = (m+1)\sqrt{3}, m = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}$
2. a) $\int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda u} e^{-\lambda(x-u)} du = \lambda^2 e^{-\lambda x} x$
b) $\int_0^x \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 u} e^{-\lambda_2(x-u)} du = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \int_0^x \lambda_1\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)u} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} e^{-\lambda_2 x}(e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} - 1) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x})$
c) $\widehat{f}(s) = (\frac{\lambda}{\lambda+s})^2, \widehat{g}(s) = (\frac{\lambda_1}{\lambda_1+s})(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+s})$

3. a) la densité conjointe est $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{3}$ b) la densité marginale de X est $f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)dy = \frac{2}{3} - \frac{2x}{9}$ et l'espérance $E[X] = \int_0^3 f_X(x)dx = 1$
c) la densité marginale de Y est $f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx = 1 - \frac{y}{2}, y \in [0,2]$ et la densité conditionelle pour $y \in [0,2[$ est $f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{3(1-\frac{y}{2})}, \forall x$, i.e. $\mathcal{L}(X|Y=y)$ est uniforme sur $[0, 3(1-\frac{y}{2})]$ d) L'espérance conditionelle est $E[X|Y=y] = \frac{3}{2}(1-\frac{y}{2})$. e) L'espérance iterée satisfait $E[E[X|Y]] = E[X] = 1$
4. Dans cet exercice, l'espace des probabilités est le triangle $\{0 \leq t \leq u \leq 1\}$, doté par la mesure $\frac{1}{u}dtdu$. Utilisons la décomposition des probabilités marginales (2.6)
$$f_T(t) = \int_{u=0}^1 f_{T/U=u}(t,u)dtdu = \int_{u=0}^1 \mathbb{1}_{t\leq u}\frac{1}{u}du = \log u|_t^1 = -\log t$$
De lors, $P[T > 1/2] = \int_{\frac{1}{2}}^1 -\log t dt = \frac{1}{2}(1 - Log2)$.

2.9 Contrôle continu

1. Une paire (X,Y) est choisi uniformément sur $A = \{x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \leq 6\}$.
   (a) Quelle est la densité conjointe $f_{X,Y}(x,y)$? Dessiner le domaine du plan sur lequel elle n'est pas nulle.
   (b) Quelle est la densité marginale de X ? Calculer l'espérance $E[X]$
   (c) Quelle est la densité conditionelle $f_{X|Y}(x|y)$?
   (d) Calculer l'espérance conditionelle $E[X|Y=y]$.
   (e) Calculer par deux méthodes l'espérance $E[E[X|Y]]$
2. Soit Z un v.a. avec loi de Poisson de paramètre λ.
a) Calculer les fonctions génératrice des probabilités (fgp) et des moments (fgm) de Z.
b) Calculer l'espérance et la variance de la loi de Poisson de paramètre λ à l'aide de la fonction fgp.
3. a) Quelle sont la fonction de répartition et la densité du carré d'une variable de loi normale $X \sim N(0,1)$?
b) Quelle est la densité du carré d'une somme des n variables i.i.d. de loi normale $X_i \sim N(0,1)$?
4. **Sommes aléatoires**. Soit $T = \sum_{i=1}^N Z_i$, où Z_i sont des variables exponentielles i.i.d de paramètre λ, et N est indépendante de Z_i, avec $P[N=k] = (1-p)p^{k-1}, k = 1, 2, ...$ Détérminer la fonction génératrice des moments de T, et sa fonction de survie $\bar{F}_T(x) = P[T > x]$.
5. a) Soit X une variable aléatoire continue de loi uniforme sur [0, 1]. Déterminer les lois de $Z_i = h_i(x), i = 1,2$, où $h_1(x) = 1 - x$ et $h_2(x) = min(x, 1-x)$. b) Déterminer les lois de $Z_3 = min(X_1, X_2)$, $Z_4 = X_1 + X_2$, $Z_5 = X_1 + X_2 + X_3$, $Z_6 = X_1^2 + X_2^2$, où X_1, X_2, X_3 sont des variable aléatoire i.i.d., de loi uniforme sur [0, 1].
c) Déterminer la loi de $Z = \sqrt{X_1} + \sqrt{X_2}$, où X_1, X_2 sont des variable aléatoire i.i.d., de loi uniforme sur [0, 1].

f:csu

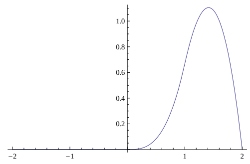


FIGURE 2.2 –

R :

$$f_{\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}}(x) = \begin{cases} \frac{2x^3}{3} & 0 < x \leq 1 \\ -\frac{2}{3}\left(x^3 - 6x + 4\right) & 1 < x < 2 \end{cases}$$

6. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = (k-1)\, p^2 (1-p)^{k-2} \text{ pour tout entier } k \geq 2,$$

où $p \in]0,1]$.

   (a) Déterminer la fonction génératrice des probabilités (fgp) de X.

   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $\text{var}(X)$.

   (c) On considère une pièce non équilibrée que l'on lance un nombre indéterminé de fois. La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$. Les lancers sont indépendants. On note T le temps d'attente du premier pile, c'est-à-dire le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir le premier pile.

      i. Quelle est la loi de T ? Que vaut $\mathbb{E}(T)$? (On ne demande pas de refaire le calcul).

      ii. On note maintenant S le temps d'attente du deuxième pile. Déterminer la loi de $S - T$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(S - T)$, puis de $\mathbb{E}(S)$.

      iii. Déterminer la loi de S et vérifier la cohérence avec les résultats obtenus dans la question **1.**

7. **Couple aléatoire.** Une étudiante donne rendez-vous à son ami entre 0 h. et 1 h. On suppose qu'ils arrivent indépendamment et à des instants uniformément distribués dans l'heure convenue. Les deux amis conviennent de n'attendre pas plus de 15 minutes (à l'initiative du jeune homme, qui est habitué à la ponctualité douteuse de sa copine, mais redoute sa susceptibilité). Soit X, Y les heures d'arrivée des deux copains, et A l'événement que les deux se rencontrent.

   (a) Tracer graphiquement le domaine du plan où la densité conjointe $f_{X,Y}(x,y)$ est nonnule le domaine du plan représentant l'événement A

   (b) Quelle est la probabilité pour que les deux amis se rencontrent ?

   (c) Supposons que le jeune homme arrive à une heure donnée t. Quelle est la probabilité qu'il rencontre sa copine ? Comment retrouver la reponse de la question precedente à partir de ce nouveau résultat ?

2.10 Examen d'entrainement

1. Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in]-\infty, \infty[$.
   (a) Vérifier que f est bien une densité. Donner son espérance et sa variance.
   (b) Quelle est la probabilité que l'équation $a^2 + Xa + 1 = 0$ possède : (a) Deux racines réelles distinctes ? (b) Une racine double ? (c) Deux racines complexes non réelles ?
2. Une paire (X, Y) est choisi uniformément sur $A = \{x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{4} + \frac{y}{3} \leq 1\}$.
   (a) Quelle est la densité conjointe $f_{X,Y}(x, y)$? Dessiner le domaine du plan sur lequel elle n'est pas nulle.
   (b) Quelle est la densité marginale de X ? Calculer l'espérance $E[X]$
   (c) Quelle est la densité conditionelle $f_{X|Y}(x|y)$?
   (d) Calculer l'espérance conditionelle $E[X|Y = y]$.
3. Un point U est choisi uniformément sur $[0, 2]$. En suite, un point T est choisi uniformément sur $[0, U]$.
   (a) Calculer la densité conjointe $f(t, u)$ et dessiner le domaine du plan sur lequel elle n'est pas nulle.
   (b) Quelle est la densité marginale de T et la probabilité que $T > 1$?
4. Soient X et Y deux variable aléatoire indépendantes continues et positives, de densités respectives $f(x)$ et $g(y)$, et soit $S = X + Y$ leur somme.
   a) Quelle est la densité $f(z) = f_S(z)$, si X et Y suivent la loi Exp$[\lambda]$?
   b) Quelle est la densité $g(z) = g_S(z)$, si X et Y suivent respectivement les lois Exp$[\lambda_1]$ et Exp$[\lambda_2]$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$?
   c) Trouver les transformées de Laplace $\widehat{f}(s) = \int_0^\infty f_S(z)e^{-sz}dz, \widehat{g}(s) = \int_0^\infty g_S(z)e^{-sz}dz$ dans les deux cas.

R :

1. a) $EX = 0, VarX = 2$ b) $P[X^2 - 4 > 0] = e^{-2}$, $P[X^2 - 4 = 0] = 0$, $P[X^2 - 4 < 0] = 1 - e^{-2}$.
2. (a) $f(x, y) = \frac{1}{6}\mathbb{1}_A$
   (b) $f_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{8}$
   (c) $f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{4(1-y/3)}$
   (d) $E[X|Y = y] = 2(1 - y/3)$
3. Dans cet exercice, l'espace des probabilités est le triangle $\{0 \leq t \leq u \leq 2\}$, doté par la mesure $\frac{1}{2u}dtdu$. Utilisons la décomposition des probabilités marginales (2.6)

$$f_T(t) = \int_{u=0}^{2} f_{T/U=u}(t, u)dtdu = \int_{u=0}^{2} \mathbb{1}_{t\leq u}\frac{1}{2u}du = \frac{1}{2}\log u|_t^2 = \frac{1}{2}(2 - \log t)$$

De lors, $P[T > a] = 1/2(2 - a(1 + Log[2]) + aLog[a])$. Pour $a = 1, P[T > 1] = 1/2(1 - Log[2])$.

2.11 Temps continu : la compétition des exponentielles

ex:compexp **Exercice 2.41 la dernière ampoule a s'éteindre, ou le coureur et la tortue**. *Soit $\{X_i, i = 1, 2\}$, deux variables exponentielles indépendantes à paramètres $\lambda_i, i = 1, 2$, qui représentent les temps nécessaires pour deux ampoules à s' éteindre, ou le temps des deux compétiteurs pour finir un parcours. Par exemple, $\lambda_2 = .01$ (la tortue), et $\lambda_1 = .99$ (le coureur).*

1. *Calculer les fonctions de répartition et survie de $V = \max[X_1, X_2]$.* **R :** $P[V \le t] = P[X_1 \le t, X_2 \le t] = (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t}) = 1 - e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$ $P[V > t] = e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$ *Rémarquez qu'il s'agit d'une combinaison d'exponentielles $P[V > t] = \sum_i w_i e^{-s_i t}$, avec , $\sum_i w_i = 1$, mais w_i pas forcement positifs.*
2. *la loi du minimum $U = \min[X_1, X_2]$.*
   R : $P[U > x] = P[\min[X_1, X_2] > x] = P[X_1 > x, X_2 > x] = e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}$ *Cet exercice est très simple en utilisant directement l'indépendance (sans passer par la densité conjointe, conditionnement ...) ! Pour comparaison, utilisons aussi une approche de décomposition en deux cas, calculables comme intégrales doubles : $P[U > x] = P[x < X_1 < X_2] + P[x < X_2 \le X_1] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}$ (cette approche peut également etre vue comme un conditionnement sur l'ordre des X_i).*
3. *Soit I la variable aléatoire définie par $U = X_I$. Calculer*
   $$P[I = 2, U > t],$$
   ainsi que la loi de la variable I donnant l'index qui réalise le minimum.
   R :
   $$P[I = 2, U > t] = P[t \le Y \le X] = \int_t^\infty f_2(y)dy(\int_y^\infty f_1[x]dx)$$
   $$= \int_t^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} e^{-\lambda_1 y} dy = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} = P[U > t]\ P[I = 2|U > t]$$
   Comme $P[I = 2|U > t]$ ne dépend pas de t, il suit que U, I sont des variables indépendantes [§] *! La généralisation de ce fait pour une compétition des n exponentielles est la fondation de la construction des processus de Markov en temps continu.*
4. *Soit $W = V - U$. Calculer $P[W > t|I = 1]$ et $P[W > t|I = 2]$*
5. *Calculer la fonction de survie $P[W > t]$ de W.*
6. *Montrer que U et W sont indépendantes.*
7. *calculer la transformée de Laplace $\varphi_V(s) = E[e^{-sV}]$ de V, et la décomposer comme produit des transformées de Laplace de deux lois. À partir de cette décomposition, suggérer une décomposition de V comme somme des deux variables independantes, avec des lois marginales qu'on identifiera.*
8. *Trouver la loi du minimum de n variables exponentielles indépendantes $\{X_i, i = 1, ..., n\}$, à paramètres $\lambda_i, i = 1, ..., n$, ainsi que la loi de la variable I qui donne l'index qui réalise le minimum.*
9. *Obtenez la loi du maximum V_n de n variables exponentielles indépendantes, avec paramètres égaux λ.* **R :** *$V_n = W_0 + W_1 + W_2 + W_{n-1}$, où W_i sont des variable aléatoire indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda(n - i))$.*

§. Cela est tout à fait surprenant (a priori, les chances de gagner sont .99 et .01 ; supposons que le temps de la course est très petit $U \sim 1/4$; paradoxalement, ça ne change en rien la proba que le coureur a gagné !).

Remarque 2.5 *Les lois intervenant dans cet exercice apartient a l'importante classe des lois $\mathcal{R}$ avec transformée de Laplace rationelle, appelées aussi lois matrice-exponentielles (car elles sont représentables comme $\bar{F}(t) = \boldsymbol{\alpha} e^{At} \mathbf{1}$, où A est une matrice, et $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{1}$ dénotent des vecteurs ligne et colonne).*

2.12 Variables aléatoires hybrides

Exercice 2.42 *Soit X une variable aléatoire continue uniforme sur [0, 1] et $p \in]0, 1[$.*

1. *Soit $Y = \mathbb{1}_{[X \le p]}$. Est-ce que la loi de Y est continue ?* **Ind :** *Faire une «simulation mentale» de Y un grand nb. de fois, et deviner sa mesure.*
2. *Construire à l'aide de X une variable aléatoire Z prenant les valeurs a, b et c avec probabilité p, q et r si p, q, r sont trois réels de [0, 1] tels que p + q + r = 1. Donnez une formule pour Z, une pour sa mesure associée, et une pour la fonction de répartition de Z.*

Exercice 2.43 *Soit X une variable continue positive. L'intégration par parties $EX = \int_0^\infty x f_X(x)dx = \int_0^\infty \bar{F}_X(x)dx - \lim_{x\to\infty} x\bar{F}_X(x)$ suggère l'existence d'une formule pour l'espérance, à partir de la fonction de survie $\bar{F}_X(x)$.*

1. *Proposer et démontrer un analogue de cette formule pour une variable discrète avec valeurs $X \in \{0, 1, 2, ...\}$.*
2. *Démontrer une formule pour l'espérance d'une variable continue positive X, à partir de sa fonction de survie $\bar{F}_X(x)$.*

R : 1) Le cas discret est simple, il s'agît de changer l'ordre de sommation. On trouve : $EX = \sum_{k\ge 1} P[X \ge k]$.

2) Sur deuxième réflexion, ça marche également dans le cas continu, après avoir écrit l'espérance comme une intégrale double $E(X) = \int_{0\le x} f(x) \left(\int_{0\le u\le x} du\right) dx$ et appliqué Fubini-Tonelli.

Remarque 2.6 *Dans le cas continu, la formule de l'intégration par parties suggère notre nouvelle formule, mais la démonstration demande de considérer une limite qui n'est pas immédiate. Par contre, le truc de passer a une intégrale double et d'utiliser Fubini-Tonelli rends le résultat immédiat.*

Remarque 2.7 *Cette formule est parfois – par exemple dans le cas des lois exponentielles et géométriques – plus vite a appliquer que la formule classique (de conditionnement sur toutes les valeurs possibles).*

Exercice 2.44 *Soit X une variable positive, et soit $X_a = \min[X, a]$.*

1. *Calculer $\bar{F}_{X_a}(x) = P[X_a > x]$. Donner une formule pour la mesure $\mu_{X_a}(dx)$.*
2. *Calculer $E[X_a]$, par 1) la définition de l'espérance et 2) par la formule $E[X] = \int_0^\infty \bar{F}_X(x)dx$.*

R : 1. $\bar{F}_{X_a}(x) = \begin{cases} \bar{F}_X(x) & 0 \le x < a \\ 0 & a \le x \end{cases}$, $\mu_{X_a}(dx) = f_X(x)\mathbb{1}_{\{0\le x<a\}}dx + \bar{F}_X(a)\delta_a(dx)$ 2. $E_{X_a} = \int_0^a x f_X(x)dx + a\bar{F}_X(a) = \int_0^a \bar{F}_X(x)dx$.

Exercice 2.45 *Soit X une variable continue positive, Y une variable discrète positive indépendante, avec $\mathcal{L}(Y) = \sum_{i=1}^2 c_i \delta_{a_i}$ et soit $X_a = \min[X, Y]$.*

1. *Calculer la fonction de survie* $\bar{F}_{X_a}(x) = P[X_a > x]$. *Donner une formule pour la mesure* $\mu_{X_a}(dx)$.
2. *Proposer une généralisation où* Y *est une variable discrète arbitraire.*

R : $\bar{F}_{X_a}(x) = \begin{cases} \bar{F}_X(x) & 0 \leq x < a_1 \\ c_2\bar{F}_X(x) = \bar{F}_Y(a_1)\bar{F}_X(x) & a_1 \leq x < a_2 \\ 0 & a_2 \leq x \end{cases}$

$\mu_{X_a}(dx) =$
$f_X(x)\mathbb{1}_{\{0\leq x<a_1\}}dx + c_2 f_X(x)\mathbb{1}_{\{a_1\leq x<a_2\}}dx + (1-c_2)\bar{F}_X(a_1)\delta_{a_1}(dx) + c_2\bar{F}_X(a_2)\delta_{a_2}(dx)$

Exercice 2.46 *Calculer l'espérance de la mesure*

$$\mu(dx) = \mathbb{1}_{\{0\leq x<\frac{1}{2}\}}dx + \frac{1}{3}\delta_2(dx) + \frac{1}{6}\delta_5(dx)$$

Exercice 2.47 *Soit* X *une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$. *Quelle est la loi de la variable aléatoire* $Y = 1 + \lfloor X \rfloor$ *? (*$\lfloor x \rfloor$ *désigne la partie entière de* x*).*

Remarque 2.8 Classification des fonctions de répartition. *Les variable aléatoire avec des fonctions de répartition continues (sans sauts) sont de deux types : absolument continues (comme vu ci-dessus, pour lesquelles la fonction de répartition* F *est la primitive d'une autre fonction* f *de densité) et singuliers. Pour les deuxièmes, voir «l'escalier du diable» http ://fr.wikipedia.org/wiki/Escalier_de_Cantor.*

Exercice 2.48 *Soit* F *une fonction de répartition absolument continue, et soit* x *un point de continuité de* $f(x)$. *Montrer que* F *est différentiable en* x, *et que*

$$F'(x) = f(x)$$

Remarque 2.9 *Pour les variables discrètes, la mesure* $\mu_X(]a,b]) := F_X(b) - F_X(a)$ *associée avec la variable est une mesure de Dirac*

$$\mu_X = \sum_i p_i \delta_{x_i},$$

avec $(p_1, p_2, ...)$ *un vecteur des probabilités.*

2.13 Variables aléatoires au sens de Kolmogorov, et mesures induites

La loi d'une variable aléatoire (variable aléatoire)=résultat d'un expériment aléatoire X (le vecteur des probabilités dans le cas discret et la densité au cas continu) permet a priori de répondre a toutes les questions concernant X. De lors, les premières trois siècles de l'histoire des probabilités ont été concernés exclusivement avec ce qu'on appelle aujourd'hui les lois de probabilité (géométrique, exponentielle, etc.). Il s'agissait de préciser une tabelle $f(x)$ associant aux valeurs possibles x de la variable des «poids de probabilités» correspondants (alternativement, on donnait la fonction de répartition cumulative $F(x)$, la fonction de survie $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, ou la fonction génératrice des moments/caractéristique). Tout ça a changé quand Kolmogorov a remarqué que la description de la formule produisant le résultat X à partir de «l»ensemble mère Ω» des toutes les expérimente(éventualités) possibles produisant la variable X pourrait etre utile en lui-même parfois, et cette observation a changé le sens du concept d'une variable aléatoire. La définition moderne identifie une variable aléatoire avec une fonction définie sur un «ensemble mère» Ω (des toutes les éventualités possibles), doté par une mesure mère» P.

Définition 2.4 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* $(V, \mathcal{V})$ *un espace mesurable. On appelle variable aléatoire de vers , toute fonction mesurable de* Ω *vers* V. *La mesure de probabilité «induite» par* X,

$$P_X(B) = P[X^{-1}(B)], \forall B \subset V,$$

appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X, *correspond a l'ancienne définition. Elle est obtenue dans le nouveau cadre comme image, par l'application* X, *de la «probabilité mère»* P *définie sur* Ω. *Pour* $V = \mathbb{R}, B = (-\infty, x]$, $P_X(b) = F_X(x)$ *coïncide avec la fonction de répartition cumulative classique*[§] .

L'idée de la définition de Kolmogorov aurait pu venir de la simulation.

Question 1 *Soit* U_n *la* **loi de la variable uniforme avec valeurs** $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{k}{n}, ..., \frac{n}{n} = 1\}$. *Comment simuler cette loi ?*

R : Une possibilité est de prendre un nombre X de loi uniforme en $[0, 1]$, et de le remplacer avec le bout droit $\frac{k}{n}$ de l'intervalle qui le contient. Cela ramène à considérer une fonction $f_n : [0, 1], -> \mathbb{R}, f_n(u) = \frac{\lceil nu \rceil}{n}$. On vérifie facilement que la loi P_{f_n} induite par la mesure de Lebesgue P sur $[0, 1]$ est la loi désirée U_n. Donc, la fonction f_n est une possibilité pour définir une variable aléatoire ayant loi U_n (d'autres possibilités existent, évidemment). Pour etre claire, il serait peut etre mieux de définir la variable aléatoire au sense de Kolmogorov comme le triple , $X_n = ((\Omega, \mathcal{F}, P), f_n, U_n)$ mais la pratique enracinée est d'utiliser la même notation pour notre triple X_n et pour la fonction f_n.

Exercice 2.49 *Calculer l'espérance de la variable uniforme avec valeurs* $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{k}{n}, ..., 1\}$, *ainsi que sa transformée de Laplace et fonction génératrice des probabilités, à partir de*

1. *la loi induite* U_n
2. *la mesure mère* P.

§. **Idées :** a. La théorie de l'intégration au sens de Lebesgue d'une fonction $f(x), f : A- > B$ suggère qu'il vaut mieux se baser sur des ensembles simples I (intervalles, ...) dans l'ensemble des images B, en faisant impasse sur leurs préimages potentiellement très compliquées en A. Brèvement, l'idée de de l'intégration au sens de Lebesgue est que l'essentiel se passe sur l'axe des y (images). b. La théorie des variables aléatoires avant Kolmogorov était formulée en termes des fonctions de répartition cumulative $F(y) : B- > \mathbb{R}$ (non-diminuantes, de saut total 1), définies sur l'espace des valeurs possibles $B \subset \mathbb{R}$ de la variable. Ces fonctions peuvent etre discrètes, avec support sur un ensemble dénombrable des sauts, absolument continues (satisfaisant $F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(u)du$), ou des «fonctions de Cantor» (satisfaisant $F'(x) = 0$ p.s. et avec support sur un ensemble nondénombrable). Les trois cas, ainsi que leurs mélanges, demandaient souvent des traitements différents. Kolmogorov a réalisé que même que «l'essentiel se passe toujours sur l'axe des valeurs y» il pourrait-etre utile à «rajouter un espace d'états mère universel Ω Les sous-ensembles $B \subset \mathbb{R}$ les plus importants sont les points avec mesure de l'image inverse positive (les «choc-chips»). Dans l' absence des «choc-chips», le sous-ensemble B le plus important est l'intervalle de support S avec mesure inverse 1, qu'on peut décrire encore par une «densité de mousse» $f : S- > \mathbb{R}$. Ces deux cas correspondent exactement aux lois (variable aléatoire aleatoires pre-Kolmogorov) discrètes et continues, et une mousse avec choc-chips ajoutés correspondra aux lois mélangées. c. En identifiant les variable aléatoire avec les fonctions sur un espace Ω de toutes les possibilités (un peu arbitraire,) Kolmogorov a mis les probabilités sur la fondation rigoureuse de l'analyse, et a aussi un traitement unifié des toutes les va, incluant même les variables de Cantor, ayant une densité avec support S de mesure 0.

Les avantages de la définition de Kolmogorov apparaissent dans l'étude des ensembles infinis des variable aléatoire (les processus stochastiques) § . Mais un premier avantage peut etre déjà perçu en considérant la convergence «en loi» des lois U_n quand $n \to \infty$ (vers la loi uniforme sur $[0, 1]$). Même que cet exercice n'est pas difficile, il est encore plus facile de vérifier la convergence des fonctions de Kolmogorov

$$\lim_{n\to\infty} f_n(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lceil nu \rceil}{n} = u$$

(et de remarquer que la fonction u induit la loi uniforme sur $[0, 1]$). Finalement, l'avantage principal de la définition de Kolmogorov est d'assimiler les variables aléatoires et les fonctions, qui sont les caractères principaux de l'analyse. Depuis Kolmogorov, les probabilités et l'analyse restent sur les mêmes fondations.

Exercice 2.50 *1. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur [0, 1]. Déterminer la fonction de répartition de* $Y = -ln(1 - X)$.

2. *Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur* $[0, 1]$. *Déterminer la fonction de répartition de* $Y = F^{-1}(X)$, *où* $F(y)$ *est une fonction de répartition absolument continue* $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(u)du$ *arbitraire.*
3. *Montrer que la variable aléatoire* $X = F[Y]$, *où* Y *est une variable aléatoire avec fonction de répartition absolument continue* $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(u)du$ *arbitraire, a une loi uniforme sur* $[0, 1]$.
4. *Preciser un triple de Kolmogorov (méthode de simulation) ayant comme loi induite la loi exponentielle.*
5. *Preciser un triple de Kolmogorov ayant comme loi induite une loi avec fonction de répartition absolument continue* $F(x)$ *arbitraire.*
6. *Preciser un triple de Kolmogorov (méthode de simulation) ayant comme loi induite la loi géométrique de paramètre* p. **Ind :** *Considerer la fonction* $f : [0, 1]- > \mathbb{R}, f(u) = \lfloor -\lambda^{-1} \ln(u) \rfloor + 1$. $P[f(u) = k] = P[k - 1 \leq -\lambda^{-1} \ln(u) < k] = P[e^{-\lambda(k-1)} \geq u > e^{-\lambda k}] = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = (e^{-\lambda})^{k-1}(1 - e^{-\lambda})$.

2.14 Le paradoxe des anniversaires (*)

Exercice 2.51 *Soit* n *le nombre des anniversaires possibles (sur la terre,* $n = 365$*). Un nombre infini des personnes passent par une porte, un par un. Soit* N *le nombre des personnes qui sont passées précédant la première coïncidence d'anniversaires ; ainsi,* $N \in \{1, ..., n\}$ § . *a) Calculer* $P[N > k], P[N \geq k], k = 1, 2, 3, ...$ **R :** $P[N > k] = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})...(1 - \frac{k}{n}) = \frac{(n-1)_{(k)}}{n^k} = k = 1, 2, 3, ...n$. $P[N \geq k] = P[N > k - 1] = \frac{(n-1)_{(k-1)}}{n^{k-1}}, k = 1, 2, 3, ...n$ *b) Calculer* $P[N = k], k = 1, 2, 3, ...$ **R :** $P[N = k] = P[N > k-1] - P[N > k], k = 2, 3, ...n$, $P[N = k] = 0, k = n+1, n+2, ...$ *c) Demontrer que* $\forall N \in \mathbb{N}, E[N] = \sum_{k=0}^{\infty} P[N > k] = \sum_{k=1}^{\infty} P[N \geq k]$. *d) Calculer* $Q_n := E[N]$*, dans notre exemple.*

§. Au lieu de décrire les processus par «familles consistantes des lois jointes», il est plus satisfaisant de voir toutes ces lois comme images d'une seule probabilité mère.

§. Voila aussi un autre scénario, ramenant à la même va : un pot contient n billets, numérotés $1, 2, ..., n$. On tire un billet et on le remet dans le pot. En suite un retire encore un, et ainsi de suite, en arrêtant au premier moment quand un nombre déjà tire réapparaît. Soit N le nombre des billets vus précédant la première réapparition.

