

---

*Processus de Markov, de Levy, Files d'attente, Actuariat et  
Fiabilité*

Master Mathématiques, Modélisation et Simulation  
2ème année

2009/2010

*Florin Avram*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels sur les processus de Markov</b>	<b>4</b>
1.1	Introduction aux processus de Markov . . . . .	4
1.1.1	Champs et processus aléatoires . . . . .	4
1.1.2	Les processus de Markov . . . . .	5
1.2	Marches aléatoires et récurrences . . . . .	6
1.2.1	Moments et cumulants . . . . .	6
1.2.2	<u>La méthode du conditionnement sur le premier pas</u> . . . . .	7
1.2.3	<u>Les systèmes linéaires associés à quelques problèmes de premier pas</u> pour les chaînes de Markov . . . . .	8
1.2.4	La ruine du joueur pour la marche aléatoire simple . . . . .	13
1.2.5	Les marches aléatoires sur $(-\infty, \infty)$ . . . . .	17
1.2.6	Problèmes de premier passage sur un intervalle semi-infini . . . . .	18
1.2.7	Exercices . . . . .	19
1.2.8	Récurrences et équations différentielles linéaires à coefficients constants	23
1.2.9	Récurrences et équations différentielles linéaires à coefficients polyno- miaux (*) . . . . .	25
1.3	Le processus de Poisson . . . . .	26
1.3.1	Rappels sur la distribution de Poisson et exponentielle . . . . .	26
1.3.2	Le processus de Poisson multidimensionnel . . . . .	27
1.3.3	Processus de comptage et renouvellement en temps continu . . . . .	28
1.3.4	Le processus de Poisson unidimensionnel . . . . .	29
1.3.5	Le processus de Poisson comme limite des processus de Bernoulli . . . . .	30
1.3.6	Le processus de Poisson composé . . . . .	31
1.3.7	Conclusions . . . . .	32
1.3.8	Exercices . . . . .	33
1.4	Les semigroupes de Markov homogènes; le calcul de l'exponentielle des opé- rateurs . . . . .	35
1.4.1	Résolution des équations Chapman-Kolmogorov pour le processus de Markov à deux états . . . . .	36
1.4.2	Résolution des équations de Chapman-Kolmogorov pour le processus de Poisson; le calcul de l'exponentielle des matrices triangulaires (*) . . . . .	37
1.4.3	Exercices . . . . .	38
1.5	Problèmes de premier passage/Dirichlet pour les chaînes et processus de Markov	42
1.5.1	Les chaînes/processus de Markov absorbants . . . . .	42
1.5.2	Les espérances des temps d'atteinte . . . . .	43
1.5.3	Les probabilités d'absorbtion . . . . .	45

---

1.5.4	Les distributions et transformées de Laplace des temps d'absorption/atteinte/"matrix geometric"/de type phase . . . . .	46
1.5.5	Les distributions de type phase discrètes . . . . .	49
1.5.6	Classification des quelques problèmes sur les esperances des fonctionnelles dependant des temps de premier passage . . . . .	51
1.6	Chaînes de Markov à espace fini : analyse spectrale et comportement limite .	52
1.6.1	L'existence de la matrice des distributions à la longue $\mathbf{P}$ . . . . .	53
1.6.2	Un exemple de chaîne non-ergodique . . . . .	53
1.6.3	La périodicité . . . . .	55
1.6.4	Le théorème de Perron-Frobenius . . . . .	57
1.6.5	Le comportement limite des chaînes, à partir de la représentation spectrale . . . . .	57
1.6.6	La structure de la matrice de distributions a la longue $\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j)$	59
1.6.7	Exercices . . . . .	64
1.7	Exercices . . . . .	65
1.8	Fiabilité pour les processus semi-markoviens de sauts . . . . .	73
<b>2</b>	<b>Processus de Levy : marches aléatoires en temps continu</b>	<b>75</b>
2.1	Définition et propriétés de linéarité de processus de Levy . . . . .	75
2.2	Exemples de processus de Levy . . . . .	76
2.3	Marches aléatoires "infinitesimales" et le mouvement Brownien . . . . .	77
2.4	La formule de Black-Scholes pour les options d'achat . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Processus de naissance-et-de-mort et applications aux files d'attente</b>	<b>79</b>
3.1	Les files d'attente Markoviennes . . . . .	80
3.2	<u>Distribution stationnaire et comportement asymptotique</u> . . . . .	81
3.3	Mesures de performance des files d'attente . . . . .	83
3.4	<u>Problèmes de Dirichlet/première passage</u> . . . . .	84
3.5	<u>Quelques mesures de performance pour la file M/M/1</u> . . . . .	86
3.6	Les formules d'Erlang A,B,C (*) . . . . .	89
3.7	Exercices . . . . .	93
3.8	Les probabilités transitoires des processus de naissance et mort . . . . .	95
<b>4</b>	<b>The Cramér-Lundberg and Levy risk models</b>	<b>98</b>
4.1	Introduction . . . . .	98
4.2	The ruin problem . . . . .	99
4.3	The Lévy exponent/symbol and its inverses . . . . .	100
4.4	Backward Kolmogorov (generator) equations . . . . .	101
4.5	The Pollaczek-Khinchine Laplace transform formula . . . . .	102
4.6	Exponential claims . . . . .	103
4.7	Rational symbols . . . . .	106
4.8	Examen d'entraînement 1 . . . . .	110
4.9	Examen d'entraînement 2 . . . . .	112