R :

$$Q_n = E[N] = \sum_{k=1}^{n} P[N \geq k] = 1+(1-\frac{1}{n})+(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k}{n})+...(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{n-1}{n})$$

Les premières valeurs sont $Q_1 = 1, Q_2 = \frac{3}{2}, Q_3 = \frac{17}{9}$. Les prochaînes valeurs sont

$$\left\{\frac{71}{32}, \frac{1569}{625}, \frac{899}{324}, \frac{355081}{117649}, \frac{425331}{131072}, \frac{16541017}{4782969}, \frac{5719087}{1562500}\right\}$$

Cf. Mathematica 5.2, il semble impossible de simplifier, ou de trouver une récurrence simple satisfaite par cette suite. Par contre, il existe plusieurs approximations asymptotiques, obtenues souvent par des variations de la méthode de Laplace, qui donnent pour la valeur $1 + e_{365} \approx 24,6112$ avec précision 10^{-4}! **Un peu d'histoire** (*). Les premiers résultats/questions sur l'approximation de la fonction de Ramanujan Q_n (un cas particulier du taux de hasard Gamma) ont été implicitement formulés comme «exercices» par Ramanujan en 1911 et 1913 (première lettre à Hardy). Ces exercices ont été résolus et peaufinés par Szegó, Watson (1928), Knuth (1962), Flajolet et al (1992), et Jaansen, Leeuwaarden et Zwart (2007). La fonction Q_n donne aussi l'espérance du nombre d'essais N jusqu'a la répétition d'un anniversaire, et le pb. d'approximer la médiane de N a été résolu par Brink (2012). Ce dernier pb. date d'une observation de Davenport (1927), qui stipule que dans une classe de 23 étudiants, la probabilité d'avoir une coïncidence d'anniversaires est plus grande que .5. L'intéret des probabilistes dans la fonction Q_n de Ramanujan vient surtout du fait qu'elle est intimêment liée à la distribution de Poisson, car :

$$e^{-n}\frac{n^{n-1}Q(n)}{(n-1)!} = e^{-n}\left(\frac{n^{n-1}}{[n-1]!} + \frac{n^{n-2}}{[n-2]!} + ...\frac{n^{n-k}}{[n-k]!} + ... + 1\right) = P[Po(n) \leq n-1]$$

Rémarquons que

$$Q(n) = \frac{P[Po(n) \leq n-1]}{P[Po(n) = n-1]} = \frac{\int_n^\infty \gamma_n(u)du}{\gamma_n(n)}, \text{ où } \gamma_n(x) = e^{-x}\frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

est précisément l'inverse du taux de hasard en n de la densité $\gamma_n(x)$. Le pb. plus général d'approximer

$$P[Po(n) \leq s] = e^{-n}\left(\frac{n^s}{s!} + \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + ...\frac{n^{s-k}}{(s-k)!} + ... + 1\right) = \int_n^\infty e^{-u}\frac{u^s}{s!}du$$

ou d'approximer

$$Q_s(n) = \frac{P[Po(n) \leq s]}{P[Po(n) = s]} = \frac{\int_n^\infty \gamma_{s+1}(u)du}{\gamma_{s+1}(n)} := B_s^{-1}(n)$$

est de grand intéret pratique dans la théorie des files d'attente, car $B_s(n)$ représente la probabilité de perte d'Erlang dans un système avec s serveurs et intensité des arrivées n. La voie la plus simple pour obtenir de telles bornes passe par des représentations intégrales. Par exemple, Ramanujan, voir aussi Flajolet et Sedgewick, pg 115, avait proposé

$$Q_n = \int_0^\infty e^{-t}(1+t/n)^{n-1}dt \approx \sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + ...,$$

un cas particulier de

$$Q_n(s) = \int_0^\infty e^{-t}(1+t/n)^{s-1}dt \approx ...$$

Chapitre 3

Espérance conditionnelle par rapport a des tribus et variables arbitraires

3.1 Conditionnement par une variable aléatoire discrète, ou par une partition au plus dénombrable

s:vdis

Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs distinctes dans un espace fini $V = \{y_1, y_2, ...\}$, et soit $A_i = \{Y = y_i\} \subset \Omega$. On conditionne souvent sur les valeurs possibles y_i d'une telle variable discrète Y. Après avoir observé une valeur spécifique y_i de Y, on a bien sûr (1.1) :

$$E(X \mid Y = y_i) = E(X \mid A_i) = \frac{\int_{A_i} X \, dP}{P(A_i)}, \forall i = 1, ..., I. \tag{3.1}$$

Q : Comment définir $E(X \mid Y)$, avant que la valeur de Y soit connue ? Si la valeur de Y n'est pas encore connue, (3.1) suggère définir $E(X \mid Y)$ par des formules alternatives différentes, correspondant au cas qui sera observé ultérieurement :

$$E(X \mid Y)(w) = \sum_{i \in I} E(X \mid Y = y_i) \, \mathbb{1}_{\{Y=y_i\}}(w) = \begin{cases} E(X \mid A_1) & \text{si } w \in A_1 \\ E(X \mid A_2) & \text{si } w \in A_2 \\ \vdots & \\ E(X \mid A_I) & \text{si } w \in A_I \end{cases} \tag{3.2}$$

Exercice 3.1 *Brzezniak Exemple 2.3. Calculer $E(X \mid Y)(w)$ si*

$$\Omega = [0, 1], \quad X(w) = 2w^2, \quad Y(w) = \begin{cases} 1 & w \in [0, 1/3) \\ 2 & w \in [1/3, 2/3] \\ 0 & w \in (2/3, 1] \end{cases}$$

Consequences de la définition de léspérance conditionnelle (3.2)**.**

1. La définition (3.2) implique $E(X \mid Y)$ est une variable aléatoire, mesurable par rapport à la tribu $\sigma(Y)$, ce qui se traduit ici en une variable aléatoire constante sur les mêmes ensembles que Y.
2. Le côté droit de l'égalité (3.2) dépend de Y seulement par la tribu $\sigma(Y) = \{A_1, ..., A_I\}$ engendrée par Y (c.-à-d. la tribu minimale par rapport a laquelle Y est mesurable) et pas sur les valeurs spécifiques y_i. Par conséquent, elle définit plutôt $E[X \mid \sigma(Y)]$, ce qui suggère de voir (3.2) plutôt comme une définition de $E[X \mid \mathcal{B}]$, où $\mathcal{B}$ est la tribu engendrée par la partition. En suite,

Définition 3.1 *Pour toute variable aléatoire discrète Y on définira l'espérance conditionnelle de X par rapport à Y par*

$$E(X \mid Y) = E[X \mid \mathcal{B}], \text{ où } \mathcal{B} = \sigma(Y). \tag{3.3}$$

Remarque 3.1 *Si nous savions aussi définir $E[X \mid \mathcal{B}]$, où $\mathcal{B}$ est une tribu arbitraire, nous saurions immédiatement par la même stratégie définir $E[X \mid Y] = E[X \mid \sigma(Y)]$, où Y est une variable aléatoire arbitraire.*

3. Pour Y discret, une propriété intéressante de léspérance conditionnelle (3.2) est :

$$\int_{A_i} E(X \mid Y)\, dP = E(X \mid A_i)\ P[A_i] = \int_{A_i} X dP, \quad \forall A_i \in \sigma(Y)$$

Kolmogorov a introduit une définition générale (mais non constructive) de $E[X \mid \mathcal{B}]$, comme une v.a satisfaisant aux propriétés ci-dessus –voir la prochaine section. L'unicité de cette définition vient de :

l:z **Lemme 3.1** *Si une variable $X \in \mathcal{B}$ satisfait*

$$\int_B X = 0,\ \forall B \in \mathcal{B}, \quad \text{alors } X = 0 \text{ p.p.}$$

Ind : $P[|X| \geq 1/n] = 0, \forall n$.

Exercice 3.2 *Brzezniak Exercices 2.3-2.5, et Prop. 2.1.*

Kolmogorov a introduit l'espérance conditionnelle par rapport à une sous tribu $\mathcal{B}$ (ou une variable Y) arbitraire, pas forcement discrète comme une fonction satisfaisant cette propriété :

t:K **Théorème 3.1** - *(définition de l'espérance conditionnelle pour des tribus arbitraires) - Soit X une variable aléatoire réelle intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors*

1. *Pour toute sous tribu $\mathcal{B}$ il existe une variable aléatoire appelée espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, et notée $E(X \mid \mathcal{B})$ ou $E^{\mathcal{B}}(X)$, telle que :*

   (i) $E(X \mid \mathcal{B})$ *est $\mathcal{B}$-mesurable*

   (ii) $\int_B E(X \mid \mathcal{B})\, dP = \int_B X dP,\ \forall B \in \mathcal{B} \iff$
   $E[U\ [E(X \mid \mathcal{B})] = E[U\ X], \forall U \in \mathcal{B},\ U \text{ borné}$

2. *Toute variable aléatoire Z satisfaisant **(i), (ii)** est égale a $E(X \mid \mathcal{B})$ p.p.*[1]

1. *Démonstration* : • Supposons que $X \geq 0$: on définit une mesure positive ν sur $\mathcal{B}$ en posant :

$$\forall B \in \mathcal{B},\ \nu(B) = \int_B X dP$$

Comme X est intégrable, ν est une mesure finie et elle est absolument continue par rapport à P (*en effet* : $P(B) = 0 \Rightarrow \nu(B) = 0$ car on intègre sur un ensemble négligeable). D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe une fonction f, $\mathcal{B}$-mesurable et intégrable telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B},\ \nu(B) = \int_B f dP$$

(en toute rigueur, on devrait écrire $P_{|\mathcal{B}}$ au lieu de , P mais ces deux mesures coïncident sur $\mathcal{B}$ ...). Il est alors clair que f vérifie

Finalement, la probabilité conditionnelle par rapport à une tribu est juste un cas particulier de l'espérance conditionnelle :

Définition 3.2 *Pour tout A de $\mathcal{A}$, on appelle probabilité conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}$ la variable aléatoire notée $P^{\mathcal{B}}(A)$ ou $P(A \mid \mathcal{B})$ définie par :*

$$P(A \mid \mathcal{B}) = E(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{B})$$

Idée intuitive : On a défini ainsi l'espérance conditionnelle $E[X|\mathcal{B}]$ **avant qu'on sache** dans quel ensemble $B \in \mathcal{B}$ (ou dans quelle partie d'une partition finie $\mathcal{B} = A_1 \cup A_2 ...$) on se trouve. Le résultat est une variable aléatoire représentant toute l'information qu'on pourra obtenir plus tard sur X quand on variable aléatoire découvrir le cas A_i qui s'est passé. Bien sûr, après avoir découvert l'ensemble A_i, l'espérance conditionnelle de X devienne juste une moyenne pondérée

$$E(X \mid A_i) = \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X dP.$$

Avant de connaitre le cas pourtant, l'espérance conditionnelle est elle même une variable aléatoire, mesurable par rapport a la tribu plus «'grossière»$\mathcal{B}$, ce qui revient à dire dans le cas ou $\mathcal{B}$ est fini qu'elle est constante sur les ensembles générateurs de $\mathcal{B}$.

Remarque 3.2 *(*) Il n'y a pas d'***unicité** *«absolue» de $E(X \mid \mathcal{B})$, mais seulement p.s.-P. Chaque v.a. vérifiant (i) et (ii) est appelée une version de l'espérance conditionnelle. Toutefois, deux versions Y_1 et Y_2 sont presque sûrement égales (p.s. ou p.p.-P) par la lemme 3.1, car $\forall B \in \mathcal{B}$, $\int_B Y_1 dP = \int_B Y_2 dP$.Il y a donc unicité p.s.-P et on parle de l'espérance conditionnelle en choisissant l'une des versions.*

Exemples : $\boxed{1}$ $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$: Soit X une v.a.r. intégrable. (i) $\Rightarrow E(X \mid \mathcal{B}) = k$ constante réelle. D'où :

$$\begin{aligned}\int_\Omega E(X \mid \mathcal{B})\, dP &= \int_\Omega k dP = kP(\Omega) = k \\ &= \int_\Omega X dP = E(X) \text{ d'après (ii)}\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que : $\boxed{E(X \mid \mathcal{B}) = E(X)}$ $\boxed{2}$ $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ avec A dans $\mathcal{A}$ tel que : $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$: Soit X une v.a.r. intégrable. La variable aléatoire $E(X \mid \mathcal{B})$ est $\mathcal{B}$-mesurable donc de la forme $\alpha \mathbb{1}_A + \beta \mathbb{1}_{A^c}$ avec α, β réels. (ii) $\Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}$, $\int_B X dP = \int_B (\alpha \mathbb{1}_A + \beta \mathbb{1}_{A^c})\, dP = \alpha P(A \cap B) + \beta P(A^c \cap B)$ En prenant $B = A$, on obtient : $\int_A X\, dP = \alpha P(A)$ d'où $\alpha = \frac{1}{P(A)} \int_A X\ dP$ En prenant $B = A^c$, on obtient : $\int_{A^c} X\ dP = \beta P(A^c)$ d'où $\beta = \frac{1}{P(A^c)} \int_{A^c} X dP$. Ainsi : $E(X \mid \mathcal{B}) = \dfrac{1}{P(A)} \left(\int_A X dP\right) \mathbb{1}_A + \dfrac{1}{P(A^c)} \left(\int_{A^c} X dP\right) \mathbb{1}_{A^c}$

---

les propriétés (i) et (ii). • Si X n'est pas positive alors on écrit $X = X^+ - X^-$ avec $X^+ = Sup(X, 0)$ et $X^- = Sup(-X, 0) = -Inf(X, 0)$. Les variables X^+ et X^- sont alors positives (et intégrables) et on pose alors :

$$E(X \mid \mathcal{B}) = E\left(X^+ \mid \mathcal{B}\right) - E\left(X^- \mid \mathcal{B}\right) \ \blacksquare$$

Remarque : Si X est dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace de Hilbert, alors on peut également définir $E(X \mid \mathcal{B}) = E^{\mathcal{B}}(X)$ comme la projection orthogonale de X sur le sous-espace vectoriel fermé $L^2(\mathcal{B})$ formé des classes d'équivalences $\overline{f}$ (pour l'égalité p.s.) des éléments f de $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P_{|\mathcal{B}})$. Cet espace $L^2(\mathcal{B})$ est souvent identifié à $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P_{|\mathcal{B}})$ car ils sont isomorphes (sans être forcément égaux !).

$\boxed{3}$ $\mathcal{B} \supset \sigma X$: $X \in \mathcal{B}$ (c.-à-d. $\mathcal{B}$-mesurable) entraine

$$E\left(X \mid \mathcal{B}\right) = X$$

(le côté droit satisfait évidemment la définition de l'espérance conditionnelle, et l'unicité p.p. est assuré par la Lemme 3.1).

Remarque 3.3 *En prenant en* ***(ii)*** *pour B tout l'espace Ω, où en prenant $U = 1$ en* ***(ii)*** *on obtient une loi ET*

$$\boxed{EE\left(X \mid \mathcal{B}\right) = EX}$$

sur des espaces de probabilité générale ! Outrement dit, Kolmogorov défini l'espérance conditionnelle comme l'objet qui satisfait la loi ET, et ça encore sur chaque sous-ensemble $B \in \mathcal{B}$. Dans le cas particulier $\mathcal{B} = \sigma(E_1, ..., E_I)$, on retrouve la loi ET somme :

$$EX = \sum E(X\, \mathbb{1}_{E_i}) = \sum P\left(E_i\right) E\left(X \mid E_i\right)$$

Les lois PT, ET deviennent :

$$P\left(A\right) = \sum P\left(Y = y_i\right) P\left(A \mid Y = y_i\right) = \sum_{y \in V} p_Y(y)\ P\left(A \mid Y = y\right)$$
$$E\left(X\right) = \sum P\left(Y = y_i\right) E\left(X \mid Y = y_i\right) = \sum_{y \in V} p_Y(y)\ E\left(X \mid Y = y\right)$$

où $p_Y(y)$ dénote la fonction de masse de la variable Y.

3.2 Conditionnement par rapport à une tribu arbitraire

s:va

Définition 3.3 *Pour toute variable aléatoire Y on défini l'espérance conditionnelle de X* <u>*sachant Y*</u> *par*

$$E\left(X \mid Y\right) = E\left[X \mid \sigma(Y)\right], \forall Y \in \sigma(Y). \tag{3.4}$$

La difficulté d'appliquer cette définition consiste au fait qu'elle n'est pas explicite. Si nous avions une formule, il serait a priori facile de vérifier qu'elle satisfait la définition. **Q :** Mais comment trouver une telle formule ? L'exemple 2.4 et les exercices 2.6-2.17 de Brzezniak nous montrent comment procéder, cas par cas...

Remarque 3.4 Exemple 2.4 décortiqué. *L'exemple 2.4 pour le calcul de $E\left(X \mid Y\right)$ où $X = \xi(W), Y = \eta(W)$ est déconcertant par rapport à la spécification traditionnelle des variable aléatoire par densités/distributions de masse, et par rapport à la méthode traditionnelle de calcul de $E\left(X \mid Y\right)$ à partir de la distribution jointe. Mais, la distribution jointe n'est pas spécifiée dans l'exemple, et ça ne rajoute pas grand-chose à la calculer. Par contre, l'exemple nous dévoile un peu la vision alternative de Kolmogorov, qui remplace toutes les distributions jointes dans un problème par une seule* **variable monde/universelle** *W ≪traditionnelle≫ avec distribution $P(dw)$. Les autres variable aléatoire sont des fonctions spécifiques de W, et leurs distributions sont induites par cette dépendance fonctionnelle. L'espérance conditionnelle $E\left(X \mid Y\right)$ est très simple quand $X = \xi(W), Y = \eta(W)$ sont produits pas des fonctions injectives, car dans ce cas*

$$X = \xi(W) = \xi \circ \eta^{(-1)}(Y) \tag{3.5}$$

se calcule à partir de Y en composant les deux fonctions ξ et $\eta^{(-1)}$. Le défi est de comprendre comment modifier (3.5) *dans l'absence de l'injectivité.*

Lemme 3.2 **Lemme de Doob-Dynkin** *Soient X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ respectivement. a) Si Z est $\sigma(Y)$-mesurable alors il existe une fonction borélienne φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Z = \varphi(Y)$. b) Il existe une fonction borélienne «Doob-Dynkin» ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $E(X \mid Y) = \phi(Y)$.*

L'exemple 2.4 nous illustre le cas où la variable monde est très simple, car la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ est juste la distribution d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, est la variable Y est un mélange d'une variable discrète $Y = 2$ et une variable continue produite pas une fonction injective identité. L'espérance conditionelle se construit en moyennant les valeurs de X sur la partie discrète, et par composition des fonctions sur la partie continue.

Remarque 3.5 *Le cas du* **conditionnement par des valeurs des variables continues** Y **ou discrètes** *ramène aux* **formules usuelles**, *comme*

$$E(X \mid Y = y) = \varphi(y) = \int x f_{X/Y}(x/y)dx = \frac{\int x f_{X,Y}(x,y)dx}{\int f_{X,Y}(x,y)dx} \tag{3.6}$$

Aussi, les lois PT et ET pour le cas quand on conditionne sur les valeurs prises par une variable **réelle** *discrète ou continue se réduisent aux formules bien connues :*

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_y P(A \mid Y = y)\ f_Y(y)dy, \\ EX &= \int_y E(X \mid Y = y)\ f_Y(y)dy \\ EX &= \sum_i E(X \mid Y = y_i)\ P(Y = y_i) \end{aligned}$$

Exercice 3.3 *Modélisation : Brzezniak Exercices 2.13 (parametriser sur $[0,1]^2$).*

Exercice 3.4 *Fonction de Doob-Dynkin : Brzezniak Exercices 2.7-2.9. Sol : Par* (3.6),

$$E(X \mid Y = y) = \varphi(y) = \frac{\int x(x+y)dx}{\int (x+y)dx} = \frac{1/3 + y/2}{1/2 + y} = \frac{2+3y}{3+6y}$$

Nous avons vu deux cas simples où la fonction de Doob-Dynkin $\mathrm{EX}|\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{Y})$ est calculable : le cas (plutôt théorique) où les variables X, Y sont produites de la «variable monde par des fonctions injectives, et le cas où les variables X, Y ont une distribution jointe connue.

Exercice 3.5 *L'exercice 2.6 ajoute un nouveau cas : η bijective. Une approche générale pour déterminer la fonction de Doob-Dynkin commence par fixer un ensemble infinitésimal $y^+ = [y, y + dy]$ des valeurs possibles de $Y = \eta(w)$, et en suite par déterminer l'ensemble des préimages $A_{dy} = \eta^{-1}(y_+) = \cup_{i=1}^{I} y_i^+$, où I est le nombre des images inverses correspondant a y^+. En suite, on associe à chaque image inverse la mesure $w_i = \frac{P[y_i^+]}{\sum_{i=1}^{I} P[y_i^+]}$. Finalement,*

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{I} \xi(y_i) w_i.$$

Dans l'exercice 2.6 la mesure w_i est uniforme par symétrie ce qui résulte en

$$\varphi(y) = \frac{\xi(y/2) + \xi(1 - y/2)}{2}, y \in [0,1].$$

Ou, comme $y/2 = w$ *pour* $w \leq 1/2$,

$$\mathrm{E[X|Y](w)} = \frac{\xi(\mathrm{w}) + \xi(1-\mathrm{w})}{2}$$

qui est valable en effet pour tout $w \leq 1$. *Défi 1 : Repetons cet exercice, quand* P *est une mesure nonuniforme, par exemple avec densité proportionnelle à* $x^{-1/2}$ § . *Défi 2 (*) : Repetons cet exercice, quand* η *est la fonction de Cantor.*

Exercice 3.6 *Brzezniak 2.14-2.15 (application de la définition de Kolmogorov), et 2.17.*

Remarque 3.6 *Il ne faut pas oublier que dans le cas continu, les fonctions conditionnelles* $P(A \mid Y = y), E(X \mid Y = y), f_{(X|Y)}(x \mid y)$ *sont seulement définies p.p, et qu' en fixant une valeur précise pour* y *on peut arriver a des contradictions, comme le paradoxe de Borel-voir (Pitman, http ://www.stat.berkeley.edu/users/pitman/s205f02/index.html lec 15 : pour une variable aléatoire uniforme dans le demi-cercle* $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$ *on a*

$$\lim_{\alpha \to 0} P[Y \geq 1/2 || \theta - \pi/2| \leq \alpha] = \frac{3}{4} \neq P[Y \geq 1/2 | \theta = \pi/2] = \frac{1}{2}$$

3.3 Propriétés de l'espérance conditionnelle

pro **Proposition 3.1** *Soit* X *une variable aléatoire intégrable définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *et* $\mathcal{B}$ *une sous-tribu. On a alors les propriétés suivantes :*

(1) $X = a$ *constante réelle* $\Rightarrow E(X \mid \mathcal{B}) = a$
(2) $E(. \mid \mathcal{B})$ *est linéaire*
(3) $X \geq 0 \Rightarrow E(X \mid \mathcal{B}) \geq 0$
(4) $X \leq Y \Rightarrow E(X \mid \mathcal{B}) \leq E(Y \mid \mathcal{B})$
(5) $|E(X \mid \mathcal{B})| \leq E(|X| \mid \mathcal{B})$
(6) $E(E(X \mid \mathcal{B})) = E(X)$

(7) *Soient* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$ *deux sous-tribus de* $\mathcal{A}$ *telles que :* $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. *Alors on a :*

$$E(E(X \mid \mathcal{B}) \mid \mathcal{C}) = E(E(X \mid \mathcal{C}) \mid \mathcal{B}) = E(X \mid \mathcal{C})$$

(8) *Supposons maintenant que* X, Y *et* XY *sont intégrables, et* X *est* $\mathcal{B}$*-mesurable ; alors on a :*

$$E(XY \mid \mathcal{B}) = XE(Y \mid \mathcal{B})$$

Exercice 3.7 *Démontrer la dernière propriété. Ind : Considerer d'abord le cas de* X *borné.*

Exercice 3.8 *Démontrer :*

$$E[X/Z_1, \ldots, Z_k] = EE[X/Y_1, \ldots, Y_j, Z_1, \ldots Z_k]$$

pour le cas des variables discrètes.

---

§. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ avec $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ et soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ avec $\Omega_2 \subset \mathbb{R}$. Alors on a : $E(X \mid Y) = \varphi(Y)$ où φ est définie sur $A = \{y \in \Omega_1 \,;\, f_Y(y) \neq 0\}$ par :

$$\varphi(y) = \int x dP_X^{[Y=y]}(x) = \int x f_X^{[Y=y]}(x) \, d\mu_2(x)$$

où on a supposé pour la deuxième formule que P_X admet une densité f_X par rapport à une mesure σ-finie μ_2 sur Ω_2 et que $P_{(X,Y)}$ admet une densité $f_{(X,Y)}$par rapport à $\mu_2 \otimes \mu_1$ où μ_1 est une mesure σ-finie sur Ω_1.

R : Since the collections of random variables $Z_1, \ldots, Z_k$ and $Y_1, \ldots, Y_j$ can be both viewed as single vector variables $Y = Y_1, \ldots, Y_j$, $Z = Z_1, \ldots, Z_k$, this is équivalent to showing that

$$E[X/Z] = EE[X/Y, Z] \tag{3.7}$$ on

We will only establish this for discrete random variables and in its simplest form stating that

$$E[X] = E\ E[X/Y] \tag{3.8}$$ tw

(The apparently more general form (3.7) reduces to applying the (3.8) for each fixed value $Z = z$.) Let us denote by p_x the probability that X takes a certain value x, so that $E[X] = \sum_x xp_x$. Let us dénote by $p_{x,y}$ the joint probabilités and by $p_{x/y}$ the conditionnel probabilité that $X = x$ given that $Y = y$, so that $E[X/Y = y] = \sum_x xp_{x/y}$. Alors,

$$\begin{aligned} E\ E[X/Y] &= \sum_y p_y E[X/Y = y] = \sum_y p_y (\sum_x xp_{x/y}) \\ &= \sum_{y,x} xp_y p_{x/y} = \sum_{y,x} xp_{x,y} = \sum_y xp_x \\ &= E[X] \end{aligned}$$

Chapitre 4

s:conv

Convergence des variables aléatoires

4.1 Convergence en loi

Exercice 1 *Soit X_n une variable aléatoire binomiale de loi $B(n, p_n)$. Si $np_n \to \lambda > 0$, alors X_n converge en loi vers une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $P(\lambda)$.*

Ind : Pour les variables aléatoires discrètes, la convergence en loi est équivalente à la convergence des probabilités $p_n(k) = P[X_n = k]$.

d:loi

Définition 4.1 *Les variables aléatoires X_n converge en loi vers une variable aléatoire X ssi une des trois conditions équivalentes ci-dessous est satisfaite :*

1. *Pour chaque fonction continue et bornée f, on a*
$$Ef(X_n) \to Ef(X).$$
2. *Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on a*
$$Eexp(itX_n) \to Eexp(itX).$$
3. *Pour chaque point x où $F_X(x)$ est continue, on a*
$$F_{X_n}(x) \to F_X(x).$$

ex:key

Exercice 2 *Soit X_n une variable aléatoire de loi uniforme sur $i/n, i = 1, ..., n$. Montrer que X_n converge en loi vers X de loi uniforme sur [0, 1], par toutes les trois méthodes de démontrer convergence en loi.*

Exercice 3 *Soit X_n une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre d'arrêt $p = \frac{\lambda}{n}$. Alors $Y_n = X_n/n$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle $Exp(\lambda)$, par toutes les trois méthodes de démontrer convergence en loi.*

Sol : a) $\bar{F}_{Y_n}(y) = P[X_n > yn] = (1 - \frac{\lambda}{n})^{\lceil yn \rceil - 1} \approx e^{-\frac{\lambda}{n}(\lceil yn \rceil - 1)} \to e^{-\lambda y}$. b) $Ee^{sX_n/n} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{sk/n}(1 - \frac{\lambda}{n})^{k-1}\frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{n}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{s/n}(1 - \frac{\lambda}{n}))^k = \frac{\lambda}{n}\frac{1}{1 - e^{s/n}(1 - \frac{\lambda}{n})} \to \frac{1}{\lambda - s}, \forall s$ c) (*) On considère séparément $\sum_{k=0}^{\lceil yn \rceil}$ et $\sum_{\lceil yn \rceil}^{\infty}$ et on laisse $y \to \infty$.

Exercice 4 *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ (c.-à-d. $f_{X_n}(x) = I_{[0,1]}(x)$). On pose $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ pour $n \geq 1$. Montrer que $n(1 - M_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et donner la fonction de répartition de X. Généraliser pour X_n de loi arbitraire avec support $[0, b]$.*

Exercice 5 *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle* $\mathcal{E}(\lambda)$ *où* $\lambda > 0$ *(c.-à-d.* $f_{X_n}(x) = \lambda e^{-\lambda x} I(x > 0)$*). On pose* $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ *pour* $n \geq 1$*.*

a. *Déterminer la fonction de répartition de* M_n*.*

b. *Montrer que*

$$F_{M_n - \lambda^{-1}\log n}(x)$$

convergent vers une fonction $F(x)$*, qu'on déterminera.*

c. *Généraliser pour le cas de* X_n *de loi arbitraire avec support* $[0, \infty)$*, qui satisfont* $\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = k > 0$*.*

Exercice 6 *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires réelles de f.d.r.* F_{X_n} *définies par*

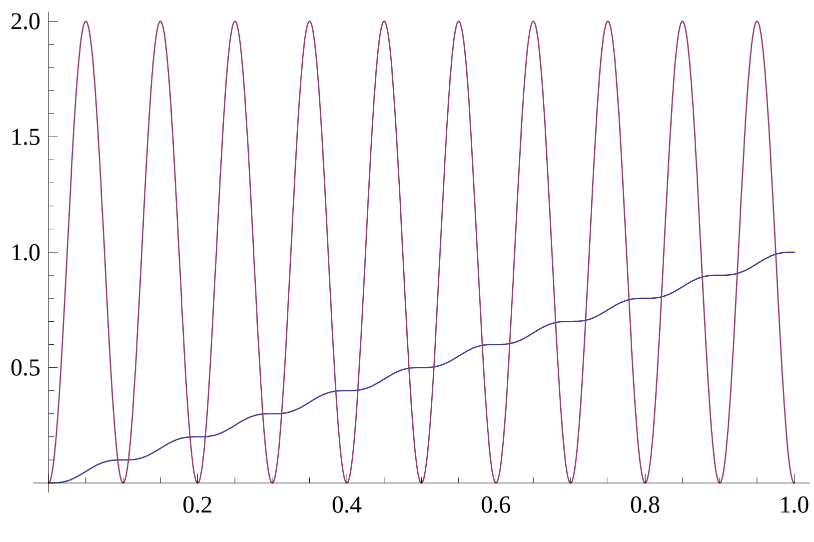
$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad x < 0, \\ x - \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} & \textit{si} \quad x \in [0, 1], \\ 1 & \textit{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

a. *Montrer que pour tout* $n \geq 1$*,* X_n *admet une densité* f_{X_n}*.*

b. *Montrer que* X_n *converge en loi vers une variable aléatoire* X *admettant une densité* f_X*.*

c. *Montrer que* $(f_{X_n})_{n\geq 1}$ *ne converge pas vers* f_X *(illustrant l'insuffisance des densités pour décrire la convergence en loi).*

Sol : a. $F_{X_n}(x) = \int_0^x (1 - \cos(2\pi n u))du \implies f_{X_n}(x) = 1 - \cos(2\pi n x)$ b. $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = x, \forall x \in [0, 1]$



Exercice 7 *Est-ce que la convergence en loi implique toujours la convergence des :*

1. *densités ?*
2. *moments ?*
3. *fonctions caractéristiques ?*
4. *fonctions de répartition, presque partout ?*

4.2 Types de convergence des fonctions en analyse : presque partout, en moyenne, et en probabilité

Exercice 8 *Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $X_n = (-1)^n X$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

a. *Déterminer la loi de X_n.*

b. *Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi.*

c. *Quid de la convergence en probabilité de $(X_n)_{n\geq 1}$?*

Exercice 9 *Demontrer les inégalités :*

1. **L'inégalité de Markov**. *Soit X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé, prenant des valeurs positives $X \in I \subset \mathbb{R}_+$ p.s. Alors*

$$b \in I \Longrightarrow P[X \geq b] \leq \frac{EX}{b}$$

2. **L'inégalité de Markov généralisé**. *Soit $f : I- > \mathbb{R}$ une fonction croissante et positive. Alors,*

$$b \in I \Longrightarrow P[X \geq b] \leq \frac{Ef(X)}{f(b)}$$

3. **L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev**. *Soit une variable aléatoire d'espérance m et de variance finie σ^2 (l'hypothèse de variance finie garantit l'existence de l'espérance). Montrer que pour tout réel strictement positif*

$$b > 0 \Longrightarrow P[|X-m| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$$

4. **L'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète**

$$\sum |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum |x_i^2|}\sqrt{\sum |y_i^2|}$$

5. **L'inégalité de Cauchy-Schwarz** *continue :*

$$E|f(X)g(X)| \leq \sqrt{Ef^2(X)}\sqrt{Eg^2(X)}$$

Exercice 10 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires.*

a. *Montrer que si la suite converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X, alors elle converge aussi en moyenne.* **Ind :** *Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz $E|X| \leq [E(X^2)]^{1/2}$.*

b. *Montrer que si une suite converge en moyenne vers une variable aléatoire X, alors elle converge aussi en probabilité.* **Ind :** *Utiliser l'inégalité de Markov*

c. *Montrer que si une suite converge en L_p vers une variable aléatoire X, alors elle converge aussi en probabilité.*

Exercice 11 *Lien entre la convergence en probabilité et la convergence en loi.*

1. *Soit* $(X_n)_n \in \mathbb{R}^d$ *une suite de variables aléatoires et* $X \in \mathbb{R}^d$ *une variable aléatoire définies sur le même espace de probabilités* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
On suppose que les $(X_n)_n$ *convergent en probabilité vers* X. *Soit* f *une fonction continue de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que pour tout* $\epsilon, a > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que*
$$\{|f(X_n) - f(X)| > \epsilon\} \subset \{|X| > a\} \cup \{|X_n - X| > \inf(\eta, a)\}$$
En choisissant convenablement a, *en déduire que* $(f(X_n))_n$ *converge en probabilité vers* $f(X)$.
2. *Montrer que la convergence en probabilité implique convergence en loi.*
Ind : *Soit* $C_{n,\epsilon} = \{|X_n - X| \leq \epsilon\}, D_{n,\epsilon} = \{|X_n - X| > \epsilon\}$, *où* ϵ *est tq* $P[D_{n,\epsilon}] \leq \delta$, *et* $\varphi(x) = e^{itx}$. $E|\varphi(X_n) - \varphi(X)| = \int_{C_{n,\epsilon}} |\varphi(X_n) - \varphi(X)| dP + \int_{D_{n,\epsilon}} |\varphi(X_n) - \varphi(X)| dP \leq \int_{C_{n,\epsilon}} |\varphi(X_n - X)| dP + 2\delta$. *Sur* $C_{n,\epsilon}$, $X_n - X$ *est bornée. Utilisant le fait qu'une fonction continue sur un intervalle borné est uniformément continue, on aurait pu choisir* ϵ *aussi tq* $\varphi(z) \leq \epsilon, \forall z \in [0, \epsilon]$. *Pour ce choix,* $E|\varphi(X_n) - \varphi(X_n)| < 3\delta \to 0$.
Alternativement, montrer que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall f \in C_b(\mathbb{R}),\ \left| \int_{\mathbb{R}} f d\mathcal{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f d\mathcal{P}_X \right| \leq \varepsilon + 2||f||_\infty \mathcal{P}(|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon)$$
3. *Montrer que la réciproque est fausse en considérant le contre-exemple suivant : pour tout* n, $X_n = X$ *et* X *est une Bernoulli de paramètre* $1/2$. *Montrer que* $(X_n)_n$ *converge en loi vers ,* $(1 - X)$ *mais que* $(X_n)_n$ *ne peut pas converger en probabilité vers* $(1 - X)$.
4. *Montrer néanmoins que si les* X_n *convergent en loi vers une constante* a *alors* X_n *convergent en probabilité vers* a. *(ind. : remarquer que pour* $\epsilon > 0$, *si* δ_a *désigne la masse de Dirac en* a *et* $B(a, \epsilon)$ *la boule fermée de centre* a *et de rayon* ϵ, $\delta_a(\partial B(a, \epsilon)) = 0$. *En déduire* $\lim_{n \to +\infty} P(\| X_n - a \| \leq \epsilon) = \delta_a(B(a, \epsilon)) = 1$.*)*

Exercice 12 *Montrer que la condition 4.1 a) implique la condition 4.1 c) au cas où* x *est un point de continuité de* $F_n(x)$ *pour* n *suffisamment grand.*

4.3 La loi des grands nombres en moyenne quadratique

La convergence la plus facile à démontrer (quand elle a lieu) est celle en moyenne quadratique.

Exercice 13

a. *Soit* $(X_n)_{n \geq 1}$ *une suite de variables aléatoires telles que* $m_n = \mathrm{E(X_n)}$ *et* $\sigma_n^2 = \mathrm{var(X_n)}$. *Montrer que si* $\lim_{n \to +\infty} m_n = m$ *et* $\lim_{n \to +\infty} \sigma_n = 0$ *alors* $X_n - m \stackrel{(2)}{\longrightarrow} 0$ *lorsque* $n \to +\infty$.

b. *En déduire une preuve de la loi faible des grands nombres en moyenne quadratique pour des variables aléatoires i.i.d. de variance finie.*

c. *En déduire une preuve de la loi faible des grands nombres en probabilité, pour des variables aléatoires i.i.d. de variance finie, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*

Théorème 4.1 *Soit* $X_1, X_2, \ldots$ *des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et intégrables d'espérance* μ. *Soit* $(S_n)_n$ *la suite des sommes partielles des* $(X_i)_i$. *Alors*
$$n^{-1} S_n \longrightarrow \mu \qquad \textit{p.s. et dans } \mathbb{L}^1$$

Remarque 4.1 *Cette «loi forte» des grands nombres, au sens de convergence presque partout et dans* $\mathbb{L}^1$, *et sans supposer rien de plus que l'existence du premier moment, a une démonstration très compliquée, obtenue par Kolmogorov. Une démonstration étonnement courte est possible en utilisant un théorème de convergence des martingales.*

4.4 Détour d'analyse : convergence monotone et dominée

Théorème 4.2 *a) Pour toute suite croissante f_n de fonctions mesurables sur un espace probabilisé, à valeurs dans $[0,\infty]$, la limite f de la suite est mesurable et l'on a :*

$$\lim_n \int f_n(w)P(dw) = \int f(w)P(dw) \tag{4.1}$$

b) Pour toute suite f_n de fonctions mesurables sur un espace probabilisé ayant une limite f, et tq $|f_n| \leq g \forall n$ p.p., ou $\int g(w)P(dw) < \infty$, on a convergence en moyenne vers f et en particulier (4.1) est satisfaite.

Exercice 14 *Est-ce que la suite $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ est monotone en n ? Calculer*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx.$$

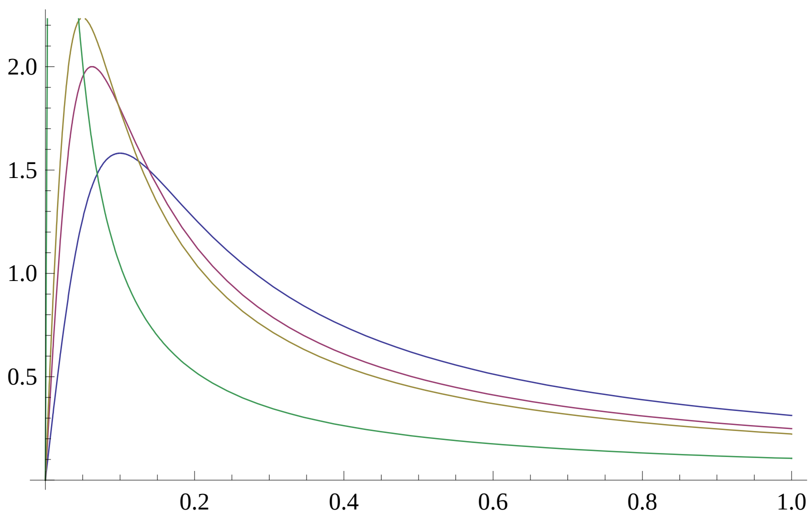
Sol : $D[a_n, n] = \left(\log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)\left(\frac{n+x}{n}\right)^n \geq 0, \ \forall x$

Exercice 15 *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies par $f_n(x) = n^{3/2}\frac{x}{1+n^2x^2}$ sur $[0,1]$.*

a. *Étudier la convergence ponctuelle sur $[0,1]$ de $(f_n)_{n\geq 1}$.*

b. *Étudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ de $(f_n)_{n\geq 1}$.*

c. *Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)dx = 0$. Est-ce qu'il s'agît d'une convergence monotone des $f_n(x)$?*



4.5 Convergence presque partout/presque sûrement et lemme de Borel-Cantelli

Exercice 16 *Soit* $X_n : [0,1]- > \mathbb{R}, X_n(x) = \frac{[nx]}{n}$ *Montrer que* X_n *converge pour chaque* x *vers la variable* $X : [0,1]- > \mathbb{R}, X(x) = x$ *de loi uniforme sur [0, 1]. Redémontrer ainsi la convergence en loi de l'exo 2.*

Définition 4.2 *Soit* $A_{n,\epsilon} = \{|X_n - X| \geq \epsilon\}$, $A^c_{n,\epsilon} = \{|X_n - X| < \epsilon\}$. *Alors,* $X_n- > X$ *presque partout/presque sûrement*[§] *ssi*

$$P[\{A^c_{n,\epsilon} s.g.\}] = 1 \Longleftrightarrow P[\{A_{n,\epsilon} i.s.\}] = 0, \forall \epsilon$$

où

$$\begin{aligned} \{A^c_n s.g.(\textit{pour } n \textit{ suffisamment grand, almost always})\} &:= \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} A^c_n \\ \{A_n i.s.(\textit{infiniment souvent, infinitely often})\} &:= \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_n \end{aligned}$$

Exercice 17 *1. Soit* $(X_n)_{n\geq 1} = \mathbb{I}_{A_n}$, *où* A_n *sont des ensembles mesurables de l'espace d'états* $[0,1]$. *Soit* $p_n = m(A_n) \in]0,1[$ *pour* $n \geq 1$. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que* $X_n \to 0$ *en probabilité.*

2. *Donner la loi de* X_n *et vérifier directement que la même condition est nécessaire et suffisante pour que* $X_n \to 0$ *en loi.*
3. *La condition obtenue garantit-elle la convergence presque partout de* $(X_n)_{n\geq 1}$ *vers 0 ? Ind : Considérer le cas* $p_n = \frac{1}{n}$, *avec les «nuages»* A_n *adjacents et disjoints, et donner la mesure de l'ensemble* $A_n i.s.$.
4. *Supposer maintenant que les variables aléatoires* X_n *sont aussi indépendantes. Donner une condition nécessaire et suffisante sur* $(p_n)_{n\geq 1}$ *pour avoir convergence presque sûre* $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$. **Ind :** *On pourrait utiliser le fait qu'un produit converge dans le sens que* $\lim_{k\to\infty} \prod_{n=k}^{\infty}(1-p_n)] = 1$ *ssi ssi* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$.

R : 2. $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$ 4. Dans notre exercice, $A_{n,\epsilon} = A_n, \forall \epsilon < 1$, et $P[\{A^c_n s.g.\}] = \lim_{k\to\infty} P[\cap_{n=k}^{\infty} A^c_n] = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=k}^{\infty}(1-p_n)] = 1$ ssi le produit converge, ssi $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$.

Exercice 18 *Démontrer les lemmes de Borel-Cantelli :*

$$a)\ \sum_n P[A_n] < \infty \Longrightarrow \begin{cases} P[\{A_n i.s\}] = & P[\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_n] = 0 \Longleftrightarrow \\ P[\{A^c_n s.g.\}] = & P[\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A^c_n] = 1 \end{cases}$$

Si A_n *sont aussi indépendants, alors*

$$\begin{aligned} b)\ \sum_n P[A_n] < \infty \Longleftrightarrow P[\{A_n i.s.\}] &= P[\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_n] = 0 \\ \Longleftrightarrow P[\{A^c_n s.g.\}] &= P[\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A^c_n] = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c)\ \sum_n P[A_n] = \infty \Longleftrightarrow P[\{A_n i.s.\}] &= P[\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_n] = 1 \\ \Longleftrightarrow P[\{A^c_n s.g.\}] &= P[\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A^c_n] = 0 \end{aligned}$$

§. le premièr nom a été utilisé dans la théorie de la mesure au XIX-ème siècle, et le deuxième est utilisé aujourd'hui dans la théorie des probabilités, sous l'influence probable de "almost surely"

Exercice 19 *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$.

a. *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variable aléatoire réelles i.i.d. telle que* $E(X_1^k) = \mu_k$ *pour* $k = 1, 2$. *Déterminer la limite presque sûre de*

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2.$$

b. *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variable aléatoire réelles i.i.d. telle que* $E(X_1^k) = \mu_k$ *pour* $k = 1, 2$ *et* $\mu_2 > 0$. *Déterminer la limite presque sûre de*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2}.$$

Ind : Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ où X est un vecteur aléatoire à valeur dans $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ est continue sur $\mathcal{D}$, alors $f(X_n) \xrightarrow{p.s.} f(X)$.

Exercice 20 *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi* $\mathcal{U}(0, 1)$.

a. *Montrer que* $X_{(n)} \xrightarrow{P} X \sim \delta_1$.
b. *Montrer que* $X_{(n)} \xrightarrow{p.s.} X \sim \delta_1$.
c. *Montrer directement que* $X_{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \delta_1$.

Exercice 21 *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires à valeurs dans* $\{-1, 1\}$ *telle que* $P(X_n = 1) = p \in]0, 1[\setminus\{1/2\}$. *On appelle marche aléatoire la ligne brisée reliant les points* $(n, S_n)_{n\geq 0}$ *où* $S_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n$ *avec* $X_0 = 0$ *pour* $n \geq 0$.

a. *Tracer le graphe de la marche aléatoire lorsque les 10 premières observées de* $(X_n)_{n\geq 1}$ *sont* $-1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1$.
b. *On note* $A_n = \{S_n = 0\}$. *Calculer* $P(A_n)$.
c. *Montrer que la série de terme général* $P(A_n)$ *est convergente.*
d. *Montrer qu'avec probabilité 1, la marche aléatoire traverse l'axe des abscisses un nombre fini de fois.*

Exercice 22 *Soit* $(X_{n,1}, X_{n,2})_{n\geq 1}$ *une suite de vecteurs aléatoires. Montrer qu'il y a équivalence entre :*

(i) $X_{n,i} \xrightarrow{p.s.} X_i$ *pour* $i = 1, 2$.
(ii) $(X_{n,1}, X_{n,2}) \xrightarrow{p.s.} (X_1, X_2)$.

Exercice 23 *1) Montrer que si une suite converge presque partout vers une variable aléatoire* X*, alors elle converge aussi en probabilité. Indication : si* $X_n \to X$ *p.s., poser* $B_k = \limsup_n\{|X_n - X| \geq \frac{1}{k}\}$. *Montrer que si* $\omega \notin \bigcup_k B_k$*, on a* $\lim X_n(\omega) = X(\omega)$. *On pourra aussi appliquer le théorème de convergence dominée.*

2) Montrer que de toute suite de variables aléatoires convergeant en probabilité, on peut extraire une sous-suite convergeant presque sûrement. (ind. : Si $(X_n)_n$ *converge en probabilité vers* X*, montrer que l'on peut construire une sous-suite* $(X_{n_k})_k$ *de* $(X_n)_n$ *telle que* $P(\| X_{n_k} - X \|\geq 1/k) \leq 1/2^k$ *et conclure par le lemme de Borel-Cantelli).*

4.6 La δ-méthode

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

   a. Calculer $\mathrm{E}[\mathrm{X}_1]$ puis $\mathrm{E}[\mathrm{X}_1(\mathrm{X}_1-1)]$. En déduire $\mu_2 = \mathrm{E}[\mathrm{X}_1^2]$.
   <u>Solution :</u> $\mathrm{E}[\mathrm{X}_1] = \sum_{\mathrm{k}\geq 0} \mathrm{k}\frac{\lambda^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda \sum_{\mathrm{k}\geq 1} \frac{\lambda^{\mathrm{k}-1}}{(\mathrm{k}-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda$. *De même on obtient* $\mathrm{E}[\mathrm{X}_1(\mathrm{X}_1-1)] = \sum_{\mathrm{k}\geq 0} \mathrm{k}(\mathrm{k}-1)\frac{\lambda^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda^2 \sum_{\mathrm{k}\geq 2} \frac{\lambda^{\mathrm{k}-2}}{(\mathrm{k}-2)!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda^2$, *d'où* $\mu_2 = \mathrm{E}[\mathrm{X}_1^2] = \mathrm{E}[\mathrm{X}_1(\mathrm{X}_1-1)] + \mathrm{E}[\mathrm{X}_1] = \lambda^2 + \lambda$.

   b. On admettra par la suite que $\mathrm{var}(X_1^2) = 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + \lambda$. On propose deux estimateurs de μ_2 :
   $$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}_2 = \bar{X}_n(\bar{X}_n + 1)$$
   où $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

      (i) Montrer que $\hat{\mu}_2 \xrightarrow{p.s.} \mu_2$ et $\tilde{\mu}_2 \xrightarrow{p.s.} \mu_2$.
      <u>Solution :</u> *Comme les X_i^2 sont i.i.d. et admettent une espérance mathématique égale à $\lambda^2+\lambda$ on a $\hat{\mu}_2 \xrightarrow{p.s.} \lambda^2+\lambda = \mu_2$ d'après la loi forte des grands nombres. Comme les X_i sont i.i.d. et admettent une espérance mathématique égale à λ on a $\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \lambda$ d'après la loi forte des grands nombres. Or $\tilde{\mu}_2 = g(\bar{X}_n)$ où $g : x \mapsto x(x+1)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc d'après le théorème des applications continues $\tilde{\mu}_2 = g(\bar{X}_n) \xrightarrow{p.s.} g(\lambda) = \mu_2$.*

      (ii) Montrer que $\sqrt{n}(\hat{\mu}_2 - \mu_2) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où l'on précisera la loi de X.
      <u>Solution :</u> *Les variable aléatoire X_i^2 étant i.i.d. et admettant une moyenne μ_2 et une variance $4\lambda^3 + 6\lambda^2 + \lambda$ une application directe du théorème de la limite centrale donne*
      $$\sqrt{n}(\hat{\mu}_2 - \mu_2) \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(0, 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + \lambda).$$

      (iii) Montrer que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ où l'on précisera la loi de Y.
      <u>Solution :</u> *Les variable aléatoire X_i étant i.i.d. et admettant une moyenne λ et une variance λ une application directe du théorème de la limite centrale donne*
      $$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(0, \lambda).$$

      (iv) Déduire de la question précédente que $\sqrt{n}(\tilde{\mu}_2 - \mu_2) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ où l'on précisera la loi de Z.
      <u>Solution :</u> *remarquons que $\sqrt{n}(\tilde{\mu}_2 - \mu_2) = \sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda))$ où g est définie par $g(x) = x(x+1)$ sur $\mathbb{R}$. D'après la question (iii) $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, de plus g est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, donc les hypothèses du théorème de la δ-méthode sont réunies et on a*
      $$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\lambda)) \xrightarrow{\mathcal{L}} g'(\lambda)Y = Z.$$
      Donc $Z \sim \mathcal{N}(0, (2\lambda+1)^2\lambda)$.

      (v) Du point de vue de la variance asymptotique, lequel des deux estimateurs est le plus avantageux ?
      <u>Solution :</u> *C'est l'estimateur de variance asymptotique la plus petite, c'est-à-dire $\tilde{\mu}_2$ car sa variance asymptotique est égale à $4\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda$ alors que celle de $\hat{\mu}_2$ est supérieure de 2λ.*

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{U}(a,b)$ avec $a < b$. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$.
   a. Déterminer la loi approchée de S_n lorsque $n \to +\infty$.
   b. Déterminer la limite en loi $\sqrt{n}\,(\exp(S_n/n)S_n/n - \exp((a+b)/2)(a+b)/2)$ lorsque $n \to +\infty$.
   c. Etudier la convergence en loi de S_n^3, et déterminer la loi approchée de S_n^3 lorsque $n \to +\infty$.

4.7 Exercices : Modes de convergence

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de moyenne μ et de variance $\sigma^2 < +\infty$. On pose pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, $Y_n = aX_n + X_{n-1}$, $X_0 = 0$ et $S_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$.
   a) Déterminer la limite p.s. Z de $(S_n)_{n\geq 1}$ lorsque $n \to +\infty$.
   b) Calculer $\mathrm{Var}\,(S_n)$. En déduire une borne pour $P[|S_n - Z| > \epsilon]$.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires et X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne $\|x\|_2 = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$.
   a. Rappeler la définition de la convergence en probabilité de $(X_n)_{n\geq 1}$ vers X.
   b. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers X si et seulement si pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$ la k-ième composante de $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers la k-ième composante de X.
   c. Montrer le même résultat lorsque $\mathbb{R}^d$ est muni de la norme $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq d} |x_i|$.
3. **Convergence en probabilité implique convergence en loi.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité vers une variable aléatoire X.
   a. Montrer que $P(A \backslash B) \geq P(A) - P(B)$.
   b. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ on a
   $$\{X \leq x - \varepsilon\} \backslash \{|X_n - X| > \varepsilon\} \subset \{X_n \leq x\} \subset \{X \leq x + \varepsilon\} \cup \{|X_n - X| > \varepsilon\}.$$
   c. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que pour $n \geq 1$ X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_n = n$.
   a. Calculer la fonction de répartition (f.d.r.) de $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ pour $n \geq 1$.
   <u>*Solution :*</u> $F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = 1 - P(Y_n > y) = 1 - P(X_1 > y; \ldots; X_n > y) = 1 - \exp(-y\sum_{k=1}^n k) = 1 - \exp(-yn(n+1)/2)$ *si* $y > 0$ *et 0 sinon. La quatrième égalité résulte de l'indépendance des variable aléatoire et de* $P(X_k > y) = \exp(-\lambda_k y) = \exp(-ky)$, *la cinquième de* $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.
   b. Montrer que $Y_n \xrightarrow{P} 0$.
   <u>*Solution :*</u> *soit* $\varepsilon > 0$. $P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n > \varepsilon) = \exp(-\varepsilon n(n+1)/2) \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$, *donc* $X_n \xrightarrow{P} 0$.
   c. Montrer que $Y_n \xrightarrow{p.s.} 0$.
   <u>*Solution :*</u> *soit* $\varepsilon > 0$. $\sum_{n\geq 1} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} P(Y_n > \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} \exp(-\varepsilon n(n+1)/2) \leq \sum_{n\geq 1} \exp(-\varepsilon n/2) = \sum_{n\geq 1}(\exp(-\varepsilon/2))^n < +\infty$, *donc* $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$.

d. Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que $\alpha_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ où l'on précisera les valeurs des α_n et la loi de Y. La suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est-elle unique ?

<u>Solution :</u> $\alpha_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}}$ ssi $\alpha_n = O((n(n+1))$. Par exemple, pour $\alpha_n = n(n+1)/2$, $P(n(n+1)Y_n/2 \leq y) = F_{Y_n}(2y/(n(n+1))) = (1-\exp(-y))1_{\{y>0\}}$, et donc $\alpha_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, avec $Y \sim \mathcal{E}(1)$. Ce résultat de convergence reste identique si l'on prend $\alpha_n = n^2/2$, donc le choix n'est pas unique.

5. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ où $\sigma^2 > 0$. Soit $a \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires telle que $X_0 = x_0$ presque sùrement et $X_n = aX_{n-1} + \varepsilon_n$ pour $n \geq 1$.

a. Montrer que pour $n \geq 1$

$$X_n = a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \varepsilon_{n-k}.$$

<u>Solution :</u> *Pour* $n = 1$ *on a* $X_1 = ax_0 + \varepsilon_1 = aX_0 + \varepsilon_1$. *Supposons la relation vraie au rang* $n \geq 1$ *alors* $X_{n+1} = aX_n + \varepsilon_{n+1} = a\left(a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \varepsilon_{n-k}\right) + \varepsilon_{n+1} = a^{n+1}x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}\varepsilon_{n+1-(k+1)} + \varepsilon_{n+1} = a^{n+1}x_0 + \sum_{k'=1}^{n} a^{k'}\varepsilon_{n+1-k'} + \varepsilon_{n+1} = a^{n+1}x_0 + \sum_{k'=0}^{n} a^{k'}\varepsilon_{n+1-k'}$. *Donc relation établie par récurrence.*

b. Déterminer la loi de X_n et montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2/(1-a^2))$.

<u>Solution :</u> X_n *étant une combinaison linéaire de variables aléatoires normales indépendantes, elle est normale de moyenne et variance :* $\mathrm{E(X_n)} = \mathrm{a^n x_0}$ *et* $var(X_n) = \sigma^2(1 + a^2 + \cdots + a^{2(n-1)}) = \sigma^2(1-a^{2n})/(1-a^2)$. *Donc si* Φ *est la fdr d'une loi* $\mathcal{N}(0,1)$ *on a pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$$P(X_n \leq x) = \Phi\left(\frac{x - a^n x_0}{\sigma\sqrt{(1-a^{2n})/(1-a^2)}}\right) \to \Phi\left(\frac{x\sqrt{1-a^2}}{\sigma}\right)$$

qui est la fdr de la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2/(1-a^2))$.

c. On suppose maintenant que $X_n = aX_{n-1} + b + \varepsilon_n$ pour $n \geq 1$ où $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi et déterminer sa loi asymptotique.

<u>Solution :</u> *On établit par récurrence que*

$$X_n = a^n x_0 + b\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \varepsilon_{n-k}$$

X_n *étant une combinaison linéaire de variables aléatoires normales indépendantes, elle est normale de moyenne et variance :* $\mathrm{E(X_n)} = \mathrm{a^n x_0 + b(1-a^n)/(1-a)}$ *et* $var(X_n) = \sigma^2(1 + a^2 + \cdots + a^{2(n-1)}) = \sigma^2(1-a^{2n})/(1-a^2)$. *Donc si* Φ *est la fdr d'une loi* $\mathcal{N}(0,1)$ *on a pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$$P(X_n \leq x) = \Phi\left(\frac{x - a^n x_0 - b(1-a^n)(1-a)}{\sigma\sqrt{(1-a^{2n})/(1-a^2)}}\right) \to \Phi\left(\frac{(x - b/(1-a))\sqrt{1-a^2}}{\sigma}\right)$$

qui est la fdr de la loi $\mathcal{N}(b/(1-a),\sigma^2/(1-a^2))$.

6. Soit $Y \sim \gamma(\alpha, p)$, $f_Y(x) = p\frac{(xp)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-px}$, et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Déterminer la fonction génératrice des moments de Y.
   (b) Déterminer la densité d'une loi du chi-deux à 1 degré de liberté. De quelle loi gamma s'agit-il ?
   (c) Quelle est la loi de $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k^2$ (loi du chi-deux à $k \in \mathbb{N}^*$ degrés de liberté) ?
   (d) Quelle est la limite p.s. de $(Y_n/n)_{n\geq 1}$? Calculer directement la limite de $f_{Y_n/n}(x)$.
   (e) Quelle est la limite en loi de $((Y_n - n)/\sqrt{n})_{n\geq 1}$? En déduire une approximation de la fonction de répartition de Y_n lorsque $n \to +\infty$.
   (f) Soit $n \geq 1$ et $Z_1^{(n)}, \ldots, Z_k^{(n)}$ k variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre $1/n$. On pose $S_n = Z_1^{(n)} + \cdots + Z_k^{(n)}$ (une variable aléatoire binomiale négative) et $U_n = 2S_n/n$. Montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire U dont on déterminera la distribution.

   R :
   (a) $m_Y(s) = (1 + s/p)^\alpha$
   (b) $f_{X^2}(x) = \frac{(x/2)^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})}e^{-x/2}/2$
   (c) $f_{Y_n}(x) = \frac{(x/2)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}e^{-x/2}/2$
   (d) $f_{Y_n/n}(x) = n\frac{(nx/2)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}e^{-nx/2}/2 = \frac{(n/2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{n}{2}x} = \frac{(n/(2e))^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}x^{-1}e^{-\frac{n}{2}(x-1-\ln(x))} \approx$
   $$\sqrt{\tfrac{n}{2}/(2\pi)}x^{-1}e^{-\frac{n}{2}(x-1-\ln(x))} \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \infty & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}.$$

7. **Démonstration par Bernstein du théorème de Stone-Weierstrass**. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{B}(x)$ où $x \in [0,1]$ et $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue. On note
   $$S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$$
   et pour $\delta > 0$
   $$\omega(f, \delta) = \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)|$$
   le module de continuité de f.
   a. Déterminer $P_n(x) = P_n(f)(x) = E[f(S_n)]$ (Idée : $S_n \overset{p.s.}{\Longrightarrow} x \Longrightarrow f(S_n) \overset{p.s.}{\Longrightarrow} f(x) \Longrightarrow E[f(S_n)] \to f(x)$, et les espérances $E[f(S_n)]$ sont des polynômes $P_n(x)$ (appellés polynômes basiques de Bernstein). Donc, la convergence simple de $P_n(x)$ vers $f(x)$ pour tout x donné est une conséquence de la loi forte des grands nombres et de la continuité de $f(x)$.
   b. Donner une majoration de $P(|S_n - x| > \delta$ (Cette borne servira pour en déduire la convergence uniforme).
   c. Démontrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} \|P_n - f\| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |P_n(x) - f(x)| = 0.$$

d. En déduire le théorème de (Stone-)Weierstrass sur l'existence des approximations polynômiales uniformes sur un intervalle compact arbitraire.

R :

(a) Soit $p_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Alors $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) p_{k,n}(x)$.

(b) $P[|S_n - x| > \delta] \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$

(c) Fixons x and $\delta = \delta(\epsilon)$ tq $|x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$
$|P_n(x) - f(x)| = |\sum_{k=0}^{n} [f(\frac{k}{n}) - f(x)] p_{k,n}(x)| \leq |\sum_{k:|\frac{k}{n}-x|\leq\delta}| + |\sum_{k:|\frac{k}{n}-x|>\delta}| \leq \epsilon + 2M\frac{x(1-x)}{n\delta^2} \Longrightarrow \|P_n - f\| \leq \epsilon + M\frac{1}{2n\delta^2} \Longrightarrow \lim_n \|P_n - f\| \leq \epsilon \Longrightarrow \lim_n \|P_n - f\| \leq \inf\{\epsilon > 0\} = 0$

8. La convergence en norme $\mathbb{L}^p$ et la convergence presque sùre impliquent la convergence en probabilités qui implique la convergence en loi. Les réciproques sont fausses et sont partiellement vraies si on rajoute certaines hypothèses.
Soit sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ deux suites $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ de variables aléatoires qui convergent en loi respectivement vers X et Y. 1) Montrer que si pour tout n, X_n et Y_n sont indépendantes et si X et Y sont indépendantes alors $(X_n, Y_n)_n$ converge en loi vers (X, Y). On utilisera les fonctions caractéristiques et le théorème de Lévy ou bien les fonctions de répartition. 2) On étudie un contre-exemple dans le cas où l'on supprime l'hypothèse ≪'pour tout n, X_n et Y_n sont indépendantes≫'. Soit donc X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre 1/2. On pose pour tout n.

$$X_n = X + 1/n, \quad Y_n = (1 - X) - 1/n$$

Étudier la convergence en loi des trois suites $(X_n)_n$, $(Y_n)_n$ et $(X_n + Y_n)_n$ et conclure.

9. Le lemme de Slutsky donne une alternative à l'indépendance pour assurer la propriété de convergence en loi étudiée à la première question de l'exercice précédent.
Lemme de Slutsky
Soit sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ deux suites $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ de variables aléatoires qui convergent en loi respectivement vers X et une constante y_0. 1) a) En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, montrer que l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \to f(x)g(y) | f, g \in C_0(I\!R)\}$$

est total dans $C_0(I\!R^2)$ ($C_0(I\!R^k)$ est l'espace des fonctions continues sur $I\!R^k$ tendant vers 0 en l'infini). b) On rappelle que $(Y_n)_n$ converge en loi vers une constante donc converge en probabilité vers cette même constante (exercice 7.4.3). Soit f et g deux éléments de $C_0(I\!R)$. Montrer que

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(X_n)g(Y_n)) - \mathbb{E}(f(X)g(y_0))| &\leq \|f\|_\infty[\epsilon + 2\|g\|_\infty \mathcal{P}(|g(Y_n) - g(y_0)| > \epsilon)] \\ &+ \|g\|_\infty |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| \end{aligned}$$

c) Conclure.

10. Stabilité du caractère gaussien
    Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires gaussiennes qui convergent en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X. Montrer que X est une variable gaussienne. (*ind.* : on remarquera que la convergence en moyenne quadratique implique la convergence en loi, on passera aux fonctions caractéristiques et utilisera le théorème de convergence de Lévy.)

Chapitre 5

Processus et champs aléatoires, en temps discret et continu

Nombreux problèmes de modélisation aléatoire en physique, biologie, etc., ramène à l'étude des **processus/champs aléatoires**. Il s'agit de collections des variables aléatoires $X_t, t \in \mathcal{I}$, où l'ensemble des indices $\mathcal{I}$ peut etre par exemple $\mathbb{N}^d, \mathbb{Z}^d, \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$, un ensemble fini, etc.

Définition 5.1 *Soit $\mathcal{I}$ un ensemble quelconque. On appelle processus aléatoire X indexé par $\mathcal{I}$ toute famille $(X_t \in \mathcal{E}, t \in \mathcal{I})$, de vecteurs aléatoires définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et appartenant à un espace d'états métrisable $\mathcal{E}$.*

L'espace $\mathcal{I}$ est souvent le temps, ainsi : $\mathcal{I} = \mathbb{N}$: instants successifs à partir d'un instant initial t_0. $\mathcal{I} = \mathbb{Z}$: instants successifs avant et après un instant t_0. $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$: idem mais processus à temps continu. $\mathcal{I} = \mathbb{Z}^2$: images. $\mathcal{I} = \mathbb{Z}^3$: modèle de la matière. Nous allons considérer ici surtout des processus à indices unidimensionnels, à temps discret $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou continu $\mathbb{R}$ (les premièrs deux cas étant appelés aussi séries chronologiques en statistique). L'étude est facilitée alors par l'existence d'un ordre complet entre les indices.

Remarque 5.1 *Lorsque $\mathcal{E} = \mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$ et $p = 1$, une seule valeur est observée à chaque «instant» t, alors que lorsque $p > 1$, plusieurs variables sont observées et on parle de processus multidimensionnels ou multivariés.*

Dans le cas des espaces d'états $\mathcal{E}$ **finis ou dénombrables**, les variables $X_i, i \in \mathcal{I}$ sont appelées discrètes ; pour $\mathcal{E} = \mathbb{R}^d$, on étudie surtout des variables continues ou hybrides.

Le cas discret est le plus simple, car il permet d'éviter plusieurs détails techniques (par exemple, dans ce cas, l'ensemble des événements mesurables pour une variable X_{i_0} est simplement l'ensemble de toutes les parties de $\mathcal{E}$).

Pour modéliser un champ/processus il est nécessaire de spécifier de manière consistante l'ensemble de toutes ses **distributions jointes d'ordre fini**.

Définition 5.2 *Soit $X_. = X_t, t \in \mathcal{I}$ un processus aléatoire et soit $J = \{t_1, t_2, ...,\} \subset \mathcal{I}$ un sous-ensemble fini des temps d'observation du processus. On dénotera par X_J la distribution jointe des variables $X_t, t \in J$. L'ensemble $X_J : J \subset \mathcal{I}, |J| < \infty$ sera appelé la famille des distributions jointes d'ordre fini de $X_.$*

Les processus les plus simples sont les processus à variables i.i.d. Le cas particulier des variable aléatoire avec un nb. fini des valeurs mérite une mention à part.

Définition 5.3 *La famille des processus i.i.d. inclue les processus à variables* $X_t \in \{1, 2, ...K\}, t \in \mathbb{Z}$*, avec* X_t *i.i.d. ayant une loi discrète* $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_J)$ *qu'on peut voir comme des résultats* $X_0, X_1, ..., X_t...$ *des* **jetées d'un dé ou d'une monnaie biaisée, avec un nb fini des faces***. Dans ce cas, les lois jointes sont simplement des produits de la loi marginale* $\boldsymbol{p}$*.*

Dans le cas opposé se situent les processus avec "memoire longue" pour les quelles un nombre infini des paramètres sera nécessaire pour specifier les lois jointes. Pour une modélisation pratique, nous allons considerer ici que des processus ayant la propriété de Markov – voir chapitre **??**, qui fournissent souvent un compromis acceptable, joignant le réalisme avec la simplicité de modélisation (voir en particulier, les marches aléatoires/sommes des variables i.i.d.)

Chapitre 6

Les marches aléatoires/sommes des variables i.i.d.

ch:MA

Motivation : Les marches aléatoires sont parmi les modèles probabilistes les plus utiles (par exemple en physique, mathématiques financières, files d'attente, statistique, etc.). Ils sont aussi parmi les modèles les meilleurs compris, car ils permettent souvent des solutions analytiques.

Définition 6.1 Marches aléatoires sur $\mathbb{R}^d$. *Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réels* **i.i.d** *(c.-à-d. indépendantes et de même loi), à valeurs en $\mathbb{R}^d$. Le processus $X_n \in \mathbb{R}^d, n = 0, 1, ...$ donné par la somme de ces variables*

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{6.1}$$

s'appelle **marche aléatoire**. *Comme alternative, la marche aléatoire peut etre définie récursivement par la récurrence*

$$X_n = X_{n-1} + Z_n \tag{6.2}$$

Exemple 6.1 Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ *Typiquement, on s'intéresse au cas où l'espace d'états est un maillage régulier comme $\mathbb{Z}^d$, c.-à-d. $X_0, Z_n \in \mathbb{Z}^d$ ont une loi discrète $\boldsymbol{p} = (p_i, i \in \mathbb{Z}^d)$ (dans ce cas, nous avons à faire à une chaîne de Markov à espace d'états dénombrable).*

Exemple 6.2 *Si en plus $|Z_n| = 1$, c.-à-d. $p_i \neq 0$ ssi i est un voisin de l'origine, le processus (6.1) est appelé une* **marche aléatoire simple**.

Exemple 6.3 *Pour une marche aléatoire simple en dimension $d = 1$, la loi de Z_n est de la forme $p\delta_1 + (1-p)\,\delta_{-1}$, c.-à-d. $P[Z_n = 1] = p$ et $P[Z_n = -1] = 1 - p$ avec $0 < p < 1$. Si $p = q = .5$ on parle d'une* **marche aléatoire symétrique**, *et avec $p \neq q$ on parle d'une* **marche aléatoire biaisée**.

Notes : 1) On a à faire ici à des sommes des variable aléatoire i.i.d.. Donc, $P^n(0, :)$ la loi de la somme $\sum_{i=1}^n Z_i$, est donnée par la n-ième convolution de la loi $\boldsymbol{p}$ de Z_i (et la fonction génératrice des moments est la puissance n de la fonction génératrice des moments de $\boldsymbol{p}$). Le comportement des puissances P^n pour $n \to \infty$ est lié au théorème de la limite centrale.

6.1 Moments et cumulants des marches aléatoires

Exercice 6.1 Les moments et cumulants de la marche simple. *Soit $X_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ le capital au temps n d'un joueur. Au temps $n = 1, 2, ...$, le joueur gagnera $Z_n = 1$ avec probabilité p et perdra $Z_n = -1$ avec probabilité $1 - p$, où $0 < p < 1$. Calculez :*

1. *L'espérance du son gain $e_n = EX_n$.*
2. *La variance du son gain $v_n = \operatorname{Var} X_n$.*
3. *La fonction génératrice des moments $M(u, n) = Ee^{uX_n}$.*
4. *La fonction génératrice des cumulants $\kappa(u, n) = \log(Ee^{uX_n})$.*
5. *La fonction génératrice des cumulants $\tilde{\kappa}(u, n) = \log(Ee^{u\tilde{X}_n})$ de la variable «normalisée» $\tilde{X}_n = \frac{X_n - e_n}{\sqrt{v_n}}$*

Remarque 6.1 *Il est clair que ces propriétés de linéarité (de l'espérance , de la variance, et de la fonction génératrice des cumulants), sont vraies pour chaque marche aléatoire.*

Remarque 6.2 *La connaissance de la loi ou de la fonction génératrice des moments d'une variable X sont typiquement équivalents. Mais, pour une somme $\sum_{i=1}^n Z_i$ des v.a. i.i.d., pendant que la loi est la n-ième convolution $\boldsymbol{p}^{*,n}$ de la loi $\boldsymbol{p}$ de Z_i, la fonction génératrice des moments $Ee^{\theta \sum_{i=1}^n Z_i}$ est beaucoup plus simple à obtenir (étant la n-iṁe puissance de la fonction génératrice des moments $Ee^{\theta Z_1}$).*

Exercice 6.2 *Soit $m_n = m_n(X), n = 0, 1, 2, ...$ les moments d'une variable aléatoire X, soit $\kappa_X(u) = \log M_X(u) = \log(\sum_n \frac{u^n}{n!} m_n) = \sum_n \frac{u^n}{n!} c_n(X)$ la fonction génératrice des cumulants, où $c_n = c_n(X) = \frac{\partial^n \kappa(u)}{(\partial u)^n}_{u=0}$ sont les cumulants. Montrez (en utilisant éventuellement un logiciel symbolique) que*

$$\begin{aligned} &\forall X, m_2 = c_2 + c_1^2, m_3 = c_1^3 + 3c_1c_2 + c_3, ... \iff \\ &c_0 = 0, c_1 = m_1, c_2 = \operatorname{Var}(X) = m_2 - m_1^2, c_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3, ... \end{aligned}$$

Nt : 1) Le cumulant d'un ordre donné est un polynôme dans les moments d'ordre plus petit ou égal, et réciproquement. 2) Les coefficients de l'expansion des moments en fonction des cumulants sont donné par des nombres des partitions (de Stirling). 3) Les cumulants d'une variable centrée ($m_1 = 0$) coïncident avec les moments jusqu'au troisième ordre. C'est le quatrième cumulant, la «kurtosis», donné dans le cas centré par $c_4 = m_4 - 3m_2^2$, qui joue un rôle important dans certains tests statistiques (comme de nonnormalité, par exemple).

Exercice 6.3 *Pour la marche simple, calculez*

1. *Le premier, deuxième et troisième cumulants $\kappa_i(n), i = 1, 2, 3$ de X_n, c.-à-d. les premiers trois coefficients dans l'expansion $\kappa(u, n) = \sum_i \kappa_i(n) u^i$ en puissances de u.*
2. *Le deuxième moment de X_n. Quelle est la particularité du cas $p = 1/2$?*
3. *Le troisième moment de X_n.*

Un des pb les plus anciens des probas a été d'établir que la répétition d'un expériment (comme la jetée d'une monnaie) un grand nb des fois dévoile sa moyenne), et que l' histogramme (loi) des déviations de la moyenne converge vers «la courbe en cloche de Gauss». Cette loi fondamentale est l'objet de la Section **??**.

s:CLT 6.2 La démonstration du théorème de limite centrale

La démonstration du théorème de limite centrale a pris des siècles, avant d'arriver à la forme fuselée d'aujourd'hui.

Question 2 *Pourquoi la loi normale ?*

Exercice 6.4 1. *Montrer que la fonction génératrice des moments de la variable normale est*

$$Ee^{uN_{0,v}} = e^{vu^2/2}.$$

Remarquer le fait que la loi normale est caractérisée par le fait que tous ses cumulants (les coefficients du développement limité de $\log\left(Ee^{uN_{0,v}}\right)$*) d'ordre plus grand que trois sont nuls.*

2. *Calculer les premiers quatre moments de la loi normale directement par le développement limité de la fonction génératrice des moments* $e^{vu^2/2}$*, ou à partir des cumulants, en utilisant les formules*

$$m_1 = \kappa_1, m_2 = \kappa_2 + \kappa_1^2, m_3 = \kappa_3 + 3\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^3, m_4 = \kappa_4 + 4\kappa_1\kappa_3 + 6\kappa_1\kappa_2^2 + 3\kappa_2^2 + \kappa_1^4$$
$$\kappa_3 = 2{m_1}^3 - 3m_2m_1 + m_3, \kappa_4 = -6{m_1}^4 + 12m_2{m_1}^2 - 4m_3m_1 - 3{m_2}^2 + m_4$$

(Ces formules sont obtenues par des développements limités. En Mathematica par exemple)

$$Series[Exp[\kappa 1u + \kappa_2u^2/2 + \kappa_3u^3/6 + \kappa_4u^4/24], u, 0, 4]$$
$$Series[Log[1 + m_1u + m_2u^2/2 + m_3u^3/6 + m_4u^4/24], u, 0, 4]$$

Question 3 *Comment démontrer le théorème de limite centrale ?*

Une première idée vient de l'observation que la convergence du premier et du deuxième moment sont assurée (avec égalité) par le centrage. Comme les premiers moments ne caractérisent pas la loi, il est naturel de considérer tous les moments. ça s'avère difficile -voir pourtant le prochain exercice, et unnécessaire.

Exercice 6.5 1. *Soit* X, Y *deux variables i.i.d. ayant des moments d'ordre* k*. Montrer que*

$$\kappa_k(X + Y) = \kappa_k(X)\kappa_k(Y)$$

Soit $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ *une somme des variables i.i.d. ayant des moments d'ordre* k*. Montrer que*

$$\kappa_k(S_n) = n\kappa_k(Z_1)$$

2. *Conclure que les variables* Z_i *ayant tous les moments d'ordre* $k = 1, 2, ...$ *obéissent le théorème de limite centrale* (2.7).
3. *(*) Montrer directement la convergence des premiers quatre moments (ou cumulants) d'une variable binomiale centrée vers ceux de la variable normale.*

En conclusion, dans la présence de tous les moments de Z_i, les cumulants et moments de la somme centrée convergente vers ceux de la loi normale. Cela assure la convergence en loi, et montre aussi que dans ce cas il n'y pas de convergence en moyenne quadratique : la convergence en loi et la seule qui tienne. Dans l'absence des moments au dela du deuxième, on est sauvé par une deuxième idée : remplacer la convergence des moments par celle d'espérances d'autres «fonctions test» $\varphi(\tilde{S}_n)$. Les premières candidates sont les fonctions $\varphi(u) = e^{ux}, u \in \mathbb{C}$. Mais, l'absence des moments de X variable aléatoire entraîner le manque de différentiabilité de la fonction Ee^{uX} autour de $u = 0$, et demande un travail très précis d'analyse dans ce voisinage. On est finalement sauvé par les fonctions caractéristiques $\phi_X(t) = Ee^{itX}, t \in \mathbb{R}$, qui sont essentiellement des restrictions des fonctions génératrices des moments au sous-domaine $u \in i\mathbb{R}$, ≪où il est facile de les dominer≫. Il s'avère finalement que la convergence en loi est équivalente à celle des fonctions caractéristiques – c'est le résultat fondamental de ce domaine. L'exercice prochain sera utile pour le développement limité des fonctions caractéristiques qui offre la voie la plus simple pour démontrer le théorème de limite centrale

`ex:c` **Exercice 24** *Montrer que*

1. $|z_i| \leq 1, |w_i| \leq 1 \Longrightarrow |\prod_i z_i - \prod_i w_i| \leq \sum_i |z_i - w_i|$
2. $c > 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{c}{n} + o(\frac{1}{n}))^n - (1 - \frac{c}{n})^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{c}{n} + o(\frac{1}{n}))^n = e^{-c}$

Exercice 6.6 *Démontrer le théorème de limite centrale en supposant que* $EZ_i^3 < \infty$.

R : Il suffit de supposer $m_1 = 0, c_2 = 1$. La convergence des fonctions caractéristiques demande d'étudier $\lim_{n\to\infty} \varphi(s/\sqrt{n})^n = (1 - \frac{1}{2}s^2/n + h_n)^n$. Pour obtenir la limite désirée, il suffit de démontrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|Ee^{iZs/\sqrt{n}} - 1 + \frac{1}{2}s^2/n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|Er(Zs_n)|}{n} = 0$ où $s_n = s/\sqrt{n}$, et $r(s) = e^{is} - 1 - is + \frac{1}{2}s^2$. Comme $s_n \to 0$, tout reste sur la disponibilité d'une borne convenable pour le reste du développement limité $|r_3(x)| = |\int_0^x (x-u)^2 \frac{i^3 e^{iu}}{2} du| \leq \frac{x^3}{6}$.

Remarque 6.3 *On verra que l'hypothèse* EZ_i^3 *n'est pas finalement nécessaire pour le CLT, car il existe une meilleure majorization de* $r(x)$ *– voir Lemme 6.1.*

`l:fd` **Lemme 6.1** *Montrer que*

$$|\varphi_X(t) - (1 + itEX - \frac{t^2}{2}E(X^2)) \leq t^2(\int_{-\frac{6}{t}}^{\frac{6}{t}} \frac{tx^3}{6} dF_X(x) + \int_{x \notin [-\frac{6}{t}, \frac{6}{t}]} x^2 dF_X(x)) = o(t^2)$$

Ind : $e^{ix} - (1 + ix - \frac{x^2}{2}) = r(x) = \int_0^x (x-u)^2 \frac{i^3 e^{iu}}{2} du, \quad |r(x)| \leq \min[x^2, \frac{x^3}{6}]$ (admis) Il suit que le premier intégral dans la Lemme 6.1 converge vers 0 par convergence dominée (par x^2), et le deuxième intégral converge vers 0 par l'existence du deuxième moment.

Remarque 6.4 *En généralisant cet argument on trouve que dans la présence des n moments, il suit que* $|\varphi_X(t) = (1 + itEX - \frac{t^2}{2}E(X^2)... + \frac{(it)^n}{(n-1)!}E(X^n)) + o(t^n)$

Exercice 25 *Démontrer le théorème de limite centrale* (2.7) *de Lindeberg-Lévy pour sommes des variable aléatoire* Z_i *i.i.d. avec* $\operatorname{Var} Z = \sigma^2 < \infty$*, en utilisant les résultats auxiliaires du Lemme 6.1 et de l'exercice 24.*

Exercice 26 *Soit* ϕ_X *la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle* X*. Montrer que* ϕ_X *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$*. Ind : Rémarquer que* $|\phi_X(t+h) - \phi_X(t)| \leq 2E|sin(hX/2)| \leq hE|X|, \forall t$*, et par conséquent le résultat est facile si* $E|X| < \infty$*. En général, il suffit d'utiliser le fait que* $\lim_{h\to 0} E|sin(hX/2)| = 0$*, par convergence dominée.*

Chapitre 7

Problèmes de premier passage des marches aléatoires et relations de récurrence

7.1 La méthode du conditionnement sur le premier pas et

Exercice 7.1 La marche aléatoire symétrique. *On cherche a trouver la probabilité d'un joueur qui s'engage dans une série de parties (indépendantes) à un jeu où à l'issue de chaque partie il gagne 1F avec une probabilité* $1/2$ *et perd 1F avec une probabilité* $1/2$*, et qui décide de s'arrêter de jouer dès qu'il aura* B *francs en poche, ou dès qu'il n'a plus d'argent. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on note* X_n *la fortune du joueur au bout de* n *parties, et* $X_0 = i$ *sa fortune à l'entrée dans le Casino. Ça revient à étudier la marche aléatoire symétrique*

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, X_n \in \mathbb{Z}$$

avec $P[Z_n = 1] = P[Z_n = -1] = 1/2$*, jusqu'au «temps d'arret/sortie»* $T = \min[T_0, T_B]$ *quand le processus sort de l'intervalle* $[0, B]$ *(en prenant* 0 *et* B *comme états absorbants). On dénotera par* $\mathrm{E_i}$ *l'espérance en commençant de* i *(conditionnant sur* $X_0 = i$*), et on désigne par* E *l'événement que le joueur gagne, c.-à-d.* $E = \{x_T = B\} = [\exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $X_n = B, X_k > 0, k = 1, ..., n-1]$ *. Pour tout* i *de* $\{0, ..., B\}$*, on pose :*

$$b_i = P(E \mid [X_{t_0} = i])$$

(la probabilité du «bonheur»).

1. *En supposant* $B = 3$*, énumérer et esquisser* **l'espace de tous les chemins** *du bonheur/ruine qui commencent avec* $X_0 = 1$*, en développant «l'arbre de toutes les possibilités». Calculer la probabilité du chaque chemin, et vérifier que leur somme vaut 1.*
2. *Expliquer graphiquement sur «l'arbre de toutes les possibilités» les équations* $b_1 = 1/2 b_2, b_2 = 1/2 b_1 + 1/2$*, en assoc. Déduisez* b_0, b_3*, et en suite* b_1, b_2*.*
3. *En supposant* $B = 4$*, calculer* b_1, b_2 *et* b_3*.*
4. *Calculer* $b_i, i = 0, ..., B$ *pour* B *quelconque.*
5. *Calculez l'espérance du nombre des pas du jeu, pour* B *quelconque.*

R : On pourrait essayer de calculer b_i en ajoutant les probabilités de tous les chemins du bonheur qui commencent avec $X_0 = 1$ (en regardant l'arbre de toutes les possibilités). Mais comme cet arbre est (typiquement) infini et très compliqué, cette analyse n'est pas facile. Par contre, une approche «diviser pour conquérir» de décomposition de l'arbre dans ses branches obtenues en conditionnant sur le premier pas ramène à des'équations linéaires faciles à résoudre. Cet exercice illustre trois idées :

1. La puissance de la **méthode du conditionnement sur le premier pas**.
2. Une méthode générale pour le calcul des espérances pour les chaînes de Markov, qui ramène aux systèmes linéaires avec **une inconnue pour chaque état initial possible**. Les marches aléatoires sont des cas particuliers des chaînes de Markov [§] .
3. Les systèmes associés avec un processus fixe impliquent toujours la même partie homogène appelée ≪**opérateur**≫. Dans le cas des chaînes de Markov en temps discret et à espace d'états fini ou dénombrable, l' opérateur est la matrice $P - I$, où P est la matrice de transition P. Plus précisément, la matrice P de la marche symétrique (absorbante) pour $B = 4$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie facilement que l'opérateur $P - I$ agit sur un vecteur $\vec{v} = (v_0, ..., v_4)$ par la formule $(P - I)\vec{v} = (0, \frac{v_0+v_2}{2} - v_1, \frac{v_1+v_3}{2} - v_2, ..., \frac{v_{n-1}+v_{n+1}}{2} - v_n, ..., 0)$.

Ces idées seront approfondies dans les chapitres suivants, où nous regarderons quelques autres problèmes résolubles par le conditionnement sur le(s) premier(s) pas.

7.2 La ruine du joueur pour la marche aléatoire simple

Nous généraliserons maintenant les résultats du chapitre précédant pour la marche unidimensionnelle symétrique au cas des marches simples asymétriques. En même temps, nous étudierons d'autres problèmes concernant l'adsorption de la marche aléatoire simple unidimensionnelle (des équations similaires peuvent etre obtenues dans toute dimension, mais les solutions sont disponibles explicitement seulement dans le cas unidimensionnel).

Exemple 7.1 La ruine du joueur et autres ≪problèmes de Dirichlet≫ pour la marche aléatoire simple. *Considérons la marche aléatoire simple*

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n, X_n \in \mathbb{Z}$$

avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = \pm 1] = p, q$. Nous étudierons la marche jusqu'au ≪temps d'arret/sortie≫ $T = \min[T_0, T_B]$ quand le processus sort de l'intervalle $[0, B]$ pour B donné, c.-à-d. on prend 0 et B comme états absorbants. On appelle ce problème **la ruine du joueur***, à cause de l'interprétation d'un joueur qui s'engage dans une série de parties (indépendantes) à un jeu où à l'issue de chaque partie il gagne 1F avec une probabilité p et perd 1F avec une probabilité $q = 1 - p$, et qui*

§. Pour une preuve que ces processus sont Markoviens au cas $Z_i \in \mathbb{Z}$, voir Exe 5,6 en Philippe-Viano, qui démontre que chaque processus définit par une récurrence

$$X_{n+1} = f(X_n, Z_n)$$

où Z_n sont i.i.d. est Markovien. Pour les marches sur $\mathbb{Z}$, la matrice de transition $P = (p_{ij} = \mathbb{P}\{X_n = j / X_{n-1} = i\} = \mathbb{P}\{Z_n = j - i\})_{i,j \in \mathbb{N}}$ a aussi la propriété que $P_{i,j} = p_{i-j}$, où $p_k = \mathbb{P}\{Z_n = k\}$; les matrices de cette forme, c.-à-d. à ≪'diagonales≫' constantes, s'appellent matrices Toeplitz.

décide de s'arrêter de jouer dès qu'il aura B francs en poche, ou dès qu'il n'a plus d'argent. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la fortune du joueur au bout de n parties, et $X_0 = i$ représente sa fortune à l'entrée dans le Casino. On dénotera par $\mathrm{E_i}$ *l'espérance en commençant de i (conditionnant sur $X_0 = i$), et on désigne par E l'événement que le joueur gagne, c.-à-d.* $E = \{x_T = B\} = [\exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $X_n = B, X_i > 0, i = 1, ..., n-1]$ *. Pour tout i de* $\{0, ..., B\}$*, on pose :*

$$b_i = P\left(E \mid [X_{t_0} = i]\right).$$

1. *Quelles sont les valeurs de b_0 et b_B ?*
2. *Montrer que :*

$$\forall\, i \in \{1, ..., B-1\}\ ,\ b_i = p\, b_{i+1} + q\, b_{i-1}\ (\text{on rappelle que } q = 1-p).$$

3. *Obtener une expression explicite de b_i pour tout i de* $\{1, ..., B\}$. Indication : *Remarquez que la solution satisfaisante $b_0 = 0$ est de la forme :*

$$b_i = \begin{cases} k\ (1 - (\frac{q}{p})^i) & \text{quand } p \neq q \\ k\ i & \text{quand } p = q \end{cases}$$

   et déterminer k tq la condition frontière de b_B soit satisfaite.
4. *Pour tout i de $\{0, ..., B\}$, on pose $r_i = P(F \mid [X_0 = i])$ où F est l'événement »'le joueur repart ruiné»' . En procédant comme auparavant, montrer que :*

$$r_i = \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^B}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^B} & si\ p \neq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{B-i}{B} & si\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Pour tout i de $\{0, ..., B\}$, calculer $r_i + b_i$. Que peut-on en déduire ? Calculez les probabilités de ruine quand $B \to \infty$, pour $p > q$ et pour $p \leq q$. Expliquez la relation avec le comportement de $X_t, t \to \infty$.
5. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du gain final $f_i = \mathrm{E_i X_T}$. Calculez cette fonction pour $p = q$.*
6. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du temps de jeu : $t_i = \mathrm{E_i T}$. Calculez cette fonction, pour $p = q$, et pour $p < q$, quand $B \to \infty$.*
7. *Obtenez un système d'équations pour l'espérance du «coùt cumulé d'inventaire» $c_i = \mathrm{E_i} \sum_{\mathrm{t=0}}^{\mathrm{T-1}} \mathrm{X_t}$. Calculez cette fonction, pour $p = q$, et pour $p < q$, quand $B \to \infty$.*
8. *Obtenez un système d'équations pour $w_i = \mathrm{E_i a^T} = \sum_{\mathrm{k=0}} \mathbb{P}_\mathrm{i}[\mathrm{T = k}]\mathrm{a^k}$ (qui est la fonction génératrice des probabilités $\mathbb{P}_i[T = k]$). Calculez cette fonction, pour $p \neq q$.*
   Analyser le cas $B = \infty$, $p = q$, et vérifier les probabilités $P_1[T_0 = k], k = 1, 2, 3$.
9. *Obtenez les équations de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $u_x = \mathrm{E_x a^T g(X_T)}, \mathrm{a} \in (0,1)$ et par $v_x = \mathrm{E_x[a^T g(X_T)} + \sum_{\mathrm{t=0}}^{\mathrm{T-1}} \mathrm{h(X_t)}], \mathrm{a} \in (0,1)$.*

Nous allons résoudre cet exercice en utilisant la méthode du **conditionnement sur le premier pas** Z_1, l'idée de laquelle est d'obtenir des relations de récurrence qui lient les valeurs de l'espérance conditionnée à partir de tous les points de départ possibles. Nous verrons, en examinant les questions 2)-8) de cet exercice, qu'ils utilisent toutes le même opérateur

$$(Gf)_n := (P-I)(f)_n = p\, f_{n+1} + q\, f_{n-1} - f_n \tag{7.1}$$ op

la seule différence étant dans les conditions frontière et dans la partie nonhomogène. Cet exercice illustre trois idées :

1. La puissance de la **méthode du conditionnement sur le premier pas**.
2. Le calcul des espérances pour les chaînes de Markov comporte des systèmes linéaires avec **une inconnue pour chaque état initial possible**.
3. Les systèmes associés avec un processus fixe impliquent toujours la même partie homogène appelée «**opérateur**». Dans le cas des chaînes de Markov en temps discret et à espace d'états fini ou dénombrable, l' opérateur est «essentiellement» la matrice $P-I$, où P est la matrice de transition P. Plus précisément, la matrice P de la chaîne de Markov (absorbante) associée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Ces idées seront approfondies dans les chapitres suivants, où nous regarderons quelques autres problèmes résolubles par le conditionnement sur le(s) premier(s) pas. En plus, ils se regrouperont en deux types de questions :

1. "Gain final espéré", satisfaisant :

$$f_n = \mathrm{E_n[g(X_T)] = pf_{n+1} + qf_{n-1} \Longleftrightarrow (Gf)_n = 0, \quad F(0) = g(0), F(B) = g(B)}$$

2. "Coùt total accumulé espéré»

$$f_n = \mathrm{E_n[\sum_0^{T-1} h(X_i)] = h(n) + pf_{n+1} + qf_{n-1} \Longleftrightarrow (Gf)_n = 0, \quad f(0) = 0, f(B) = 0}$$

Solution :

1. $b_0 = 0, b_B = 1$
2. Gain final espéré, $g(x) = 1_{x=B}$. En conditionnant, on trouve :

$$\begin{aligned} b_n &= \mathbb{P}_n[X(T) = B] \\ &= p\,\mathbb{P}_n[X(T) = B/X(1) = n+1] + q\,\mathbb{P}_n[X(T) = B/X(1) = n-1] \\ &= p\,b_{n+1} + q\,_{n-1} \quad 1 \le n \le B-1 \end{aligned}$$

car

$$\mathbb{P}_n[X(T) = B/X(1) = n \pm 1] = \mathbb{P}[X(T) = B/X(0) = n, X(1) = n \pm 1] = \\ \mathbb{P}[X(T) = B/X(1) = n \pm 1] = \mathbb{P}[X(T) = B/X(0) = n \pm 1] = b_{n\pm 1}$$

en utilisant la propriété de Markov et l'homogénéité.

3. Quand $p = q = 1/2$, $b_x = P_x[X(T) = B]$ satisfait :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{b_{n-1}}{2} \quad \text{for any } 1 \le n \le B-1 \\ b_B &= 1 \\ b_0 &= 0 \end{aligned}$$

La méthode de résolution des équations de récurrence homogènes à coefficients constants commence en cherchant des solutions de la forme $b_n = r^n$. Si les racines de l'équation auxiliaire sont distinctes, la solution générale est :

$$b_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n$$

où k_1, k_2 sont déterminées en utilisant les conditions frontière. Ici, cherchant des solutions puissances r^x ramène à l'équation $r^2 - 2r + 1 = 0$ à deux racines identiques $r_{1,2} = 1$. La solution générale est $b_x = A+Bx$. Les conditions frontière donnent $b_x = \frac{x}{B}$. Solution finale si $p \neq q$: $b_n = \frac{1-(q/p)^n}{1-(q/p)^B}$.

4. $r_i + b_i = 1$, et donc la marche sera éventuellement absorbée dans une des deux frontières (elle ne peut pas rester à l'intérieur indéfiniment). Pour $p = q$, $\lim_{B\to\infty} r_n = \lim_{B\to\infty} \frac{B-n}{B} = 1$. Autrement,

$$\lim_{B\to\infty} r_n = \lim_{B\to\infty} \frac{(q/p)^n - (q/p)^B}{1-(q/p)^B} = \begin{cases} (q/p)^n, & q < p \\ 1, q > p. \end{cases}$$

5. $f_x = E_x[X(T)]$ (valeur finale espérée) satisfait $Gf(x) = 0, f(0) = 0, f(B) = B$. Pour $p = q$, la solution $f_x = x$ est obtenue comme ci-dessus :

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{f_{x+1}}{2} + \frac{f_{x-1}}{2} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq B-1 \\ f_B &= B \\ f_0 &= 0 \end{aligned}$$

(C'est aussi une fonction «harmonique», mais avec conditions frontière différentes.)

6. $t_x = E_x[T]$ (temps de sortie espéré) est un coùt total accumulé espéré (obtenu en prenant $h(x) = 1$), qui satisfait le système inhomogène $Gt(x) + 1 = 0, t(0) = 0, t(B) = 0$. Pour $p = q$

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + 1 \quad \text{for any } 1 \leq x \leq B-1 \\ t_B &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution d'une équation nonhomogène est donnée par

$$t_x = t_p(x) + h(x)$$

où $t_p(x)$ est une solution particulière et $h(x)$ est la solution générale de l'équation homogène. Commençons par l'équation homogène. La solution générale homogène («fonction harmonique») $h(x) = A+Bx$ pour cet opérateur a été déjà obtenue ci-dessus. Nous aimerions maintenant trouver une solution particulière $t_p(x)$ de l'équation $Gt_p(x) = -1$ de la même forme que la partie nonhomogène -1 de l'équation, donc ,$t_p(x) = C$; mais comme les constantes, et puis aussi les fonctions linéaires vérifient l'équation homogène $Gt_p(x) = 0$, nous devrons modifier deux fois cette forme en multipliant par x, en arrivant donc à $t_(x) = Cx^2$. Comme $Gx^2 = 2x(p-q) + 1 = 1$, on trouve

$C=-1$ et finalement la solution particulière $t_p(x)=-x^2$. La solution générale est donc $t(x)=-x^2+A+Bx$ et les conditions frontière ramènent à $t_x=x(B-x)$. Pour $p\neq q$

$$\begin{aligned} t_x &= pt_{x+1}+qt_{x-1}+1 \quad \text{for any } 1\leq x\leq B-1 \\ t_B &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution générale homogène avec $p\neq q$ est $h(x)=k_1(q/p)^n+k_2$ et le terme non-homogène 1 suggère une solution particulière constante , k, mais comme ça satisfait l'équation homogène, on modifie à kn. Finalement, $k=\frac{1}{q-p}$. La solution particulière est $t_p(x)=\frac{x}{q-p}$; elle satisfait déjà $t_p(0)=0$. La partie homogène $h(x)=t_x-t_p(x)$ devra aussi satisfaire $h(0)=0$ et donc elle sera de la forme $h(x)=A\tilde{h}(x)$ où $\tilde{h}(x)=((q/p)^x-1)$. En demandant que $t_n=\frac{n}{q-p}+A(q/p)^n-1)$ satisfait la condition frontière $t_B=0$ on trouve :

$$t_n=t_p(n)-t_p(B)\frac{\tilde{h}(n)}{\tilde{h}(B)}=\frac{n}{q-p}-\frac{B}{q-p}\frac{(q/p)^n-1}{(q/p)^B-1}.$$

La limite quand $B\to\infty$ est $t_n=\begin{cases}\infty & \text{si } p>q\\ t_p(n)=\frac{n}{q-p} & \text{si } p<q\end{cases}$; on peut aussi obtenir ce résultat en utilisant l'approximation détérmiste $X_n-X_0\sim nE(Z_1)$, appelée aussi limite fluide.

7. $c_x=E_x[\sum_0^{T-1}X(t)]$ (coùt total d'inventaire espéré) satisfait le système inhomogène $Gc(x)+x=0, c(0)=0, c(B)=0$. Pour $p=q$:

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{c_{x+1}}{2}+\frac{c_{x-1}}{2}+x \quad \text{for any } 1\leq x\leq B-1 \\ c_B &= 0 \\ c_0 &= 0 \end{aligned}$$

Une solution particulière est $c_p(x)=\frac{-x^3}{3}$. Finalement, on arrive à $c(x)=\frac{x(B^2-x^2)}{3}$. Pour $p\neq q$, une solution particulière est $c_p(x)=\frac{x^2}{2(q-p)}$ (elle satisfait déjà $c_p(0)=0$). La partie homogène satisfaisant $h(0)=0$ sera toujours $h(x)=A\tilde{h}(x)$ où $\tilde{h}(x)=((q/p)^x-1)$. En demandant que $c_n=c_p(n)+A(q/p)^n-1)$ satisfait la condition frontière $c_B=0$ on trouve :

$$c_n=c_p(n)-c_p(B)\frac{\tilde{h}(n)}{\tilde{h}(B)}$$

La limite quand $B\to\infty$ est $c_n=\begin{cases}\infty \text{ si } p>q\\ c_p(n) \text{ si } p<q\end{cases}.$

8. On arrive a $w(x)=A_1z_1^x+A_2z_2^x$, où $z_i=\frac{a^{-1}\pm\sqrt{a^{-2}-4pq}}{2p}$ sont les racines de $pz^2-a^{-1}z+q=0$, et A_i satisfont $A_1z_1^B+A_2z_2^B=1, A_1+A_2=1$ et $w(x)=\frac{z_1^x-z_2^x+(z_1^Bz_2^x-z_2^Bz_1^x)}{z_1^B-z_2^B}=\frac{z_1^x(1-z_2^B)}{z_1^B-z_2^B}-\frac{z_2^x(1-z_1^B)}{z_1^B-z_2^B}$

Quand $B = \infty$, $w(x) = z_2^x$. Si $p = q$, $z_2 = a^{-1} - \sqrt{a^{-2}-1} = a^{-1}(1 - \sqrt{1-a^{-2}} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{8}a + \frac{2}{32}a^5$. In particulier, $w(1)$ donne les probabilités $P[T_1 = 1] = \frac{1}{2}$, $P[T_1 = 3] = \frac{1}{8}$, ...

9. On a $u_x = g(x)$, pour $x \in \{0, B\}$, et le conditionnement donne la relation : $u_x = \mathrm{E_x[a^T g(X_\tau)] = a(pu_{x+1} + qu_{x-1})}$. $v_x = g(x)$, pour $x \in \{0, B\}$, et le conditionnement donne la relation : $v_x = a(pv_{x+1} + qv_{x-1}) + h(x)$.

Conclusion : Nous avons vu dans cet exercice une des idées les plus importantes de la modélisation Markovienne : **les espérances, vues comme fonctions de l'état initial, satisfont certaines équations qui font toujours intervenir un opérateur associé fixe, appelé générateur du processus, même que les conditions frontière, termes non homogènes, et d'autre «détails» (comme la présence/absence d'un multiple de l'opérateur identité) peuvent varier**. Les équations s'obtiennent facilement par la méthode de conditionnement sur le premier pas, en utilisant la propriété de l'oubli du passé des processus de Markov ; mais, il y a des parties spécifiques à chaque problème, qui ne sont pas oubliées ! Il s'avère que les mêmes équations décrivent la solution des problèmes analogues pour toutes les chaînes de Markov à espace d'états comptable, et avec des états absorbants – voir la prochaîne section. Par exemple, pour les chaînes de Markov, l'opérateur associé est $G = P - I$, où P est la matrice de transition, et pour le cas particulier d'une marche aléatoire $X_t = \sum_{i=1}^{t} Z_i$ avec $p_k = P[Z_i = k], k \in [-c, d]$ on a encore $G = P - I$, où $P = \sum_k p_k F^k$ et F est l'opérateur de translation $(Ff)_k = f_{k+1}, k \in \mathbb{Z}$. Alors, nous obtiendrons des équations similaires pour les problèmes respectifs, juste en remplaçant l'ancien opérateur par le nouveau. On rencontre la même situation pour toute la classe des processus «de Markov», X_t, différents qu'elles soient, vivant sur des espaces S considérablement plus compliqués, la seule différence étant que l'opérateur $G_X : F(S)- > F(S)$ associé a ces processus sera plus compliquée ! Par exemple, les problèmes de cette section ont aussi des versions à espace d'états continu, obtenu en considérant des marches avec incréments infinitésimaux ϵ, et en prenant la limite $\mathbb{E} \to 0$. La marche aléatoire devient ainsi un processus avec chemins continus, appelé mouvement Brownien. Les équations resteront les mêmes, seul l'opérateur G changera (dans un opérateur différentiel). En conclusions, il existe une correspondance un á un entre les processus de Markov et une certaine classe des opérateurs déterministes associés ; nous l'appellerons «Le Dictionnaire».

7.3 Problèmes de premier passage sur un intervalle semi-infini

Soit $\psi_n := P[T_0 < \infty] = \lim_{B\to\infty} \psi_{n,B}, \psi_{n,B} := P[T_0 < T_B]$ (il s'agit d'une suite croissante des événements) la probabilité de ruine sur $[0, \infty)$, pour la marche simple. On vérifie facilement, en partant des récurrences sur un domaine borné $[0, B]$, et en passant à la limite, que :

$$\psi_n = \lim_{B\to\infty} \psi_{n,B} = \begin{cases} (q/p)^n, & q < p \\ 1, & q \geq p. \end{cases}$$

Pour la marche simple, ou pour toute marche qui n'a pas des sauts en bas strictement plus grands que 1, cette solution peut être trouvée aussi directement, sans passer par la probabilité de ruine $\psi_n(B)$ sur $[0, B]$. On remarque d'abord que l'absence des sauts en bas plus grands que 1 impose une récurrence

$$\psi_n = \rho\psi_{n-1}, \quad \rho = P_n[T_{n-1} < \infty].$$

La fonction ψ_n est donc multiplicative en n, c.-à-d. $\psi_n = \rho^n$, avec un ρ déterminé par l'équation caractéristique ; par «miracle», il y aura toujours exactement une solution satisfaisant $\rho \in (0,1)$. On choisira en suite $\rho = 1$ ou $\rho < 1$, selon l'espérance des sauts (qui détermine la limite de X_n quand $n \to \infty$). Mais, cette approche ne résout pas le cas des marches «qui sautent» parfois en bas. Dans ce cas, la solution n'est plus simplement une puissance, mais une combinaison linéaire des puissances. Le «miracle» se répète : il y aura toujours exactement autant des solutions satisfaisantes $|\rho| \in (0,1)$ qu'on aura besoin pour satisfaire toutes les conditions frontière (en bas) nécessaires.

Exercice 7.2 *Calculer les probabilités de ruine $\psi_x, x \in \mathbb{N}$, pour une marche sur les nombres naturels, avec la distribution de chaque pas donné par : $\left\{p_1 = \frac{8}{10}, p_{-1} = \frac{1}{10}, p_{-2} = \frac{1}{10}\right\}$. Montrer qu'elles sont positives.*

R : La moyenne est $m_1 = 1/2 > 0$. Les probabilités de ruine satisfont $\psi_x = \frac{8}{10}\psi_{x+1} + \frac{1}{10}\psi_{x-1} + \frac{1}{10}\psi_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine de

$$\frac{8}{10}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{10}\rho + \frac{1}{10} = (\rho-1)(\frac{8}{10}\rho^2 - \frac{2}{10}\rho - \frac{1}{10}) = \frac{8}{10}(\rho-1)(\rho-1/2)(\rho+1/4)$$

$\psi_x = A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(\frac{-1}{4})^x$ satisfait $\psi_0 = \psi_{-1} = 1$ ssi $A_1 = 5/6, A_2 = 1/6$. Les probabilités de ruine sont :

$$\psi_x = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}\right)^x \approx \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Exercice 7.3 *Calculer les probabilités de ruine pour une marche avec $\left\{p_2 = \frac{3}{8}, p_1 = \frac{1}{8}, p_{-1} = \frac{1}{2}\right\}$*

Examinons maintenant la méthode de fonctions génératrices (analogues à la transformée de Laplace), une des méthodes les plus puissantes pour la résolution des équations de différences (différentielles), qui permet de considérer des marches qui ont une structure arbitraire dans la direction "opposée à la ruine".

Exercice 7.4 *a) Montrer que pour une marche $X_t = x + \sum_i Z_i$ sans des sauts strictement plus grands que 1 en bas on a*

$$\overline{\psi}^*(z) = \frac{p_{-1}\overline{\psi}_1}{p_Z(z) - 1} \tag{7.2}$$

où $p_Z(z) = Ez^{Z_1} = \sum_{i=-1}^{\infty} p_i z^i$.

b) Calculer les probabilités de ruine pour la marche aléatoire simple.

Sol : a) On ajoute les équations $\overline{\psi}_n = p\overline{\psi}_{n+1} + q\overline{\psi}_{n-1}$ multipliées respectivement par $z^n, n = 1, 2, ..$ On obtient ainsi une équation pour la fonction $\overline{\psi}^*(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z^n \overline{\psi}_n$:

b)

$$\psi^*(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{zp\overline{\psi}_1}{p + qz^2 - z} = \frac{p - qz - pz\overline{\psi}_1}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p - qz - z(p-q)}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p}{p-qz}$$

car le numerator s'annule en 1 («méthode du noyau») et donc $p\overline{\psi}_1 = p - q$. De lors, $\psi_n = (q/p)^n$.

Remarque 7.1 *Finalement, pour des marches avec une structure arbitraire dans les deux directions, la méthode de choix est le théorème d'arrêt des martingales de Doob.*

7.4 Marches aléatoires sur les espaces d'états dénombrables

Rappelons qu'un état i est appelé transient ssi sa probabilité de retour P_i satisfait $P_i < 1$, ou si l'espérance du nb. des visites dans ce point (qui a une distribution géométrique) satisfait $N_i = 1/(1-P_i) < \infty$. Dans le cas contraire, état est appelé récurrent. Pour la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, il est facile de calculer $P = 2\min(p,q)$; en conclusion, il y a récurrence ssi $p = q$. On vérifie facilement que le temps espéré de retour est ∞ (ce cas peut apparaître seulement sur les espace d'états infinis, et s'appelle nul récurant). Dans le cas, appelé récurrent positif, des marches récurrentes avec temps espérés de retour $E_i < \infty$, on peut vérifier que la distribution stationnaire est $\pi_i = E_i^{-1}$. Pour la marche simple, on peut aussi calculer N par la décomposition

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} P[S_{2k} = 0] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} (pq)^k = 1/(1-4pq)^{1/2} = |2p-1|^{-1} = |p-q|^{-1}.$$

Le résultat est obtenu en vérifiant le quotient des termes consécutifs dans la série ci-dessus ; on aperçoit alors qu'on a à faire avec la série hypergéométrique ${}_1F_0[{}^{1/2}_{-}; -4pq] = \frac{1}{(1-z)^{1/2}}$ (ce genre des sommes ont des formules explicites, qu'on peut découvrir facilement avec un logiciel symbolique, assez souvent) [1]. **Rm :** La dernière expression est valable aussi pour la marche paresseuse avec $p + q < 1$.

7.5 Le paradoxe du singe savant et les chaînes de Markov

«Donnons du temps au temps.» Avec suffisamment de temps, un chimpanzé qui tape au hasard sur le clavier d'une machine à écrire, produira sùrement (ac. proba 1) une copie de la pièce de théâtre Hamlet de Shakespeare. Mais combien de temps faut-il attendre avant que ça arrive ? Voila une version allégée de cette question.

Exercice 7.5 1. *On considère une pièce non équilibrée que l'on lance un nombre indéterminé de fois. La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$, et la probabilité de sortir face est égale à $q = 1-p$. Les lancers sont indépendants. On note N le temps d'attente du premier pile, c'est-à-dire le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir le premier pile, en incluant le pile ($N \in \{1,2,...\}$). Par exemple, si $X_1 = F, ...X_{j-1} = F$ et $X_j = P, j \geq 1$, la valeur de N est j. Dessinez l'arbre de toutes les possibilités pour cet expériment.*

2. *Calculez $p_k = P[N] = k, k = 0, ...$ Quelle est la loi de N ? Calculez le premier moment $m = \mathrm{EN}$.*
3. *Formuler une équation pour le premier moment $m = EN$ par la méthode du conditionnement sur le premier pas, et la résoudre [§] .*

---

1. On peut aussi utiliser la représentation $P_k = Coef(0, \mathrm{Ez}^{\mathrm{S_k}})$. On trouve $N = \sum_{k=0}^{\infty} Coef(0, \mathrm{Ez}^{\mathrm{S_k}}) = \mathrm{Coef}(0, \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty}(\mathrm{pz} + \mathrm{qz}^{-1})^{\mathrm{k}}) = \mathrm{Coef}(0, \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z-pz^2-q}}) = \mathrm{Coef}(0, \frac{1}{\mathrm{p-q}}(\frac{1}{\mathrm{1-z}} - \frac{1}{\mathrm{1-pz/q}})) = ...$, ou l'inversion de la transformée de Fourier. Cette méthode aboutit aussi en deux dimensions, en ramenant à des intégrales elliptiques

§. on utilise la relation $\mathcal{L}(N|X_1 = F) = \mathcal{L}(1+N)$, qui est une conséquence de la décomposition «premier pas + le reste» $N = 1 + N'$ et du fait que les distributions conditionnées par le premier pas du «reste» N' sont connues : a) $(N'|X_1 = P) \equiv 0$ et b) $\mathcal{L}(N'|X_1 = F) = \mathcal{L}(N)$ par le fait que la seule différence entre les réalisations possibles de N' et ceux de N est le moment «de départ de la montre», qui n'affecte pas la distribution d'une chaîne homogène

4. *(*) ≪Mieux que les moments ≫ Trouvez la fonction génératrice des probabilités* $p^*_N(z) = \mathrm{Ez^N} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \mathrm{p_k z^k}$, *et déduisez l'espérance* EN *(en calculant* $\varphi'(1)$*), et aussi* EN^2.
5. *Trouvez l'espérance* $m_2 = EN_2$ *du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient* **deux piles consécutives**, *en incluant les deux derniers résultats. Ind : Sauf* m_2, *il faudra trouver en même temps* $m_1 = \mathrm{E_1 N^{(2)}}$ *du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient deux piles consécutives, à partir du moment qu'on a obtenu la première.*
6. *(*) Calculer les probabilités* $P[N^{(2)'} = k], k = 0, 1, 2, ...,$ *à partir d'une récurrence qu'on détérminera. Calculer la fonction génératrice des probabilités* $p^*_{N^{(2)'}}(z)$, *où* $N^{(2)'}$ *est le nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient deux piles consécutives, en* **excluant les deux derniers résultats**.
7. *Reabordez pour* $k = 3$ *la question du premier moment* $\mathrm{EN}^{(3)}$.
8. *(*) Reabordez pour* $k = 3$ *les questions des probabilités et de la fonction génératrice des probabilités* $\varphi^*_{N^{(k)'}}(z)$ *(où la dernière variable représente le nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient k piles consécutives, en excluant la suite finale).*
9. *Trouvez l'espérance* $\tilde{m}$ *du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient* **pile-face-pile**, *en incluant les trois derniers résultats.*

Solutions :

1. L'espace des expérimentés se décompose en : $E = \{P, FP, FFP, FFFP, ...\} = \{P\} \cup F(E)$. En représentant l'espace comme un arbre, on trouve une branche avec une seule feuille $\{P\}$, et une branche qui est identique a l' arbre initial, après avoir enlevé la feuille initiale $\{F\}$. Remarquons cette structure récursive, qui est la clef du pb !
2. Les probas sont $p_k = pq^k, k = 0, 1, ...$ On a à faire avec une distribution bien connue (la géométrique ! !).
3. Il est quand même intéressant de remarquer que l'espérance peut aussi se calculer par un conditionnement sur le premier pas :

$$m = p \times 0 + q(1 + m) \Leftrightarrow m = \frac{q}{p} \text{ §}$$

Note : Pour l'autre définition d'une variable géométrique $N^{(1)'} := N + 1 \in \{1, 2, ...\}$ (en incluant la première face), on obtient par le résultat précédent

$$n := EN^{(1)+1} = E(N + 1) = \frac{1}{p},$$

ou encore par conditionnement sur le premier pas :

$$\begin{aligned} n &= \mathbb{E}[N^{(1)+1}] = \mathbb{P}[X_1 = P]\mathbb{E}[N^{(1)+1}|\{X_1 = P\}] + \mathbb{P}[X_1 = F]\mathbb{E}[N^{(1)+1}|\{X_1 = F\}] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = P]1 + \mathbb{P}[X_1 = F](1 + \mathbb{E}[N^{(1)+1}]) = p * 1 + q * (1 + n) = 1 + q * n \end{aligned}$$

§. Cela est une conséquence de la décomposition "premier pas + le reste"

$$N_1 = 1 + N'$$

et du fait que les distributions conditionnées par départ du "reste" sont connues : a) $(N'|X_1 = P) \equiv 0$ et b) $\mathcal{L}(N'|X_1 = F) = \mathcal{L}(N_1)$ par la proprieté de Markov (oubli du passé), et par le fait que la seule difference entre les réalisations possibles de N' et ceux de N_1 est le moment "de départ de la montre", qui n'affecte pas la distribution d'une chaîne avec matrice de transition stationnaire.

4. (*) La méthode des fonctions génératrices des probabilités $p_N(z) = Ez^N$ consiste en remplacer chaque terme de l'espace des expériments $E = \{P, FP, FFP, FFFP, ...\} = \{P\} \cup F(E)$ par $p^{nb.P} q^{nb.F} z^{nb.F+nb.P}$ (avec $nb.P = 1$). Observons qu'en rajoutant tous les termes avec $nb.H + nb.T = n$, on obtient précisément $p_n z^n$, et donc la somme totale est la fonction génératrice des probabilités $\varphi(z) = \sum_n p_n z^n$. En exploitant la structure récursive, qui implique la décomposition $p(z) = pz + qzp(z)$, on trouve $p(z) = \frac{pz}{1-qz}$. Finalement, EN $= \varphi'(1) = \frac{1}{\mathrm{p}}$. **Rem :** La méthode des **fonctions génératrices** (qui n'est pas vraiment nécessaire dans cet exercice simple) s'avère une des méthodes les plus puissantes pour les espaces d'états infinis.
5. **Méthode A de décomposition**. Cherchons une décomposition de l'espace des expériments :

$$E = \{FPP, FFPP, ..., PFPP, PFFPP, ..., PP, \} = F(E) \cup PF(E) \cup \{PP\}$$

(il peut etre utile de regarder en parallele l'arbre associé)
Les trois événements $F(E), PF(E), PP$ fournissent une décomposition de l'espace d'états , qui permet soit de constater que notre événement d'arrêt est arrivé, soit de relancer le processus du début. Par conséquent, la formule ET donne :

$$m_2 = q(m_2 + 1) + pq(m_2 + 2) + 2p^2 \Leftrightarrow m_2 = \frac{q + 2p}{1 - q - pq} = \frac{1 + p}{p^2}$$

Méthode B des inconnues auxiliaires : Après le premier pas, on a une décomposition

$$E = F(E) \cup P(E_1)$$

où on a dénoté E_1 l'arbre de toutes les expérimente pour arriver a deux piles, en partant d'une pile. Cette décomposition donne $m_2 = q(1 + m_2) + p(1 + m_1)$. Finalement, la décomposition

$$E_1 = F(E) \cup \{PP\}$$

donne $m_1 = q(1 + m_2) + p(1 + 0)$
6. Les probabilités p_k sont moins évidentes à obtenir. *Ind : Utilisons la chaîne de Markov associé sur l'espace $E = \{0P, 1P, 2P\}$, avec état absorbant $2P$.* $p_0 = p^2, p_1 = qp^2, p_2 = q^2p^2, p_3 = qp_2 + pqp_1, ...p_n = qp_{n-1} + pqp_{n-2}, \forall n \geq 3$. On trouve ainsi une récurrence à coefficients constants, qui donne $p_n = C_+\lambda_+^n + C_-\lambda_-^n$, $\lambda_\pm = \frac{q \pm \sqrt{q(4-3q)}}{2}$. Le système $C_+ + C_- = p^2, C_+/\lambda_+ + C_-/\lambda_- = 0$ donne $C_+ = \frac{p^2(q-\lambda_-)}{\lambda_+ - \lambda_-}, C_+ = \frac{p^2(\lambda_+ - q)}{\lambda_+ - \lambda_-}$. On peut trouver la même réponse à partir de la pgf $p(z) = Ez^{N(2)'} = \sum p^{nb.P} q^{nb.F} z^{nb.F+nb.P-2}$ (avec $nb.P = 2$), qui satisfait $p(z) = qzp(z) + pqz^2p(z) + p^2$. On trouve

$$\frac{p^2}{1 - qz - pqz^2} = \frac{C_+}{1 - z/\lambda_+} + \frac{C_-}{1 - z/\lambda_-}.$$

7. **Méthode A :** Remarquons que les quatre événements F, PF, PPF, PPP fournissent une décomposition de l'espace d'états qui permet soit de constater que notre événement d'arrêt est arrivé, soit de relancer le processus du début. Le conditionnement ces

événements donne : $n = q(n+1) + pq(n+2) + p^2q(n+3) + 3p^2 \Leftrightarrow n = \frac{q(1+2p+3p^2)+3p^3}{p^3} = \frac{1+p+p^2}{p^3}$ On devine que pour k piles consécutives, le résultat sera $\frac{1+p+p^2+p^{k-1}}{p^k}$.
Méthode C en utilisant un processus de Markov qui retient l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu. Ici, ca demande a inclure l'état final désiré, ainsi que tous ses préfixes.
Pour $k = 3$, on utilise une chaîne de Markov sur l'espace $\{0P, 1P, 2P, 3P\}$, avec état absorbant $3P$ ($X(t) = nP$ signifie ici que la suite observée au temps t contient exactement n piles à la fin. Pour illustrer, voilà un exemple d'un expériment possible et de l'évolution associée pour la chaîne de Markov

$$\begin{pmatrix} & P & F & F & P & F & P & P & P \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $Q = \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice des transitions entre les états transients $0, 1, 2$. Le vecteur $\boldsymbol{m}$ des trois espérances inconnues $\boldsymbol{m} = (x_0, x_1, x_2)$ satisfait $\boldsymbol{m} = \mathbf{1} + Q\boldsymbol{m} \Longrightarrow \boldsymbol{m} = (I - Q)^{-1}\mathbf{1}$. La réponse est

$$x_2 = \frac{1}{p^3}, x_1 = \frac{1+p}{p^3}, x_0 = \frac{1+p+p^2}{p^3}$$

8. Utilisons la chaîne de Markov sur l'espace $\{0P, 1P, 2P, 3P\}$, avec état absorbant $3P$. Soit Q la matrice des transitions entre les états transients $0, 1, 2$. Le vecteur $\boldsymbol{\varphi}$ des fonctions génératrices des moments satisfait $\boldsymbol{\varphi}(z) = z(Q\boldsymbol{\varphi}(z) + \boldsymbol{t})$. **Rem :** On peut aussi trouver une formule générale pour $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\varphi}'(1)$. En différentiant le système, on trouve $\boldsymbol{\varphi}'(z) - zQ\boldsymbol{\varphi}'(z) = Q\boldsymbol{\varphi}(z) + \boldsymbol{t} \Rightarrow (I - Q)\boldsymbol{\varphi}'(1) = Q\mathbf{1} + \boldsymbol{t} = \mathbf{1}$.

Dans le chapitre 8 on verra une solution plus simple, qui nous permettra de calculer l'espace d'états du temps pour qu'un chimpanzé qui tape au hasard produise le mot ABRACADABRA (et le pb. analogue pour produire Hamlet sera assigné en devoir maison).

7.6 Récurrences et équations différentielles linéaires

L'étude des marches aléatoires et des processus Markoviens ramène souvent à des équations différentielles ou des récurrences linéaires. Le cas des coefficients constants est assez simple, car toutes les solutions peuvent être construites à partir des solutions basiques exponentielles e^{rx}. Comme le cas des équations différentielles à coefficients constants est très bien connu, on rappelle ici seulement le cas de récurrences linéaires.

7.6.1 L'équation de récurrence linéaire à coefficients constants

Les deux équations de récurrence linéaire de deuxième ordre ci-dessous

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0, \tag{7.3}$$ rec

$$av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = d_n, \tag{7.4}$$ r1

sont appelées **homogène** et **nonhomogène** respectivement. **L'équ**

Si les coefficients a, b et c sont constants, on sait qu'ils existent des solutions de la forme $u_n = x^n$ pour tout n (fonctions exponentielles). Pour trouver x on remplace x^n en (7.3) et on trouve que x doit satisfaire **l'équation auxiliaire** :

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{7.5}$$ quad

Soient x_1 et x_2 les deux racines de l'équation de deuxième degré (7.5). On en déduit que la solution *générale* de (7.3) est toujours de la forme

1. Si $x_1 \neq x_2$
$$u_n = Ax_1^n + Bx_2^n,$$
2. Si $x_1 = x_2$,
$$u_n = Ax_1^n + Bnx_1^n,$$
avec des constantes A et B.

Dans les deux cas A et B doivent être déterminées à partir des conditions supplémentaires sur la frontière.

L'équation nonhomogène

La résolution du problème nonhomogène (7.4) comporte quatre pas :

1. Trouver une base pour l'espace vectoriel des solutions de l'équation auxiliaire homogène (7.3), et donc la solution générale u_n pour cette équation.
2. Déterminer une solution particulière de (7.4), par exemple en utilisant une expression «essai» $\tilde{v}_n$ qui a la même forme générale que le membre droit d_n,, mais des coefficients non déterminés. Par exemple, si d_n est un polynôme d'ordre k, on essaie un polynôme général d'ordre k.
3. Néanmoins, si votre expression d'essai a des termes qui sont inclus dans l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène obtenue au pas 1 (et donc qui vont être annihilés par l'opérateur des différences), il faut multiplier l'expression d'essai par $n, n^2, ...$ jusqu'à ce qu'il n'y a plus des termes inclus dans cet'espace .
4. Après la décision de la forme d'essai, on trouve les valeurs des coefficients de $\tilde{v}_n$ à partir de (7.4), par la méthode des coefficients non déterminés.
5. La solution générale de (7.4) est de la forme $v_n = \tilde{v}_n + u_n$. On trouve finalement les coefficients encore non déterminés en u_n, en utilisant les conditions sur la frontière pour v_n.

Exemple 7.2 *On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in N}$ qui vérifient la relation suivante :*

$$(R) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + \frac{3}{2}u_{n+1} - u_n = 0.$$

1. *Rechercher les suites géométriques qui vérifient cette relation (R).*
2. *On note $r_1$et $r_2$leurs raisons et on admet que E est un espace vectoriel de dimension 2, c.-à-d. toute suite de E s'écrit sous la forme*
$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Soit (a_n) la suite de E qui vérifie $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Calculer a_n.

Exemple 7.3 *On considère l'ensemble E' des suites (v_n) qui vérifient la relation :*

$$(R') \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} + \frac{3}{2} v_{n+1} - v_n = 4n + 1.$$

1. *On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = an + b$. Déterminer a et b pour que (u_n) soit une solution particulière de (R').*
2. *Soit (v_n) une suite de E'.*
   (a) *Pour toute suite (t_n) de E' on définit la suite (u_n) par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n - t_n$. Vérifier que $(u_n) \in E$.*
   (b) *En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + an + b$.*
   (c) *Déterminer $v_n$pour $v_0 = -\frac{5}{9}$ et $v_1 = -\frac{26}{9}$.*

Exemple 7.4 *Obtenez les formules analytiques des suites décrites par les relations de récurrence ci-dessous, et vérifiez-les en utilisant les premiers termes de la suite t_2, t_3.*

1. $t_i = 2t_{i-1} + i - 1, \quad t_0 = 0$
2. $t_i = 2t_{i-1} + 5 \ \cdot 2^i, \quad t_0 = 0$
3. $t_i = 3t_{i-1} - 2t_{i-2} + 2, \ t_0 = 0, t_1 = 2$
4. $t_i = 2t_{i-1} - t_{i-2} + 2, \ t_0 = 0, t_1 = 2$

Solution :

1. C'est une équation nonhomogène, alors nous aurons :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \ \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \ \text{ avec } \ c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{array}{rcl} c_1 &=& 2c_1 + 1 \quad \text{et } \ c_1 = -1 \\ c_2 &=& -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{ et } \ c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &=& -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 &=& = 0 = -1 + A \quad \text{ et } \ A = 1 \\ t_i &=& -i - 1 + 2^i \end{array}$$

2. C'est une équation nonhomogène, alors :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \ \tilde{t}_i = ci2^i \ \text{ avec } \ ci2^i = 2(c[i-1]2^i/2) + 52^i$$

$$\text{et alors} \qquad \begin{array}{rcl} c &=& 5, \quad t_i = 5i2^i + A2^i \quad \text{ et finalement,} \\ t_0 &=& = 0 = A \quad \text{ et } \ A = 0 \\ t_i &=& 5i2^i \end{array}$$

3. C'est une équation de différences nonhomogène et l'équation quadratique attachée a les racines $1, 2$, alors nous aurons :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 2^i + A_2, \;\; \tilde{t}_i = ci \;\text{ avec }\; ci = 3(ci - c) - 2(ci - 2c) + 2$$

$$\begin{aligned} \text{et alors} \qquad c &= -2 \quad \text{et } \; c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 &= = 0 = -1 + A \quad \text{ et } \; A = 1 \\ t_i &= -i - 1 + 2^i \end{aligned}$$

4. C'est une équation de différences nonhomogène dont les racines de l'équation quadratique attachée sont confondues égales à 1 donc nous aurons :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 + A_2 i, \;\; \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \;\text{ avec }\; c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\begin{aligned} \text{et alors} \qquad c_1 &= 2c_1 + 1 \quad \text{et } \; c_1 = -1 \\ c_2 &= -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{ et } \; c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 &= = 0 = -1 + A \quad \text{ et } \; A = 1 \\ t_i &= -i - 1 + 2^i \end{aligned}$$

7.6.2 La méthode des fonctions génératrices(*)

Exercice 7.6 *Calculez, par la méthode des fonctions génératrices : a)* $T(z) = \sum_{n \geq 0} T_n z^n$, *où*

$$T_0 = 0, \quad T_n = 2T_{n-1} + 1, n \geq 1$$

Trouvez T_n*. b) Calculez* $T(z) = \sum_{n \geq 0} T_n z^n$*, où*

$$T_0 = 1, \quad T_n = 2T_{n-1} + n - 1, n \geq 1$$

Trouvez T_n*.*

Sol : b) Par la méthode de décomposition des équations linéaires : $T_n = 2^{n+1} - (n+1)$. La fonction génératrice de T_n est $T(z) = 2/(1-2z) - 1/(1-z)^2 = (2z^2 - 2z + 1)/(1-2z)(1-z)^2$. En appliquant directement la méthode des fonctions génératrices à $T_n = 2T_{n-1} + n - 1$ on trouve l'équation : $T(z) = 1 + 2zT(z) + z/(1-z)^2 - (1/(1-z) - 1) = 2zT(z) + (2z^2 - 2z + 1)/(1-z)^2$, et on retrouve la même réponse. L'avantage de cette méthode plus compliquée est qu'elle réussit parfois quand la première méthode échoue.

Exercice 7.7 *a) Obtenez une formule explicite pour la suite décrite par la relation de récurrence ci-dessous (et vérifiez-la en utilisant les premiers termes de la suite)*

$$T_n = 4T_{n-1} - 3T_{n-2} + n, n \geq 1, \quad T_0 = a, T_{-1} = 0 \tag{7.6}$$

b) Calculez la fonction génératrice $T(z) = \sum_{n \geq 0} T_n z^n$ *c) (*) Obtenez la fonction génératrice* $T(z)$ *directement, en appliquant la méthode des fonctions génératrices à l'équation* (7.6)*.*

Sol : a)

$$(a+3/4)\,3^n - \frac{1}{4}\,(3+2n)$$

$$\frac{a+3/4}{1-3z} - \frac{1/4}{1-z} - \frac{1/2}{(z-1)^2} = \frac{a(z-1)^2+z}{(z-1)^2(3z-1)}$$

Exercice 7.8
a) Obtenez une formule explicite pour la suite décrite par la relation de récurrence ci-dessous (et vérifiez-la en utilisant les premiers termes de la suite)

$$T_n = 2T_{n-1} - T_{n-2} + 2, n \geq 2, \quad T_0 = T_1 = 0 \tag{7.7}$$

b) Calculez la fonction génératrice $T(z) = \sum_{n\geq 0} T_n z^n$ c) Obtenez la fonction génératrice $T(z)$ directement, en appliquant la méthode des fonctions génératrices à l'équation (7.7)

Exercice 7.9 *a) Obtenez la fonction génératrice $T(z) = \sum_{n\geq 0} T_n z^n$ pour la récurrence*

$$T_n = \lambda T_{n-1} + \lambda_2 T_{n-2}, n \geq 2, \quad T_0 = 1, T_1 = \lambda T_0 \tag{7.8}$$

b) Calculez (directement, ou par développement limité) les premiers termes, et vérifiez qu'ils sont des combinaisons linéaires de puissances des racines caractéristiques.

Exercice 7.10 *a) Obtenez une formule explicite pour la suite décrite par la relation de récurrence ci-dessous (et vérifiez-la en utilisant les premiers termes de la suite)*

$$T_n = 4T_{n-1} - 3T_{n-2} + 2, n \geq 2, \quad T_0 = T_1 = 0 \tag{7.9}$$

b) Calculez la fonction génératrice $T(z) = \sum_{n\geq 0} T_n z^n$ c) (*) Obtenez la fonction génératrice $T(z)$ directement, en appliquant la méthode des fonctions génératrices à l'équation (7.10).

Solution :

1. a)

$$T_n = \frac{1}{2}\,(3^n - 1) - n$$

b)

$$T(z) = \frac{1}{2(1-3z)} - \frac{1}{2(1-z)} - \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{2(1-3z)} + \frac{1}{2(1-z)} - \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{2z^2}{(1-z)^2(1-3z)}$$

La dernière expression peut être obtenue directement, à partir de la récurrence.

Exercice 7.11 *a) Obtenez une formule explicite pour la suite décrite par la relation de récurrence ci-dessous (et vérifiez-la en utilisant les premiers termes de la suite)*

$$T_n = 4T_{n-1} - 3T_{n-2} + n, n \geq 1, \quad T_0 = a, T_{-1} = 0 \tag{7.10}$$

b) Calculez la fonction génératrice $T(z) = \sum_{n\geq 0} T_n z^n$ c) (*) Obtenez la fonction génératrice $T(z)$ directement, en appliquant la méthode des fonctions génératrices à l'équation (7.10).

Solution : a)

$$(a+3/4)\,3^n - \frac{1}{4}\,(3+2n)$$

b)

$$\frac{a+3/4}{1-3z} - \frac{1/4}{1-z} - \frac{1/2}{(z-1)^2} = \frac{a(z-1)^2+z}{(z-1)^2(3z-1)}$$

7.7 Exercices

1. **La marche paresseuse :** Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P\left[Z_n = 1\right]$ =p, $P\left[Z_n = -1\right]$ =q et $P\left[Z_n = 0\right]$ =1- p-q, avec $0 < p + q < 1$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par $\mathrm{E_x}$ l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés.

   (a) Classifiez les pbs suivantes $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\}$, $f_x = E_x[X_T]$, $g_x = E_x[X_T^2]$, $t_x = \mathrm{E_x T}$, $c_x = E_x[\sum_0^{T-1} X_t]$, et $d_x = E_x[\sum_0^{T-1} X_t^2]$ comme des pbs de prix final ou de coùt accumulé. Quelles sont les équations de récurrence et les conditions frontière correspondant à chaque pb ?

   (b) (*) Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $w_x = \mathrm{E_x a^T}$.

   (c) Rappeler les étapes principales de la résolution des équations de récurrence avec coefficients constants qui en résultent pour a) p_x, b) f_x, c) t_x, et d) c_x, dans les deux cas possibles $p < q$ et $p = q < 1/2$. Donner les réponses finales dans le cas $p = q < 1/2$.

2. Calculer les **probabilités de ruine** $p_x, x \in \mathbb{N}$, pour une marche sur les nombres naturels, avec la distribution de chaque pas donnée par : $\left\{p_1 = \frac{6}{7}, p_{-1} = 0, p_{-2} = \frac{1}{7}\right\}$. Vérifier la positivité du résultat.

3. On lance une pièce de monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à q et celle de sortir pile égale à $p = 1 - q$. Soit N le **nombre de jets jusqu'à ce qu'on obtient une suite pile-face** (arrivées consécutivement), en incluant le dernier. Trouvez l'espérance $n = E[N]$. *Indication :* On peut utiliser un processus de Markov qui retient l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu (et qui contient dans ce cas quatre états).

4. Des femmes et des hommes arrivent dans un magasin, après des temps fixes, unitaires. Chaque instant, une femme arrive avec probabilité λ_F, ou un homme arrive avec probabilité λ_H, ou il n'y a pas d'arrivée, avec probabilité $q = 1 - \lambda_F - \lambda_H$. a. Trouver la probabilité qu'une femme entre avant un homme. *Indication :* Conditionnez sur le premier instant, ou sur le nombre d'instants sans arrivées. b. Trouver la probabilité que deux femmes entrent avant un homme. c. Quelle est la **probabilité qu'au moins deux hommes soient entrés consécutivement, avant que trois femmes ne soient entrées consécutivement** *Indication :* Considèrez un processus de Markov sur l'espace des états : $(H1, H2, H3, ...) \cup (F1, F2, F3, ...)$, qui enregistre la longueur k du nombre des clients $k \in \{1, 2, ...\}$ du même sexe entrés consécutivement jusq'au temps t, et leur sexe (H/F) ; formulez des équations d'arrêt pour les états d'arrêt indiqués.

Solution :

1. (a,b) Soit $(Gf)_x = p\ (f_{x+1} - f_x) + q\ (f_{x-1} - f_x)$ (formellement, la même expression comme dans le cas «non paresseux», sauf que maintenant $p + q < 1$. Les équations

sont respectivement :

$$\begin{aligned}(Gp)(x) = 0, p_K = 1, p_0 = 0 \\ (Gf)(x) = 0, f_K = K, f_0 = 0 \\ (Gg)(x) = 0, g_K = K^2, d_0 = 0 \\ (Gt)(x) + 1 = 0, t_K = 0, t_0 = 0 \\ (Gc)(x) + x = 0, c_K = 0, c_0 = 0 \\ (Gw)x + [1 - a^{-1}]w_x, w_K = 1, w_0 = 1\end{aligned}$$

Ces sont exactement les mêmes équations comme pour une marche non paresseuse, sauf que l'opérateur est différent.

[c] Pour p_x et f_x on obtient donc les mêmes équations comme pour une marche symétrique avec $p = 1/2$, par exemple :

$$\begin{aligned} 2pp_x &= pp_{x+1} + pp_{x-1} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ p_K &= 1, \quad p_0 = 00 \end{aligned}$$

et donc les mêmes réponses $p_x = \frac{x}{K}, \quad f_x = K^2 \frac{x}{K} = xK$.

[d] Pour $t_x = E_x[T]$ [temps de sortie espéré] on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= pt_{x+1} - [p+q]t_x + qt_{x-1} + 1 \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ t_K &= 0, \quad t_0 = 0 \end{aligned}$$

Soit $t_0(x) = \frac{x}{q-p}$ une solution particulière qui satisfait $t_0(0) = 0$. La solution est $t_x = t_0(x) - t_0(K)\frac{h(x)}{h(K)}$ où $h(x) = 1 - (q/p)^x$ est une solution homogène satisfaisante $h(0) = 0$. Pour $K = \infty, q > p$ on obtient $t(x) = t_0(x)$. Pour c_x on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= pc_{x+1} - [p+q]c_x + qc_{x-1} + x \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ c_K &= 0, \quad c_0 = 0 \end{aligned}$$

Soit $c_0(x) = \frac{x^2}{2(q-p)} + \frac{x(q+p)}{2(q-p)^2}$ une solution particulière qui satisfait $c_0(0) = 0$. La solution est $c_x = c_0(x) - c_0(K)\frac{h(x)}{h(K)}$ où $h(x) = 1 - (q/p)^x$ est une solution homogène satisfaisant $h(0) = 0$. Pour $K = \infty, q > p$ on obtient $c(x) = c_0(x)$.

Remarque : Le fait que les équations sont identiques pour ces deux marches [paresseuse et non-paresseuse] n'est pas une coïncidence. En fait, il s'avère que les réponses obtenues sont les mêmes por n'importe quel processus Markovien homogène, si on défini l'opérateur de la façon juste. Donc, la réponse pour tous les problèmes concernant espérances variable aléatoire impliquer un seul opérateur G [seulement les conditions frontière et la partie non homogène changent d'un problème à l'autre]- en fait, la famille des processus aléatoires Markoviens est isomorphe à une famille d'opérateurs déterministes. En plus, la structure des réponses en fonction de G est la même pour tous les processus aléatoires Markoviens, malgré leur diversité ; c'est un fait remarquable, qui démontre la puissance de ce concept.

2. Les probabilités de ruine satisfont $p_x = \frac{6}{7}p_{x+1} + \frac{1}{7}p_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine de

$$\frac{6}{7}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{7} = (\rho-1)(\frac{6}{7}\rho^2 - \frac{1}{7}\rho - \frac{1}{7}) = \frac{6}{7}(\rho-1)(\rho-1/2)(\rho+1/3)$$

$p_x = A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(\frac{-1}{3})^x$ satisfait $p_0 = p_{-1} = 1$ ssi $A_1 = 4/5, A_2 = 1/5$.

3. Considerons le processus de Markov sur des états spécifiant les deux derrières résultats possibles : $\{PF\}, \{*P\}, \{P^cF\}, \emptyset$. Les deux inconnues $x_1 = x_{\{*P\}}, x_2 = x_{\{P^cF\}}$ satisfont :

$$x_1 = 1 + px_1 + q * 0, x_2 = 1 + px_1 + q * x_2\ q \Leftrightarrow x_1 = q^{-1}, x_2 = x_1 + p^{-1} = q^{-1} + p^{-1}$$

4. (a) La probabilité p_F satisfait

$$p_F = \lambda_F = +qp_F \Leftrightarrow p_F = \frac{\lambda_F}{\lambda_F + \lambda_H}$$

   (b) p_F^2

   (c) Considerons la chaîne de Markov en temps discret qui enregistre la longueur du nombre des clients du même sexe entrés consécutivement et le type, ayant comme espace des états les suites $(H1, H2, H3, ...) \cup (F1, F2, F3, ...)$. En prenant en considération seulement les temps quand la chaîne saute, pn a une marche aléatoire qui "avance" sur les hommes/femmes a.p. $p_H = 1 - p_F$ et p_F, et "change de sexe" autrement. Par exemple, si $\lambda_F = 2\lambda_H$, les deux probas sont $p_H = \frac{1}{3}, p_F = \frac{2}{3}$. En dénotant par x_i, y_i la probabilité de notre événement en partant d'une suite des i femmes hommes, il faudra résoudre :

$$\begin{aligned} y_1 &= p_H + p_F x_1 \\ x_1 &= p_H y_1 + p_F x_2 \\ x_2 &= p_H y_1 \end{aligned}$$

   Generalisant pour m hommes et n femmes et posant $S_{F,k} = \sum_{i=1}^k p_F^i, S_{H,k} = \sum_{i=1}^k p_H^i$, nous trouvons

$$y_1 = \frac{p_H^{m-1}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}, x_1 = \frac{p_H^m S_{F,n-2}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

   et finalement

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^m (1 + p_F S_{F,n-2})}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}} = \frac{p_H^m S_{F,n-1})}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

   Pour $m = 2, n = 3$, on trouve :

$$y_1 = \frac{p_H}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}, x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$

   et

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F + p_F^2)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$

Chapitre 8

Martingales

ch:Mart

Les martingales sont une famille des processus stochastiques, inspirée par la théorie des jeux, qui a trouvé des applications dans plusieurs branches des probabilités. Le terme désigne dans la théorie des jeux une stratégie permettant de gagner à coup sùr dans un jeu équitable (comme le pile ou face). Pour la **martingale mathématique,** on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, avec une suite des variables $X_n, n \in \mathbb{N}$, qui représente la fortune d'un joueur au temps n, et une deuxième suite $Y_n, n \in \mathbb{N}$, qui représente des informations acquises au temps n. Par exemple, Y_n pourrait être la mise du jeu n, et alors

$$X_{n+1} = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k = X_n + Y_{n+1}$$

Si Y_i sont i.i.d., alors on est dans le cadre des probabilités classiques, mais justement les martingales généralisent ce cadre considérablement (les mises peuvent dépendre de «l'information du passé» $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$). Un jeu est caractérisé par la suite $E[X_{n+1}|Y_1, Y_2, ..., Y_n] = E[X_{n+1}|\sigma(Y_1, Y_2, ..., Y_n)] = E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. Il est appelé martingale (ou jeu juste) si $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0, \forall n$.

Exemple 8.1 *Prenons un exemple de jeu dù à D'Alembert : on parie x euros sur pile. Si la pièce tombe sur pile, on ramasse 2x euros (soit un gain de x euros), et si elle tombe sur face, on perd tout. A chaque coup, on est libre de se retirer ou de continuer à jouer. Une stratégie gagnante à coup sùr est la suivante : au 1er coup, on mise 1 euro : si on gagne, on se retire (et on empoche 1 euro) ; sinon, on continue (et on a perdu 1 euro). au 2ème coup, on double la mise, 2 euros : si on gagne, on se retire, et on a gagné 2-1=1 euro. Sinon on continue, on a perdu 2+1=3 euros. au 3ème coup, on double encore la mise, en jouant 4 euros. Si on gagne, on se retire, avec en poche un gain de 4-3=1 euro. Sinon, on continue la partie, et on double au coup suivant la mise, etc. La théorie des martingales modélise en théorie des probabilités le concept de jeu équitable (ou juste), en stipulant que l'espérance du gain doit être* 0 *à chaque mise. Remarquons que notre exemple est un jeu juste. Mais, comme pile variable aléatoire bien finir par tomber, on est sùr de finir par gagner 1 euro (à condition d'avoir une fortune infinie). Cela contredit l'intuition «qu'un ne peut pas gagner contre un jeu juste», qui est formalisée dans un théorème qui affirme que si un joueur a une fortune initiale finie, il n'existe pas de stratégie pour gagner à coup sùr, dans un jeu juste et «raisonnable». On verra plus tard comment définir «raisonnable» ; pour l'instant, remarquons que si pile met du temps a sortir, il variable aléatoire falloir miser beaucoup (si la pile sort qu'au 8è tirage, alors on aura déjà misé 1+2+4+8+16+32+64+128=255 euros, et tout cela pour gagner 1 euro). La théorie des martingales jettera de la lumière sur ce paradoxe de «gagner dans un jeu juste», sans avoir aucun capital.*

Rapellons les définitions de base de la théorie des martingales.

Définition 8.1 *Une* **filtration** *est une suite croissante (au sens de l'inclusion) $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$, où $\mathcal{T}$ est un ensemble ordonné (muni d'une relation d'ordre).*

Définition 8.2 *Un processus X_t est dit* **adapté** *à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ si X_t est $(\mathcal{F}_t)$- mesurable pour chaque t. La notation est $X_t \in \mathcal{F}_t$.*

Définition 8.3 *Un jeu est une paire formée par une filtration $\mathcal{F}_t$ et par une suite des variable aléatoire $X_t \in \mathcal{F}_t$.*

Intuitivement, les tribus $\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}$ modélisent «'l'évolution de l'information»' disponible jusqu'au temps t, et X_t représentent la valeur d'un jeu, comme perçue au temps t. Par exemple, si la filtration $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_4$ est formé par les 5 étapes d'un jeu de poker Texas hold'em, les variables indicatrices $I_0, I_1, ..., I_4$ dont la valeur est 1 si un joueur donné gagne sont adaptés à la filtration. Nous allons introduire maintenant trois catégories des processus stochastiques, l'importance desquelles peut être comparée à celles des fonctions constantes, croissantes et décroissantes, dans le calcul déterministe.

Définition 8.4 *Une suite des variable aléatoire $X_t \in \mathcal{F}_t, X_t \in L_1(dP)$ est appelée*

$$ssi \quad \mathrm{E[X_{t'}/\mathcal{F}_t]} \begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases} \mathrm{X_t}, \quad quand \ \mathrm{t' > t}.$$

Définition 8.5 Martingales en temps discret. *Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, intégrables, indépendantes et centrées. Pour tout n de $\mathbb{N}$, la suite de tribus : $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, ..., Y_n)$ est une filtration. Une suite $(X_n) \in (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ de variables aléatoires réelles intégrables est une martingale en temps discret par rapport à $(\mathcal{F}_n)$ si elle vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N} , E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n.$$

Exemple 8.2 *Martingale «additive»=Somme de variables aléatoires indépendantes de moyenne 0. Si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes et centrées, alors la suite des sommes :*

$$X_n = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$$

est une martingale «additive» par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, ..., Y_n)$. Bien entendu, si les Y_i ne sont pas centrées, mais de moyenne a alors $(X_n - na)_n$ est une martingale.

Exemple 8.3 *Martingale multiplicative=Produit de variables aléatoires indépendantes de moyenne 1. Si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes avec moyennes 1, alors la suite des produits :*

$$X_n = Y_0 \times Y_1 \times \cdots \times Y_n = \prod_{k=0}^{n} Y_k$$

est une martingale «multiplicative» par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, ..., Y_n)$. En effet, prenant espérance conditionnelle de la formule récursive $X_{t+1} = X_t Y_{t+1}$ donne :

$$\mathrm{E[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = E[X_t Y_{t+1}|\mathcal{F}_t] = X_t E Y_{t+1} = X_t}$$

Là aussi, dans le cas où les Y_i ne sont pas de moyenne , , 1 mais de moyenne $a \neq 0$, on considérera $X_n = a^{-n} \prod_{k=0}^{n} Y_k$.

Exemple 8.4 *Soit* $X_{n+1} = \begin{cases} \alpha + \beta X_n & a.p. \quad X_n \\ \beta X_n & a.p. \quad 1 - X_n \end{cases}$, *où* $X_0, \alpha, \beta \geq 0$. *Montrer que* X_n *est une sur/sous/martingale dans les cas* $\alpha + \beta \leq 1, \alpha + \beta = 1, \alpha + \beta \geq 1$. **R :** *Ecrivons* $X_{n+1} = \beta X_n + \alpha B_{n+1}, n \geq 0, X_0 = x$ *où* $B_n, n \geq 1$ *sont des v.a. i.i.d. avec loi de Bernoulli* $B(p)$, *avec* $p = X_n$. *Soit* $\mathcal{F}_n = \sigma(B_1, B_2, ..., B_n) = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$. *Alors,*

$\mathrm{E}[\mathrm{X_{n+1}}|\mathrm{X_n}] = \beta \mathrm{X_n} + \alpha \mathrm{X_n} = (\beta + \alpha)\mathrm{X_n}$

Rem : *Il est interessant de investiguer la convergence de* X_n *dans les cas* $\alpha+\beta \leq / = \geq 1$.

Exercice 8.1 Martingales de Wald. *Soit* $X_t = x + \sum_{i=1}^t Z_i$, *avec* Z_i *i.i.d.*

a) Trouver les valeurs de θ *pour les quelles* θ^{X_t} *est une martingale. Donnez ces valeurs quand* $Z_i = \pm 1$, *avec probas* p, q.

b) Trouver les valeurs de γ *pour les quelles* $e^{\gamma X_t}$ *est une martingale.*

Exercice 8.2 Martingale exponentielle. *Soit* $X_t = x + \sum_{i=1}^t Z_i$, *avec* Z_i *i.i.d.*

Comment choisir $\kappa = \kappa(\gamma)$ *tel que* $e^{\gamma X_t - \kappa t}$ *soit une martingale ?*

Exercice 8.3 *Martingale obtenue par filtrage*
On se donne $\zeta \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *et une filtration* $(\mathcal{F}_n)_n$. *Pour tout* $n \geq 0$, *on pose*

$$\mathbb{E}(\zeta|\mathcal{F}_\infty) = \zeta_n$$

Montrer que $(\zeta_n)_n$ *est une martingale.*

Exercice 8.4 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une martingale par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Soient m et n deux entiers positifs tels que* $m < n$, *calculer* $E\left((X_{m+1} - X_m)(X_{n+1} - X_n)\right)$.

ex:Ds **Exercice 8.5** *a) Montrer qu'une martingale additive ou multiplicative* **en temps discret** X_n *(satisfaisant* $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$*)) satisfait aussi :*

$$E[X_{n+k}|\mathcal{F}_n] = X_n, \forall k \geq 1,$$

où $F_n = \sigma(X_1, \ldots X_n)$ *est l'information au temps n.*

b) Montrer que la même conclusion est vraie pour chaque martingale **en temps discret**.

c) Montrer que les martingales ont espérance constante, i.e.

$$E[X_{n+1}] = E[X_n] = ... = E[X_1] = E[X_0].$$

Sol : a) Ce cas est très facile, car pour les martingales additives et multiplicatives, les espérances conditionnelles se réduisent a des espérances non conditionnelles. En effet

$$\begin{aligned} E[X_{k+n}|\mathcal{F}_n] &= E[X_n + \sum_{i=1}^k Z_{n+i}|\mathcal{F}_n] \\ &= X_n + E[\sum_{i=1}^k Z_{n+i}] = X_n \end{aligned}$$

Le cas des martingales multiplicatifs est similaire.

b) On a besoin de la loi ET généralisé (prop. (8))

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[\mathrm{X}|\mathcal{B}]|\mathcal{C}] = \mathrm{E}[\mathrm{X}|\mathcal{C}] \text{ si} \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \tag{8.1}$$ cl

Pour $k = 2$ par exemple :

$$\mathrm{E}[\mathrm{X_{t+2}}|\mathcal{F}_\mathrm{t}] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[\mathrm{X_{t+2}}|\mathcal{F}_\mathrm{t+1}]|\mathcal{F}_\mathrm{t}] = \mathrm{E}[\mathrm{X_{t+1}}|\mathcal{F}_\mathrm{t}] = \mathrm{X_t}$$

Alternativement, on peut utiliser l'idée de la démo du cas additif, car on peut toujours décomposer une martingale comme une somme des «différences de martingale» Z_i :

$$X_{t+k} = X_t + \sum_{i=1}^{k} Z_{t+i},$$

tq $X_t \in \mathcal{F}_t \Longrightarrow Z_t \in \mathcal{F}_t$, et $\mathrm{E}[\mathrm{Z_{t+1}}|\mathcal{F}_\mathrm{t} = 0$. Prenant espérance conditionnelle :

$$E[X_{t+k}|\mathcal{F}_t] = E[X_t + \sum_{i=1}^{k} Z_{t+i}|\mathcal{F}_t]$$

et il nous reste à montrer $E[Z_{t+i}|\mathcal{F}_t] = 0, \forall i \geq 2$. On procède par récurrence. Pour obtenir le résultat pour $j+1$, on conditionne sur l'information supplémentaire au temps $t+j$ $E[Z_{t+j+1}|\mathcal{F}_t] = E\ E[Z_{t+j+1}/\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_{t+j}]] = E[E[Z_{t+j+1}|\mathcal{F}_{t+j}]|\mathcal{F}_t] = E[0] = 0$ ■

Interprétation : Une somme $X(t) = \sum_{i=1}^{t} Z_i$, où $Z_i = u_i, l_i$ a.p. p_i, q_i, peut être vue comme les gains cumulés d'un joueur qui mise Z_i au temps i. Si le jeu est «juste» au sense que $\mathrm{EZ_i} = 0$, alors il est évident que

$$\mathrm{EX_t} = \mathrm{EX_0}, \forall \mathrm{t}$$

. Outrement dit, le joueur qui s'arrête a un temps fixe ne peut pas améliorer l'espace d'états de ses gains cumulés juste en variant les mises Z_i (tant que $\mathrm{EZ_i} = 0$).

Question 4 *Il se pose alors la question si des mises plus sophistiquées, conditionnées par le passé, ou d'autres* **stratégies d'arrêt** T, *par exemple* $T = min(T_L, T_K)$, *peuvent améliorer ses chances. Mais, cf. le problème de la ruine du joueur concernant la marche symmétrique simple, on sait que le temps d'arrêt* $T = min(T_L, T_K)$ *ne peut améliorer l'espace d'états des gains futurs non-plus.*

R : La reponse est fourni par le théorème d'arrêt de Doob, qui, dans sa version "officieuse", nous assure que la relation

$$E[S_T] = S_0$$

reste vraie encore pour des temps d'arrêt T aléatoires arbitraires, mais «raisonnables» (ayant par exemple espérance finie, ou qui assurent des pertes cumulées bornées). C'est une des applications les plus importantes des martingales.

$\boxed{\texttt{Com}}$ **Exercice 8.6** *Soit* X_t *les gains d'un joueur qui mise* $Y_i = \pm 1$, *avec* $p_i = q_i = \frac{1}{2}$, *dans les limites* $[0, B]$.*Calculer, en supposant que le théorème d'arret des martingales est applicable : a)* **l'espérance des gains** $v(x) = \mathrm{E_x X_T}$ *b) la* **probabilité de gagner** $p(x) = P_x[X_T = B]$.

Sol : a) L'application du théorème d'arret a la martingale X_t donne

$$v(x) = \mathrm{E_x X_T} = \mathrm{X_0} = \mathrm{x}$$

b)

$$\mathrm{E_x X_T} = \mathrm{E_x X_0} = \mathrm{x} = \mathrm{K}\ \mathbb{P}_\mathrm{x}\{\mathrm{X_T} = \mathrm{K}\} + \mathrm{L}\ (1 - \mathbb{P}_\mathrm{x}\{\mathrm{X_T} = \mathrm{K}\}) = \mathrm{x},$$

et donc

$$p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\} = \frac{(x-L)}{(K-L)}.$$

8.1 Le théorème d'arrêt des martingales de Doob

Nous allons présenter maintenant une des applications les plus importantes des martingales, inspirée par la théorie des jeux.

Tenant compte du fait que pas tous le temps d'arrêt T garantissent l'applicabilité du théorème d'arrêt de Doob (voir par exemple section 8.3), il est naturel de considerer d'abord des "temps tronqués" $T \wedge n_0$ pour n_0 fixe. Nous allons montrer que pour ces temps le théorème d'arrêt est toujours applicable (Corollaire 8.1), en passant par un resultat plus fort, qui nous assure que le processus obtenu en regardant une martingale aux temps d'arrêt tronqués progressivement est aussi une martingale.

t:os **Théorème 8.1 Théorème des processus arrêtés** *Si X est une martingale (respectivement sur-martingale, sous-martingale) et T un temps d'arrêt, alors la processus arrêté $X^T = (X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est aussi une martingale (resp. sur-martingale, sous-martingale). En particulier, on a pour tout entier n,*

$$\mathbb{E}(X_n^T) = \mathbb{E}(X_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(X_0), \quad \textit{(resp. } \leq, \geq \textit{)}$$

Remarque 8.1 *Ce théorème dit en outre que pour tout $n \in \mathcal{N}$, $X_{T\wedge n}$ est dans $\mathbb{L}^1$. Il ne suppose aucune condition sur le temps d'arrêt.*

Démonstration. *Démonstration du théorème de sur-martingales arrêtées* On a juste à montrer le théorème pour X surmartingale puisque X sous-martingale équivaut à $-X$ sur-martingale et X est une martingale ssi c'est à la fois une sur-martingale et une sous-martingale.
1) $X_{T\wedge n}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable car

$$X_{T\wedge n}(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k(\omega) 1_{T(\omega)=k} + X_n(\omega) 1_{\{T(\omega)\geq n\}}$$

C'est une somme de variables aléatoires $\mathcal{F}_n$-mesurables.
2) Pour tout $n \in \mathcal{N}$, $X_{T\wedge n}$ est intégrable car $|X_{T\wedge n}| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |X_k|\right) + |X_n|$.
3)On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{T\wedge n}|\mathcal{F}_{n-1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_k 1_{T=k}|\mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(X_n 1_{T\geq n}|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 1_{T=k}\mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{n-1}) + 1_{T\geq n}\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} 1_{T=k} X_k + 1_{T\geq n} X_{n-1} = X_{T\wedge n-1}
\end{aligned}$$

□

c:Ds **Corollaire 8.1** *Si $(X_n)_n$ est une martingale et si T est un temps d'arrêt alors pour tout entier n, on a*

$$\mathbb{E}(X_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(X_0)$$

Remarque 8.2 *Cette propriété généralise* $\mathrm{EX_n = X_0, \forall n}$ *(qui est une conséquence immédiate de la définition des martingales).*

A-t-on aussi $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$? Un contre-exemple, approfondi en section 8.3, est le suivant. Soit $(X_n)_n$ une marche aléatoire telle que $X_0 = 0$ et $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = 0$. $(X_n)_n$ est une martingale. Soit $T = \inf\{n \in \mathcal{N};\ X_n = 1\}$ le temps d'entrée en 1. On voit que c'ést un temps d'arrêt (par rapport à la filtration naturelle de X). Pourtant, on a

$$\mathbb{E}(X_T) = 1 \neq \mathbb{E}(X_0) = 0$$

Remarque 8.3 *Le théorème 8.1 est la version la plus simple du fameux théorème d'arrêt des martingales, et peut être aussi utilisé comme pas intermédiaire pour le démontrer.*

Remarque 8.4 *Comme il n'existe pas des conditions nécessaires et suffisantes simples qui assurent la validité du théorème d'arrêt des martingales, nous donnons ci-dessous une réunion des plusieurs versions intéressantes (prises des livres de Williams, Grimmett et Ross).*

Théorème 8.2 *(***Théorème d'arrêt des martingales***) Si $S_t, t \geq 0$ est une martingale par rapport à une filtration $\mathcal{F}_n$, $X_t = S_t - S_{t-1}, t \geq 1$ sont les différences de martingale, et T est un temps d'arrêt ($\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$), alors*

$$\mathrm{E}[\mathrm{S_T}|\mathcal{F}_0] = \mathrm{S_0}$$

dans chacun des cas suivants :

1. *$T < C$, où C est une constante.*
2. $$\mathrm{E}T < \infty, \quad \begin{cases} \max_{\{1<t<T\}} |X_t| \leq C, & ou \\ \max_{\{1<t<T\}} \mathrm{E}[|\mathrm{X_t}|\mathcal{F}_{\mathrm{t}-1}] \leq \mathrm{C} \end{cases}$$

   où C est une constante.
3. $$P[T < \infty] = 1 \Leftrightarrow P[T = \infty] = 0, \quad \begin{cases} \max_{\{1<t<T\}} |S_t| \leq C, & ou \\ \\ \mathrm{E}|\mathrm{S_T}| < \infty,\ \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{E}[\mathrm{S_n} 1\!\!1_{\mathrm{T>n}}] = 0 \end{cases}$$

   où C est une constante.

Remarque 8.5 *Les trois cas sont rangés dans ordre croissante des demandes sur S_t, et diminuante sur T.*

Le plus général est le dernièr cas (où le jeu fini sûrement), et son deuxième sous-cas illustre le fait que c'est en fait le couple (T, S_T) qui doit etre "raisonnable ensemble".

Exercice 8.7 *Demontrer le cas 3 b), en utilisant la décomposition :*

$$S_T = S_{\min[T,n]} + (S_T - S_{\min[T,n]}) 1\!\!1_{T>n},$$

avec $n \to \infty$, et le cas 1.

Exercice 8.8 *Comment peut on justifier l'application du théorème d'arret des martingales dans l'exercice 8.6 ?*

Remarque 8.6 *Sur un intervalle fini, ce genre des problèmes peut etre résolu facilement à partir de l'équation des différences obtenu par conditionnement sur le premier pas, qui est ici :*

$$v_x = \frac{1}{2} v_{x+1} + \frac{1}{2} v_{x-1}, v_0 = 0, v_K = K.$$

Sol : L'application pourrait etre justifié par les cas 2) ou 3) du théorème d'arret. En effet, les conditions que les gains $|X_t| \leq \max(|L|, K)$ et les mises sont bornées sont évidentes. Par contre, les conditions $\mathrm{E_x T} < \infty$ et $\mathbb{P}[T < \infty] = 1$ demandent plus de travail.

1. **Le calcul direct.** La meilleure justification ici est de passer à une autre méthode, car pour les marches aléatoires sur un intervalle fini on obtient facilement

$$\mathrm{E_x[T] = (K - x)(x + L)} < \infty,$$

en resolvant le système obtenu par conditionnement sur le premier pas.

2. **La théorie spectrale Perron-Frobenius (Perron Frobenius) des matrices sous-stochastiques (ou des chaînes de Markov finies, absorbés)**. Une deuxième justification possible, beaucoup plus générale, est de citer le fait que la probabilité $\mathbb{P}[T = \infty]$ qu'une chaîne de Markov finie reste pour toujours dans les états transients est 0 (c'est une consequence du théorème Perron-Frobenius (de Perron Frobenius) en analyse).

3. **Les astuces.** Si le calcul direct de $\mathrm{E_x T}$ n'est pas faisable, et si on n'est pas satisfait de citer Perron-Frobenius, on offre parfois des solutions probabilistes directes, comme par l'astuce "donnons du temps au temps" de Brzezniak, Example 3.7. Notons par contre que cette solution, bien que intéresante conceptuellement, devrait etre evitée dans des cas simples comme celui ci, car elle demande beaucoup d'effort !

Exemple 8.5 Le modèle Wright-Fisher *Il s'agît de modéliser l'évolution de la fréquence d'une gène A dans une population de taille finie N. On suppose que le nombre X_{n+1} des gènes A au moment $n + 1$ a la loi $Bin_{N,p_{X_n}}$ où $p_x = \frac{x}{N}$, si $X_n = x$. Ainsi :*

$$p_{ij} := P[X_{n+1} = j|X_n = i] = \binom{N}{j} p_i^j (1 - p_i)^{N-j}$$

Montrer que :

1. *X_n est une martingale.*
2. *On observe "une population Wright-Fischer" jusqu'au moment $T = \min(T_0, T_N)$. Quelle est la probabilité f_i que la fréquence espéré de la gene speciale sera finalement 1 ?*

Sol : a) $\mathrm{E[X_{n+1}/X_n] = Np_{X_n} = X_n}$. b) $f_i = \frac{i}{N}$. Comme dans l'exemple précedént, l'application du théorème d'arret peut etre justifié par les cas 2) ou 3). La seule différence est que $E_x T$ n'est pas facile a obtenir, car le conditionnement sur le premier pas ramène à une équation de différences avec N termes ! On est donc obligés de citer Perron-Frobenius.

8.2 La martingale interdite

The doubling martingale strategy. We examine now the strategy which gave martingales their names (nowadays outlawed in casinos). A gambler with no initial capital has as goal to win 1 pound. His first bet is $s_1 = 1$ pound. If he loses, he bets whatever it takes to bring him up to 1 pound ($s_2 = 2$ pounds at the second bet, $s_3 = 4$ at the third, and in general $s_n = 2^{n-1}$ on the n'th bet. The stopping time is T_1. We note immediately that this strategy creates a dollar out of nothing and does not satisfy le théorème d'arret des martingales, c.-à-d.

$$E_0 X_{T_1} = 1 > 0!!$$

We examine now les conditions du théorème d'arret des martingales. It is easy to check that $p_k = \mathbb{P}[T = k] = 2^{-k}, k = 1, 2, ...$ and thus both condition 1 a) (that $\sum_k p_k = 1$) and condition 2 a) (that $\mathrm{ET} = \sum_\mathrm{k} \mathrm{k}\ \mathrm{p_k} = 2 < \infty$) are satisfied. However, neither the cumulative fortune, nor the stakes are bounded, since the loss may double its value an arbitrary number of times and of course the gambling time does not have to be bounded. Thus, neither condition 1 b) nor 2 b) are satisfied. Notice that this strategy seems quite efficient for the gambler (a sure win in a number of steps with expectation 2!). Also, practically, it seems at first safe for the bank too, since in practice the gamblers will have to limit the time they gamble by some finite number n, and then le théorème d'arret des martingales will apply (by any of the three conditions !). Note that the possible loss after the n'th bet is $-2^n + 1$. The 0 expectation of le théorème d'arret des martingales means in practice roughly that the winnings of 2^n successful martingale gamblers will be outset by the huge loss of one misfortunate ; the fear that this loss will not be honoured is what lead to the outlawing of this strategy. More precisely, if all martingale gamblers bound their losses at $L = -2^n + 1$, then we are allowed to apply le théorème d'arret des martingales, and find as usual that the fraction of winning martingale gamblers $p_0 = \frac{L}{1+L} = \frac{2^n-1}{2^n}$ is very close to 1. The fraction of losers $1 - p_0 = 2^{-n}$ is very small, but the potential loss is huge $2^n - 1$, averaging thus to 0. When $L \to \infty$ the bad second case somehow disappears by indefinite postponement) ! **Note :** The expected duration may also be found to be $t_0 = E_0 T = 2 - 2^{-n}$ by setting up a corresponding difference equation, for example. Donc, ici c'est S_t plutôt qui invalide la conclusion du théorème d'arret des martingales.

Remarque 8.7 *While the assumptions of le théorème d'arret des martingales may look at first technical, they have however a clear meaning : by using "reckless" strategies (with unbounded stakes or borrowing) for very long times, a gambler may "beat" the odds, as illustrated by the doubling strategy, originally called "martingale", which gave this field its name.*

8.3 La marche aléatoire simple symétrique, sur un intervalle infini

s:mas

Soit (Z_n) une suite de Bernoulli de paramètre 1/2, $S_n = Z_1 + \ldots + Z_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n) = \sigma(S_0, \ldots, S_n)$, et $T = \inf\{n \geq 0;\ S_n = 1\}$. Ici, la conclusion du théorème d'arrêt pour la martingale S_n est fausse, car $\mathrm{E}_0[\mathrm{S_T}] = 1$. Comme les mises sont finies et le cas 2) ne s'applique pas, il suit que $\mathrm{E}_0[\mathrm{T}] = \infty$!

On verra maintenant que $\mathbb{P}_0[T = \infty] = 0$ (mais comme les pertes possibles sont infinies, le cas 3) ne s'applique non plus). Nous allons calculer la distribution de T, en utilisant la **martingale exponentielle** de moyenne 1

$$M_n^\theta = \left(\frac{1}{\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta \mathrm{Z}_\cdot}]}\right)^n \exp(\theta S_n) = \left(\frac{1}{\cosh \theta}\right)^n \exp(\theta S_n)$$

(les martingales de Wald sont les cas particuliers obtenus en choisissant θ tq $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta \mathrm{Z}_\cdot}] = 1$].

Pour tout $n \in \mathcal{N}$, considérons la martingale arrêtée en T $M^\theta_{T\wedge n}$. On a :

$$\mathbb{E}(M^\theta_{T\wedge n}) = 1 = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{\cosh\theta}\right)^{T\wedge n} \exp(\theta S_{T\wedge n})\right)$$

Soit $\theta > 0$. On remarque que la martingale arrêtée est bornée uniformément par $(\cosh\theta)^{-1}$, et que $\mathcal{P}$ presque sùrement,

$$\lim_{n\to\infty} M^\theta_{T\wedge n} = 1_{\{T<\infty\}} \frac{e^\theta}{(\cosh\theta)^T}$$

[car sur $\{T = \infty\}$, le processus S_t avec "taboo" d'entrer les nombres positives, converge vers $-\infty$, et la martingale arrêtée converge vers 0 pour $\theta > 0$]. Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}\left[1_{\{T<+\infty\}} \frac{1}{(\cosh\theta)^T}\right] = e^{-\theta}$$

En faisant tendre θ vers 0 et en utilisant le théorème de convergence monotone, on déduit que $\mathcal{P}(T < +\infty) = 1$. On peut donc oublier l'indicatrice dans l'égalité précédente. Effectuant alors le changement de variables $\alpha = 1/\cosh(\theta)$, on obtient

$$\mathbb{E}(\alpha^T) = \frac{1}{\alpha}\left[1 - \sqrt{1-\alpha^2}\right]$$

En particulier, on a

$$\mathcal{P}(T = 2m) = 0 \text{ et } \mathcal{P}(T = 2m+1) = (-1)^{m+1}\binom{1/2}{m+1} = \frac{(2m-1)!!}{2^{m+1}(m+1)!}$$

Exercice 8.9 La marche aléatoire simple asymétrique, sur un intervalle infini. *Soit (Z_n) une suite des variables aléatoires Bernoulli, indépendantes : $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p, \mathbb{P}(Z_n = -1) = q = 1 - p < p$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = Z_1 + \ldots + Z_n$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n) = \sigma(S_0, \ldots, S_n)$. Soit enfin $T = \inf\{n \geq 0;\ S_n = 1\}$ qui est un temps d'arrêt. a) Montrer que $\mathbb{P}[T < \infty] = 1$. b) Calculer* ET, *en utilisant le théorème d'arrêt des martingales, et en supposant qu'on a déjà démontré* ET $< \infty$.

8.4 Comment justifier l'application du théorème d'arret des martingales ? Exemples

Exercice 8.10 La ruine du joueur en utilisant les martingales : quelles chances de gagner et au bout de combien de temps ?
Soient $X_1, X_2, \ldots$ des v.a.i.i.d. avec $P(X = 1) = p$, $P(X = -1) = q = 1 - p$ et $0 < p < 1$. Supposons que x et b soient deux entiers avec $0 < x < b$. On définit

$$S_n := x + X_1 + \cdots + X_n, \quad T := \inf\{n,\ S_n = 0 \text{ ou } S_n = b\}.$$

La fortune initiale du joueur de pile ou face est représentée par x et il compte s'arréter s'il a atteint b ou 0. On peut aussi interpréter ce modèle comme un jeu à deux : alors la fortune initiale du premier joueur est x et celle du second est $b-x$. $S_n - x$ représente alors le gain cumulé du premier joueur et $x - S_n$ les pertes cumulées du second. Chacun des joueurs *stoppe quand il est ruiné, c.-à-d. quand $S_n = 0$ ou $S_n = b$. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.*

1) Calculer $p_x = \mathbb{P}(S_T = 0)$ et $t_x = E(T)$ par le théoreme d'arret des martingales appliqué aux martingales $M_n = \rho^{S_n}$ et $N_n = S_n - nm$, avec des valeurs de ρ, m choisies tel que ce sont des martingales, et en supposant que le théoreme d'arret est applicable

R : *M_n est un produit de v. a. indépendantes, positives et de moyenne 1 ssi :* $\mathrm{E}[\rho^{\mathrm{Z_i}}] = \mathrm{p}\rho + \mathrm{q}\rho^{-1} = 1$. *Les racines sont $\rho = 1$ (pas intéréssant) et $\rho = \frac{q}{p}$. N_n est une somme de variable aléatoire aléatoires indépendantes sommables de moyenne nulle ssi $m = p - q$. Le théoreme d'arret donne : $p_x = \frac{1-\rho^x}{1-\rho^b}, t_x = \frac{x-Kp_x}{q-p}$.*

2) Comment justifier l'application du théoreme d'arret ?

R : *La martingale de Wald M_n est bornée, et la deuxième martingale a des mises bornées. Comme au cas symétrique (Exercice 8.6),* $\mathrm{E_x T} < \infty$ *est une conséquence du théorème Perron-Frobenius. On peut aussi appliquer la méthode de 8.12 : "Tout ce qui a une chance positive d'arriver en temps fini se produira tôt ou tard, si on persevere".*

Exercice 8.11 *Calculer, en utilisant le théorème d'arret des martingales, les probabilités de ruine sur $[0, \infty)$ pour une marche avec $\left\{p_2 = \frac{3}{8}, p_1 = \frac{1}{8}, p_{-1} = \frac{1}{2}\right\}$*

Sol : $\mathrm{EZ_1} > 0$ et la loi des grandes nombres implique $\mathbb{P}[T = \infty] > 0]$ et donc aucun des cas du théorème d'arret ne s'applique pas, car le théorème d'arret ne permet pas des temps d'arret tq. $\mathbb{P}[T = \infty] > 0$! Dommage, car on trouve facilement une martingale de Wald $M_t = \rho^{X_t}$, en resolvant $p(\rho) := \mathrm{E}[\rho^{\mathrm{Z_\cdot}} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{p_i}\rho^{\mathrm{i}} = 1, \rho \in (0, 1)$. Par une "application erronée" du théorème d'arret a cette martingale, on trouve la réponse raisonnable $\psi(x) = \rho^x$, avec une interprétation claire,

$$\rho = \mathbb{P}_x[T_{x-1} < \infty].$$

Heureusement, pour une "application correcte," il suffit de remplacer T par le temps d'arret borné $T_N = \min(T, N)$, avec $N \to \infty$. On trouve

$$\rho^x = \mathrm{E}\rho^{\mathrm{X_{T_N}}} = \rho^{\mathrm{X_N}}\mathbb{P}_{\mathrm{x}}[\mathrm{T} > \mathrm{N}] + \rho^0\mathbb{P}_{\mathrm{x}}[\mathrm{T} \leq \mathrm{N}] \to_{\mathrm{N}\to\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{x}}[\mathrm{T} < \infty] = \psi(\mathrm{x}) \tag{8.2}$$

(le premier terme converge vers 0, car $\mathbb{P}[X_N \to \infty] = 1$).

8.5 Comment démontrer qu'un temps d'arret T est fini p.s.

Quand l'espace d'états et la loi d'un temps d'arret ne sont pas explicites, il est quand-même possible de démontrer que T est fini p.s par l'astuce suivante :

`outfinitunjour` **Exercice 8.12 "Tout ce qui a une chance positive d'arriver après un nombre fini des pas se produira tôt ou tard, si on persevere"** *(Williams, exercice E10.5 p. 233) Soit $\mathcal{F}$ une filtration (avec $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et T un temps d'arret tels que pour un certain $N \in \mathbb{N}$ et un certain $\varepsilon > 0$,*

$$\forall n, \ \ \mathbb{P}(T \leq n + N|\mathcal{F}_n) > \varepsilon, \ \ p.s.$$

1) Montrer par récurrence en utilisant $\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN; T > (k-1)N)$ que pour $k = 1, 2, \ldots,,$

$$\mathbb{P}(T > kN) \leq (1 - \varepsilon)^k.$$

1) Réponse : On procède par récurrence. Quand $n = 0$, on a bien la propriété par hypothèse car $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et donc $\mathbb{P}(T > N)\mathbb{1}_\Omega = \mathbb{P}(T > N|\mathcal{F}_0) = 1 - \mathbb{P}(T \leq N|\mathcal{F}_0) \leq 1 - \varepsilon$. De plus,

$$\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN; T > (k-1)N) = \int_{T>(k-1)N} \mathbb{1}_{T>kN} = \int_{T>(k-1)N} \mathrm{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{T>kN}}|\mathcal{F}_{\mathrm{(k-1)N}})$$

(car l'ensemble $[T > (k-1)N]$ est $\mathcal{F}_{(k-1)N}$-mesurable)

$$\leq (1-\varepsilon)\mathbb{P}(T > (k-1)N) \quad \text{par hypothèse.}$$

2) En déduire que $\mathrm{E(T)} < \infty$.

2) Réponse : On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{E(T)} = \sum_{\mathrm{n}} \mathrm{n}\mathbb{P}(\mathrm{T = n}) \quad &\leq \textstyle\sum_n n\mathbb{P}(T > n-1) \\
&\leq \quad \sum_k \sum_{(k-1)N \leq n \leq kN} n\mathbb{P}(T > n-1) \\
&\leq \quad N\sum_k kN\mathbb{P}(T > (k-1)N - 1) \\
&\leq \quad N\sum_k kN\mathbb{P}(T > (k-2)N) \\
&\leq \quad N^2\sum_k k(1-\varepsilon)^{k-2} < \infty
\end{aligned}$$

8.6 La martingale du singe

Q, cf. poly Morel : Quelle est l'attente moyenne pour qu'une séquence préfixée, comme ABRACADABRA, se produise dans une suite des lancés indépendants ? Voir aussi une très longue attente", Grimmett-Stirzaker, One thousand exercises in probabilité, exercice 16 p. 124, et Williams, exercice E10.6 p. 233.

Prenons l'exemple de la séquence PPP (pile trois fois).

Un très grand casino contient une infinité de joueurs G_1, $G_2, \ldots$ qui disposent chacun d'une fortune de 1 euro. Un croupier tire à pile ou face (probabilités p et $q = 1 - p$ toutes les secondes. Au temps n, le joueur G_n se met à parier de la manière suivante : il place 1 sur Pile. Le casino étant équitable, il touche en cas de succès $\frac{1}{p}$ [expliquer pourquoi]. Il place alors à nouveau cette fortune sur Pile. Il continue ainsi à parier toute sa fortune sur Pile jusqu'à ce qu'il ait gagné trois fois de suite [PPP] ou qu'il perde tout. Dans les deux cas, il quitte alors le casino.

1. Soit S_n le profit (ou la perte) cumulé(e) du casino après le n-ième tirage. Montrer que S_n est une martingale.

   1) Réponse : Soit Y_n la variable aléatoire associée au n-ième tirage ($Y_n = F$ ou P) et $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Soit X_n la somme des gains et pertes des joueurs après le n-ième coup. Comme X_n est une fonction déterministe des résultats Y_n des n coups précédents, elle est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Comme le jeu est équitable, la moyenne de X_n est nulle. De plus, le nombre de joueurs est plus petit que 3 et leur enjeu plus petit que p^{-3}. Donc X_n est sommable. S_n est donc l'exemple classique de martingale, à savoir une somme de variable aléatoire sommables indépendantes et de moyenne nulle X_n.

2. Soit T le nombre de tirages effectués avant la première apparition de PPP. Montrer que T est un temps d'arrêt, montrer que $E(T) < \infty$. Utiliser le résultat de l'exercice 8.12.

   2) Réponse : La décision $T = n$ est une fonction déterministe des résultats de $Y_1, \ldots, Y_n$ et est donc $\mathcal{F}_n$-mesurable. C'est donc un temps d'arrêt. Pour montrer que $E(T) < \infty$, il suffit de vérifier que l'hypothèse de l'exercice 8.12 est vérifiée : $\mathbb{P}(T \leq n + N|\mathcal{F}_n) > \varepsilon$, a.s.. On le montre pour $N = 3$. Notons $\Omega_n = \{P, F\}^n$ l'ensemble des résultats possibles pour les n premiers tirages. La tribu $\mathcal{F}_n$ est engendrée par la partition en événements atomiques $B_i = [(Y_1, \ldots, Y_n) = i]$, i décrivant Ω_n. Par la formule (PT), on a pour tout événement A, $\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_n) = \sum_{i\in\Omega_n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{1}_{B_i}$. On choisit $A = [T \leq n + 3]$. En effet, une séquence PPP peut se produire aux trois coups suivants avec probabilité $\varepsilon = p^3$ et on a

   $$\mathbb{P}(T \leq n + 3|\mathcal{F}_n) \geq \sum_{i\in\Omega_n} \mathbb{P}([(X_{n+1}X_{n+2}X_{n+3}) = (PPP)]|B_i)\mathbb{1}_{B_i} = p^3 \sum_i \mathbb{1}_{B_i} = p^3.$$

3. En déduire que $\mathrm{E(T) = p^{-1} + p^{-2} + p^{-3}}$.

   3) Réponse : On applique le théorème d'arrêt des martingales b) ou d). Donc $E(S_T) = 0$. Mais, au moment où le jeu s'arrête, les joueurs $G_1, \ldots, G_n$ ont misé chacun -1 et seuls G_{n-2}, G_{n-1} et G_n ont gagné respectivement p^{-3}, p^{-2} et p^{-1}. Donc $E(S_T) = 0$ donne $p^{-1} + p^{-2} + p^{-3} - \mathrm{ET} = 0$.

4. Adapter le raisonnement pour calculer le temps moyen d'attente de PFP.

   4) Réponse : on trouve $\mathrm{E(N) = p^{-1} + p^{-2}q^{-1}}$.

5. Dans le même esprit : le casino possède un singe qui tape au hasard sur les 26 touches majuscules à la vitesse de 60 caractères par minute. Montrer que le temps moyen d'attente de la séquence ABRACADABRA est $26^{11} + 26^4 + 26$. Donner un ordre de grandeur en années du temps d'attente.

6. Un paradoxe ? Les calculs précédents prouvent que le temps moyen d'attente de PP (deux fois Pile) dans le cas $p = \frac{1}{2}$ est égal à $2 + 4 = 6$ alors que le temps d'attente de PF est de 4. Ceci peut paraître contre-intuitif, puisque les séquences PP et PF sont équiprobables ! De même, on vient de voir que le temps d'attente de ABRACADABRA est supérieur au temps d'attente de, disons, ABCDEFGHIJK, qui est une séquence de même longueur et donc équiprobable. Discuter ce paradoxe. Vous convaincre par une simulation de pile ou face (utiliser directement une monnaie) que l'expérience confirme bien la différence de temps d'attente pour PP et PF.

8.7 Exercices

1. a) Montrer que $X_n = \prod_{i=1}^n Z_i$, où Z_i sont i.i.d. et prennent les valeurs 2 et 0 avec probabilités égales, est une martingale, par rapport à $\sigma(Z_1, ..., Z_n)$. b) Est-ce que le théorème d'arrêt des martingales est applicable à X_n, arrêtée au temps d'atteinte T_0 ?

2. Soit Z_i une suite des variables aléatoires tq $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ est une martingale. Démontrer qu' a) $\mathrm{EZ_i} = 0$. b) Ces variables sont noncorrélées. c) $Var(S_n) = \sum Var(Z_i)$

3. Démontrer **l'identité de Wald**. Soit $Z_n, n \geq 1$ une suite iid tel que Z_1 soit intégrable et soit T un temps d'arrêt pour la filtration associée à $Z_n, n \geq 1$, satisfaisant $\mathrm{ET} < \infty$,

et soit $S_n = Z_1 + ... + Z_n$. Alors

$$E[S_T] = E[T]E[Z_1].$$

4. **Le temps d'atteinte espéré** $t(x) = \mathrm{E_x T}$**, pour la marche aléatoire simple, symétrique** $S_n = Z_1 + ... + Z_n$. Comme la martingale du cas asymétrique ne marche pas ici, on utilisera la martingale :

$$M_n = S_n^2 - n.$$

a) Montrez que M_n est une martingale par rapport à $\sigma(Z_1, ..., Z_n)$. b) Montrez que si le théorème d'arrêt des martingales est applicable sur l'intervalle $[L, K]$, alors :

$$t_x = E_x[min(T_L, T_K)] = (K - x)(x - L), \tag{8.3}$$

c.-à-d. l'espace d'états du temps d'atteinte de $\{L, K\}$ est le produit des distances du capital initial x aux bords de l'intervalle. c) Comment justifier l'application du théorème d'arrêt des martingales ?

Exercice 8.13 *Soit*

$$X_n = x + \sum_{i=1}^{n} Z_i, \quad Z_i = \begin{cases} 1, \ \textit{avec probabilité} & p_1 = \frac{8}{10} \\ -1, & p_{-1} = \frac{1}{10} \\ -2, & p_{-2} = \frac{1}{10} \end{cases},$$

avec Z_i *i.i.d. Soit* $T_0 = \inf\{n : X_n \leq 0\}$
a) $E[Z_1] > 0$?
b) Calculer, en utilisant le théorème d'arret des martingales, les probabilités de ruine $\psi(x) = P_x[T_0 < \infty], x \in \mathbb{N}$, *pour cette marche. Montrer qu'elles sont positives.*

5. Montrer que pour un joueur qui joue «la martingale»

$$\mathrm{ES_{T-1}} = -\infty$$

Ind : Calculer la loi de S_{T-1}.

Solutions :

1. We check first that X_n is a multiplicative martingale (since $\mathrm{EZ_1} = 1$). Le théorème d'arret des martingales $\mathrm{E_x S_{T_0} = x = 1}$ applied to the stopping time T_0 (without checking the conditions) would yield here a wrong conclusion, that $1 = 0$. Of course, none of the alternative conditions provided for the theorem holds here. For example, condition (2) (which is the most widely applicable) does not hold since a martingale which may double its value an arbitrary number of time does not have bounded increments. **Note :** This exercise is similar to the martingale doubling strategy.
2. The case of additive martingales (when the increments are independent) is easy. For the general case, use $EZ_n\ S_{n-1}) = E[Z_n\ S_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1}E[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$.
3. L'identité de Wald est une conséquence immédiate du théorème d'arrêt, des martingales, cas 4].

4. a) To show that M_n is indeed a martingale we obtain first a formula for its increments : $M_{n+1} - M_n = (S_n + Z_{n+1})^2 - n - 1 - (X_n^2 - n) = 2Z_{n+1}X_n + Z_{n+1}^2 - 1 = 2Z_{n+1}X_n$. We check now the conditional expectation of the increments.

$$E[M_{n+1} - M_n|F_n] = E[2Z_{n+1}X_n|F_n] = 2X_nE[Z_{n+1}|F_n] = 0.$$

b) We apply now the Optional Stopping Theorem to the martingale $M_n = X_n^2 - n$. The Optional Stopping Theorem yields :

$$\mathrm{E_x M_T = E_x(X_T^2 - T) = X_0^2 = x^2} \tag{8.4}$$

Conditioning on the last state we get

$$\mathrm{E_x(X_T^2 - T) = K^2\mathbb{P}\{X_T = K\} + L^2\mathbb{P}\{X_T = L\} - E_xT.} \tag{8.5}$$ m1

The probabilities of winning/losing for the martingale X_T were found before to be

$$P[X_T = K] = \frac{x-L}{K-L}, \quad P[X_T = L] = \frac{K-x}{K-L}$$

Plugging these in (8.5) gives

$$K^2\frac{x-L}{K-L} + L^2\frac{K-x}{K-L} - E_xT = x^2$$

which after simplifying yields

$$t_x = E_x[min(T_L, T_K)] = (K-x)(x-L)$$

c) This martingale is not bounded below (since T can take arbitrarily large values), so we can't apply the third set of conditions. Pour la deuxième pair des conditions, nous savons que les increments de M_n sont bornés : $|2Z_{n+1}X_n + Z_{n+1}^2 - 1| = |2Z_{n+1}X_n| \leq 2\max(|L|, K)$ Aussi, comme remarqué déjà dans la solution de l'exercice 8.6, le fait que ET $< \infty$ est assuré par la théorie spectrale des matrices sous-stochastiques. L'option du calcul direct (très simple ici) par conditionnement sur le premier pas serait illogique ici, car ça reviendra a justifier cette méthode en la remplaçant par une autre !

Remarque 8.8 *Pour la marche symmétrique qui reste sur place avec proba* $1-2p > 0$ *on trouve*

$$t_x = E_x[min(T_L, T_K)] = \frac{(K-x)(x-L)}{2p}. \tag{8.6}$$

Remarque 8.9 *Letting* $L \to -\infty$ *and* $K = x+1$ *we find that the expected duration of a game for winning just one buck (with no lower bound on the losses) is infinite, which is quite surprising.*

5. a) $E(Z_1) = 1.\frac{8}{10} + (-1).\frac{1}{10} + (-2).\frac{1}{10} = \frac{1}{2} > 0$
b) On décompose $\psi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x), \varphi_i(x) = \mathbb{P}_x[T < \infty, X_T = -i], i = 0, 1$. On applique le théorème d'arret appliqué aux deux martingales arretées de Wald $M_t = \rho_i^{X_t}$ (comme en (8.2)), où $p(\rho_i) = 0 \Leftrightarrow \rho_i^x = \sum_{j=0}^1 \varphi_j(x)^{-j}, \rho_i \in (0,1)$. Ici, $\rho_1 = 1/2, \rho_2 = -1/4$. On résout le système de type Vandermonde. Les probabilités de ruine sont :

$$\psi_x = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}\right)^x$$

Note : Voila une solution directe, par conditionnement sur le premier pas :

$$\begin{aligned}\psi(x) = P_x[T_0 < \infty] &= \sum_{-2}^{1} P[Z_1 = i].P_x[T_0 < \infty | x + Z_1 = x + i] \\ &= \sum_{-2}^{1} P[Z_1 = i].P_{x+i}[T_0 < \infty] = \sum_{-2}^{1} p_i.\psi(x+i) \\ &= \frac{8}{10}.\psi(x+1) + \frac{1}{10}.\psi(x-1) + \frac{1}{10}.\psi(x-2), (x \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

Les CF sont :

$$\begin{cases}\psi(\infty) & = 0 \\ \psi(0) & = 1 \\ \psi(-1) & = 1.\end{cases}$$

(il est aussi vrai que , , $\psi(-2) = 1, ...$ mais -2 n'est pas dans l'espace d'états). On cherche $\psi(x) = \rho^x$.

$$\begin{aligned}\text{On a } \rho^x &= \frac{8}{10}.\rho^{x+1} + \frac{1}{10}.\rho^{x-1} + \frac{1}{10}.\rho^{x-2} \\ \Rightarrow \rho^2 &= \frac{8}{10}.\rho^3 + \frac{1}{10}.\rho + \frac{1}{10} \\ \Rightarrow &(\rho-1)(2.\rho-1)(4\rho+1) = 0 \\ \Rightarrow \psi(x) &= A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(-\frac{1}{4})^x\end{aligned}$$

$\psi(0) = \psi(-1) = 1$ sont satisfaites ssi $A_1 = \frac{5}{6}, A_2 = \frac{1}{6}$. Les probabilités de ruine sont :

$$\psi(x) = \frac{5}{6}.(\frac{1}{2})^x + \frac{1}{6}.(-\frac{1}{4})^x$$

Exercice 8.14 *Soit X_t les gains d'un joueur qui peut gagner $Z_i \in \{1, -1, -2\}$ à chaque pas i, avec des probabilités donnés par : $\left\{p_1 = \frac{8}{10}, p_{-1} = \frac{1}{10}, p_{-2} = \frac{1}{10}\right\}$. Le joueur s'arrête au temps $T \min[T_0, T_B]$.*

a) Calculer les probabilités de ruine $\psi_0(x) = P[X_T = 0], \psi_{-1}(x) = P[X_T = -1], \psi(x)P[T_0 < T_B]$, en utilisant deux martingales de Wald, et en supposant que le théorème d'arret des martingales est applicable.

b) Calculer directement les probabilités de ruine $\psi_0(x) = P[X_T = 0], \psi_{-1}(x) = P[X_T = -1], \psi(x)P[T_0 < \infty]$ au cas où $B = \infty$.

R : b) Les probabilités de ruine satisfont $\psi_x = \frac{8}{10}\psi_{x+1} + \frac{1}{10}\psi_{x-1} + \frac{1}{10}\psi_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine de

$$\frac{8}{10}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{10}\rho + \frac{1}{10} = (\rho-1)(\frac{8}{10}\rho^2 - \frac{2}{10}\rho - \frac{1}{10}) = \frac{8}{10}(\rho-1)(\rho-1/2)(\rho+1/4)$$

$\psi_x = A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(\frac{-1}{4})^x$ satisfait $\psi_0 = \psi_{-1} = 1$ ssi $A_1 = 5/6, A_2 = 1/6$. Les probabilités de ruine sont :

$$\psi_x = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}\right)^x \approx \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Remarque 8.10 *En considerant le cas $B = \infty$, on voit que $E[Z_1] > 0$ assure que le nombre des racines plus petites que 1 en valeur absolue doit être égal au nombre des sauts possibles en bas.*

Théorème 8.3 *Supposons que la marche aléatoire discrète $X_t = x + \sum_{i=1}^{t} Z_i$, avec Z_i i.i.d. et $E[Z_1] > 0$ est tel que $p_Z(\theta) = p_+(\theta) + p_-(\frac{1}{\theta})$, where $p_\pm(\theta)$ sont des polynômes des degrés $n_\pm$. Alors*

a) L'équation $p_Z(\theta) = 1$ a $n_- + n_+$ racines, dont exactement n_- racines plus petites que 1 en valeur absolue et $n_+ - 1$ racines plus grandes que 1 en valeur absolue.

b) Les probabilités de ruine sur $[0, \infty)$, $\psi_x, x \in \mathbb{N}$ sont des combinaisons de n_- racines plus petites que 1 en valeur absolue.

Exercice 8.15 *Calculer la probabilité de ruine $\psi_x, x \in \mathbb{N}$, pour une marche sur les nombres naturelles, avec la distribution de chaque pas donné par :* $\left\{p_{-1} = \frac{8}{10}, p_1 = \frac{1}{10}, p_2 = \frac{1}{10}\right\}$.

Chapitre 9

Examens d'entraînement

9.1 Examen 1

Tous les documents d'aide sont interdits

1. On considère une pièce non équilibrée que l'on lance un nombre indéterminé de fois. La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$, et la probabilité de sortir face est égale à $q = 1 - p$. Les lancers sont indépendants. On note N le temps d'attente du premier pile, c'est-à-dire le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir le premier pile, en incluant le pile ($N \in \{1, 2, ...\}$).
   (a) Formuler une équation pour le premier moment $m = EN$ par la méthode du conditionnement sur le premier pas, et la résoudre. Quelle est la loi de N ? (on ne demande pas de justifier)
   (b) Trouvez l'espérance $m_2 = EN_2$ du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient **deux piles consécutives**, en incluant les deux derniers résultats.
   (c) Calculer la fonction génératrice des probabilités $p^*_{N^{(2)'}}(z)$, où $N^{(2)'}$ est le nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient deux piles consécutives, en **excluant les deux derniers résultats**.
   (d) Trouvez l'espérance $\tilde{m}$ du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient **pile-face-pile** (consécutives), en incluant les trois derniers résultats.

   Indication : On pourrait utiliser un processus de Markov qui retient l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu, et qui contient l'état final désiré, ainsi que tous ses préfixes.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que pour $n \geq 1$ X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_n = n$.
   (a) Calculer la fonction de répartition (f.d.r.) de $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ pour $n \geq 1$.
   (b) Montrer que $Y_n \xrightarrow{P} 0$.
   (c) Montrer que $Y_n \xrightarrow{p.s.} 0$.
   (d) Determiner une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que $E\alpha_n Y_n = 1$. Montrer que pour cette suite on a $\alpha_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ où l'on précisera la loi de Y. Est-ce qu'il existe d'autres suites

$(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telles que $\alpha_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$?

3. Soit
$$X_n = x + \sum_{i=1}^{n} Z_i, \quad Z_i = \begin{cases} -1, \text{ avec probabilité} & p_{-1} = \frac{1}{2} \\ 1, & p_1 = \frac{1}{8} \\ 2, & p_2 = \frac{3}{8} \end{cases},$$
avec Z_i i.i.d. Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \leq 0\}$

   (a) Est-ce que $E[Z_1] > 0$?

   (b) Calculer, en utilisant le conditionnement sur le premier pas, les probabilités de ruine $\psi(x) = P_x[T_0 < \infty], x \in \mathbb{N}$.

   (c) Recalculer les probabilités de ruine, en utilisant le théorème d'arret des martingales. *Ind : Cherchez dez martingales de la forme $M(n) = \rho^{X_n}$, avec ρ judicieusement choisi.*

   (d) Calculer l'espérance du temps de ruine pour la marche «renversée», avec la distribution de chaque pas $Z_i' = -Z_i$ donnée par : $\left\{p_1 = \frac{1}{2}, p_{-1} = \frac{1}{8}, p_{-2} = \frac{3}{8}\right\}$. Calculer les probabilités de ruine pour cette marche.

Solutions :

1. (a) Le conditionnement après un pas donne $m = p + q(1+m)$, l'espérance est $m = \frac{1}{p}$.

   (b) Le conditionnement après un pas donne $\begin{cases} m_2 = p(1+m_1) + q(1+m_2) \\ m_1 = p + q(1+m_2) \end{cases} \Longrightarrow$ $m_2 = \frac{p+1}{p^2}, m_1 = \frac{1}{p^2}$.
   La méthode «arbre developpé jusqu'au feuilles succés/recommence» («divide et conquera») produit directement l'équation $m_2 = q(1+m_2) + pq(2+m_2) + 2p^2$

   (c) Le conditionnement après un pas donne
$$\begin{cases} m_3 = p(1+m_2) + q\,(1+m_3) \\ m_2 = q(1+m_1) + p\,(1+m_2) \\ m_1 = p + q\,(1+m_3) \end{cases}$$
   avec solutions $\tilde{m} = m_3 = \frac{1+pq}{p^2 q}, m_1 = \frac{p+1}{p^2}, m_2 = \frac{1}{p^2 q}$

   La méthode «arbre» identifie une nouvelle inconnue «persistente/incontournable» m_2, dans le sens que l'arbre «developpé jusqu'au feuilles» est infini. Ici, on ne peut pas remplacer le conditionnement après un pas par des astuces ! On peut aussi utiliser $\boldsymbol{m} = (I-Q)^{-1}\mathbf{1}, Q = \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & p & q \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. (a) La fonction de répartition (f.d.r.) de $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ est $F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = 1 - P(Y_n > y) = 1 - \exp(-yn(n+1)/2)$ si $y > 0$ et 0 sinon (car $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$).

(b) $Y_n \xrightarrow{P} 0$ car $\forall \varepsilon > 0$, $P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n > \varepsilon) = \exp(-\varepsilon n(n+1)/2) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

(c) $Y_n \xrightarrow{p.s.} 0$, car $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n\geq 1} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} P(Y_n > \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} \exp(-\varepsilon n(n+1)/2) \leq \sum_{n\geq 1} \exp(-\varepsilon n/2) = \sum_{n\geq 1}(\exp(-\varepsilon/2))^n < +\infty$.

(d) $\alpha_n = (EY_n)^{-1} = \frac{n(n+1)}{2}$ $P(\alpha_n Y_n \leq y) = P(n(n+1)Y_n/2 \leq y) = F_{Y_n}(2y/(n(n+1))) = (1-\exp(-y))1_{\{y>0\}}$. Donc pour $\alpha_n = n(n+1)/2$ et $Y \sim \mathcal{E}(1)$ on a $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$. Le résultat de convergence reste identique si l'on prend $\alpha_n = n^2/2$, donc le choix n'est pas unique.

3. (a) $E[Z_1] = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}.2 + \frac{1}{2}(-1) = \frac{3}{8} > 0$

   (b) Les probabilités de ruine satisfont $p_x = \frac{1}{8}p_{x+1} + \frac{3}{8}p_{x+2} + \frac{1}{2}p_{x-1}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine plus petite que 1 de

   $$3\rho^3/8+\rho^2/8-\rho+1/2 = (\rho-1)(3\rho^2+4\rho-4) = \frac{1}{8}(\rho-1)(\rho+2)(3\rho-2) \Longrightarrow p_x = (\frac{2}{3})^x$$

   (c)

   (d) $E[Z_1'] = -E[Z_1] = \frac{1}{8} - \frac{6}{8} + \frac{4}{8} = -\frac{3}{8} < 0$ $t_x = 1 + \frac{3}{8}t_{x+1} + \frac{1}{8}t_{x-1} + \frac{1}{2}t_{x-2}, t_0 = 0$ Sol homogène engendrée par $1^x, r_1^x, r_2^x, \quad r_1 = -\frac{1}{2}, r_2 = \frac{3}{2} \geq 1$. Sol particulière et finale $t_x = \frac{x}{-E[Z_1]} = \frac{8x}{3}$. Les probabilités de ruine sont $\psi_x = 1, \forall x$ (car $E[Z_1] < 0$).

9.2 Examen 2

1. **La marche paresseuse :** Soit X_n une chaîne de Markov sur $\{0,1,2,...,B\}, B \in \mathbb{N}$, avec 0 et B états absorbants, et

$$\begin{aligned} P(i,i+1) &= p\ f_i, \\ P(i,i-1) &= q\ f_i, \\ P(i,i) &= 1-(p+q)f_i, \\ P(i,i+k) &= 0 \text{ pour} |k| > 2, \forall i \in \{1,2,...,B-1\} \end{aligned}$$

(on suppose $0 < p, q, f_i$ et $f_i(p+q) < 1, \forall i \in \{1,2,...,B-1\}$). Nous arretons le processus au temps d'arrêt $T = \inf\{n : X_n \notin [1, B-1]\}$ auquel le processus sort de l'intervalle $[1, B-1]$. Pour tout x de $\mathbb{N}$, on note par P_x, E_x la mesure et espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$).

   (a) Classifiez les pbs suivantes $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = B\}$, $g_x = E_x[X_T]$, $t_x = \mathrm{E_x T}$, $c_x = E_x[\sum_0^{T-1} X_t]$, et $d_x = E_x[\sum_0^{T-1} X_t^2]$ comme des pbs de prix final ou de coùt accumulé. Quelles sont les équations de récurrence et les conditions frontière correspondant a chaque pb ?

   (b) Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour p_x et g_x quand $p = q < 1/2, f_i = 1$, et quand $p = q < 1/2, f_i = 1/i$.

   (c) Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour t_x et c_x quand $p < q \leq 1/2, f_i = 1$, et $B = \infty$.

2. **Probabilités de ruine .** Soit

$$X_n = x + \sum_{i=1}^{n} Z_i, \quad Z_i = \begin{cases} 1, \text{ avec probabilité} & p_1 = \frac{3}{4} \\ -1, & p_{-1} = \frac{1}{12} \\ -2, & p_{-2} = \frac{1}{6} \end{cases},$$

avec Z_i i.i.d. Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \leq 0\}$
a) Est-ce que $E[Z_1] > 0$?
b) Calculer les probabilités de ruine $\psi(x) = P_x[T_0 < \infty], x \in \mathbb{N}$.
c) Recalculer les probabilités de ruine, en utilisant le théorème d'arret des martingales.

3. **La ruine du joueur en utilisant les martingales.**
Soient $X_1,\ X_2, \ldots$ des v.a.i.i.d. avec $P(X = 1) = p,\ P(X = -1) = q = 1 - p$ et $0 < p < 1$. Supposons que x et b soient deux entiers avec $0 < x < b$. On définit

$$S_n := x + X_1 + \cdots + X_n, \quad T := \inf\{n,\ S_n = 0 \text{ ou } S_n = b\}.$$

La fortune initiale du joueur de pile ou face est représentée par x et il compte s'arréter s'il a atteint b ou 0. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots,\ X_n)$ et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\ \Omega\}$.

(a) Comment choisir les valeurs de ρ, m tel que les processus

$$M_n = \rho^{S_n}, \quad N_n = S_n - nm$$

soient des martingales ?

(b) Calculer $p_x = \mathbb{P}(S_T = 0)$ par le théorême d'arrêt des martingales appliqué à $M_n = \rho^{S_n}$, en supposant que le théorême d'arrêt est applicable.

(c) Calculer $t_x = E(T)$ par le théorême d'arrêt des martingales appliqué à $N_n = S_n - nm$, en supposant que le théorême d'arrêt est applicable.

(d) Donnez les valeurs specifiques obtenues pour ρ, m, p_x et t_x si $p = 2/3, q = 1/3$.

(e) (*) Justifier l'application du théorême d'arrêt, en montrant que $E_x T < \infty$ par le principe de la "persévérance" (tout ce qui a une chance positive constante d'arriver aprés un nombre fini des pas se produira tôt ou tard), i.e. montrer qu'il existe un certain $N \in \mathbb{N}$ et un certain $\varepsilon > 0$, t.q.

$$\forall n,\ \ \mathbb{P}(T \leq n + N | \mathcal{F}_n) > \varepsilon, \text{ p.s.} \tag{9.1}$$

Solutions :

1. (a) Soit $(Gf)_x = p\ (f_{x+1} - f_x) + q\ (f_{x-1} - f_x)$ l'opérateur du cas "non paresseux",(sauf que maintenant $p + q < 1$. Les équations sont respectivement :

$$(Gp)_x = 0, p_K = 1, p_0 = 0$$
$$(Gg)_x = 0, g_K = K, g_0 = 0$$
$$f_x (Gt)_x + 1 = 0, t_K = 0, t_0 = 0$$

La partie homogène des équations est exactement la même comme pour une marche «non paresseuse», mais la partie non homogène des équations est différente.

(b) Pour p_x et g_x on obtient les mêmes équations (dans les deux cas de f_i) comme pour une marche symétrique avec $p = 1/2$, c.-à-d. :

$$\begin{aligned} 0 &= p(p_{x+1} - 2p_x + p_{x-1}) \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ p_K &= 1, \quad p_0 = 0 \end{aligned}$$

et donc les mêmes réponses $p_x = \frac{x}{K}, \quad g_x = x$.

(c) Pour $t_x = E_x[T], p < q, B = \infty$ (temps de sortie espéré) on trouve :

$$\begin{aligned} pt_{x+1} - (p+q)t_x + qt_{x-1} + 1 = 0 \quad \text{for any } 1 \leq x \\ t_0 = 0 \end{aligned}$$

avec solution $t_x = A_1 + A_2(\frac{q}{p})^x + p_0(x), \quad p_0(x) = \frac{x}{q-p}, A_2 + A_1 = 0, A_2 = 0, A_1 = 0$.
Note : La condition $t(B) = 0$ cesse d' être vraie pour $B = \infty$; par contre, $t(\infty)$ ne peut pas «être trop grand» (augmenter exponentiellement) non plus, comme il serait le cas si $A_2 \neq 0$.

2. a) b) Les probabilités de ruine satisfont $p_x = \frac{3}{4}p_{x+1} + \frac{1}{12}p_{x-1} + \frac{1}{6}p_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x, avec ρ une racine de

$$\frac{3}{4}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{12}r + \frac{1}{6} = (\rho - 1)(\frac{3}{4}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho - \frac{1}{12}) = \frac{3}{4}(\rho - 1)(\rho - 2/3)(\rho + 1/3)$$

$p_x = A_1(\frac{2}{3})^x + A_2(\frac{-1}{3})^x$ satisfait $p_0 = p_{-1} = 1$ ssi $A_1 = 8/9, A_2 = 1/9$.

3. (a) M_n est un produit de v. a. indépendantes, positives et de moyenne 1 ssi : $E[\rho^{Z_i}] = p\rho + q\rho^{-1} = 1$. Les racines sont $\rho = 1$ (pas intéréssant) et $\rho = \frac{q}{p}$.
N_n est une somme de v.a. aléatoires indépendantes sommables de moyenne nulle ssi $m = p - q$.

b), c) Le théorême d'arrêt pour M_n donne : $p_x = \frac{\rho^x - \rho^b}{1-\rho^b}$, et pour N_n, $t_x = \frac{(1-p_x)b-x}{q-p}$.

e) $N = b, \epsilon = p^b$.

9.3 Examen 3

1. Soit X une v.a. continue de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer les lois de $Z_i = h_i(x), i = 1, 2$, où $h_1(x) = 1 - x$ et $h_2(x) = min(x, 1 - x)$.

2. Soit X_n une v.a. de loi binomiale $B(n, p_n)$. Montrer que si $np_n \to \lambda > 0$, alors X_n converge en loi vers une v.a. X, dont on determinera la loi.

3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$ (i.e. $f_{X_n}(x) = \lambda e^{-\lambda x} I(x > 0)$). On pose $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ pour $n \geq 1$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.
   (b) Montrer que
   $$F_{M_n - \lambda^{-1}\log n}(x)$$
   convergent vers une fonction $F(x)$, qu'on determinera.

(c) Généraliser pour le cas de X_n de loi arbitraire avec support $[0,\infty)$, qui satisfont $\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = k > 0$.

4. **Probabilités de ruine.** Soit

$$X_n = x + \sum_{i=1}^n Z_i, \quad Z_i = \begin{cases} 1, \text{ avec probabilité} & p_1 = \frac{10}{13} \\ -1, & p_{-1} = \frac{2}{13} \\ -2, & p_{-2} = \frac{1}{13} \end{cases},$$

avec Z_i i.i.d. Soit $T_0 = \inf\{n : X_n \le 0\}$
a) Est-ce que $E[Z_1] > 0$?
b) Calculer les probabilités de ruine $\psi(x) = P_x[T_0 < \infty], x \in \mathbb{N}$.

5. **L'attente moyenne au jeu de pile ou face pour qu'une séquence fixée se produise.** On lance une pièce de monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à q et celle de sortir pile égale à $p = 1 - q$, jusqu'à ce qu'on obtient une suite PFP (pile-face-pile).

Trouvez l'espérance $t = E(T)$ du temps T jusqu'à l'arrêt, (i.e. le nombre esperé de jets, en incluant les trois derniers), en suivant l' indication suivante.

On considére un casino où un croupier tire à pile ou face, avec probabilités p et $q = 1-p$, toutes les secondes, jusqu'à la première arrivée de la suite PFP.

Le casino contient une infinité de joueurs G_1, $G_2, \ldots$, disposant chacun d'une fortune de 1 euro. Au temps n, le joueur G_n se met à parier de la manière suivante : il place 1 sur Pile. Le casino étant équitable, il touche en cas de succès $\frac{1}{p}$. En cas de succès, il place ses gains ($\frac{1}{p}$) sur Face. En cas d'un deuxième succès, il touchera $\frac{1}{q}$ per chaque euro misé, et fera un nouveau pari sur Pile, avec gain potentiel $\frac{1}{p}$ per chaque euro. Il continue ainsi à parier toute sa fortune, jusqu'à l'apparition de la suite PFP, ou jusqu'à ce qu'il perde tout. Dans les deux cas, il arrête de jouer.

(a) Soit S_n le profit (ou la perte) cumulé(e) du casino après le n-ième tirage. Montrer que S_n est une martingale.

(b) Soit T le nombre de tirages effectués avant la première apparition de PFP. Montrer que T est un temps d'arrêt d'espérance finie $E(T) < \infty$, en utilisant de nouveau la méthode "Tout ce qui a une chance positive d'arriver aprés un nombre fini des pas se produira tôt ou tard", décrite à l'Exercice 1(d), (9.1).
En deduire $E(T)$.

Solutions :

1. $\mathcal{L}(Z_1) = U[0,1]$
2.
3.
4. a) $E(Z_1) > 0$

b) On cherche deux inconnues $\varphi_i(x) = \mathbb{P}_x[T < \infty, X_T = -i], i = 0, 1$. En suite, $\psi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)$. On trouve deux martingales de Wald $M_t = \rho_i^{X_t}$, en resolvant en resolvant $p(\rho) := E[\rho^{Z_\cdot} = \sum_i p_i \rho^i = 1, \rho \in (0,1)$, ce qui donne $\rho_1 = 1/2, \rho_2 = -1/5$.

On aimerait appliquer a ces martingales le théorème d'arrêt. Mais, $EZ_1 > 0$ et la loi des grandes nombres implique $\mathbb{P}[T = \infty] > 0]$ et donc aucun des cas du théorème d'arrêt ne s'applique pas, car le théorème d'arrêt ne permet pas des temps d'arrêt tq. $\mathbb{P}[T = \infty] > 0$!
Dommage, car par une "application erronée" du théorème d'arrêt aux martingales de Wald on obtient un système de type Vandermonde

$$\rho_i^x = \sum_{j=0}^{1} \varphi_j(x)\rho_i^{-j}, i = 1, 2$$

avec des solutions raisonnables
Heureusement, pour une "application correcte," il suffit de remplacer T par le temps d'arrêt borné $T_N = \min(T, N)$, avec $N \to \infty$. On trouve pour chaque $\rho = \rho_i$

$$\rho^x = E\rho^{X_{T_N}} = \rho^{X_N}\mathbb{P}_x[T > N] + \sum_{j=0}^{-1} \rho^j \mathbb{P}_x[T \leq N, X_T = j] \to_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{-1} \varphi_j(x)\rho^{-j}$$

(le premier terme converge vers 0, car $\mathbb{P}[X_N \to \infty] = 1$, et $|\rho| < 1$).
Les probabilités de ruine sont :

$$\psi_x = \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{7}\left(\frac{-1}{5}\right)^x$$