# Chapitre 1

## Rappels sur les processus de Markov

### 1.1 Introduction aux processus de Markov

#### 1.1.1 Champs et processus aléatoires

Beaucoup de problèmes en physique, biologie, etc, ramène à l'étude des **champs aléatoires**, qui sont des collections des variables aléatoires  $X_t, t \in \mathcal{I}$ , où l'ensemble des indices  $\mathcal{I}$  peut-être  $\mathbb{N}^d, \mathbb{Z}^d, \mathbb{R}^d$ , un ensemble fini, etc. Pour le cas des indices unidimensionnels  $\mathcal{I} = \mathbb{N}(\mathbb{Z})$  et  $\mathcal{I} = \mathbb{R}$  on utilise aussi le nom **processus stochastiques** (à temps discret, respectivement continu).

**Définition 1.1.1** Soit  $\mathcal{I}$  un ensemble quelconque. On appelle processus aléatoire  $X$  indexé par  $\mathcal{I}$  toute famille  $(X_t)_{t \in \mathcal{I}}$ , de vecteurs aléatoires définis sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans d'états  $\mathcal{E}$ . Celui la peu-être  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^p, \mathbb{C}^p$ , ou même un espace des fonctions comme  $\mathcal{E} = C_{[0, \infty)}, C_{[0, \infty)}^{(p)}$ , etc.

**Note :** Lorsque  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^p$  et  $p = 1$ , une seule valeur est observée à chaque "instant"  $t$ , alors que lorsque  $p > 1$ , plusieurs variables sont observées et on parle de processus multidimensionnels ou multivariés.

L'espace  $\mathcal{I}$  est souvent le temps, ainsi :

$\mathcal{I} = \mathbb{N}$  : instants successifs à partir d'un instant initial  $t_0$ .

$\mathcal{I} = \mathbb{Z}$  : instants successifs avant et après un instant  $t_0$ .

$\mathcal{I} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^+$  : idem mais processus à temps continu.

$\mathcal{I} = \mathbb{Z}^2$  : images.

$\mathcal{I} = \mathbb{Z}^3$  : modèle de la matière.

Nous allons considérer ici seulement des processus à indices unidimensionnels  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$  (les premiers deux cas étant appelés aussi séries chronologiques en statistique). L'étude est facilité alors par l'existence d'un ordre complet entre les indices.

Dans le cas des espaces d'états  $\mathcal{E}$  **finis ou dénombrables**, les variables  $X_i, i \in \mathcal{I}$  sont appellées discrètes; pour  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^d$ , on parle des variables continues. Le cas discret est le cas plus simple, car il permet d'éviter plusieurs détails techniques (par exemple, dans ce cas, l'ensemble des evenements mesurables pour une variable  $X_{i_0}$  est simplement l'ensemble de toutes les parties de  $\mathcal{E}$ ).

Pour modéliser un champs/processus il est nécessaire de spécifier de manière consistente l'ensemble de toutes ses **distributions jointes d'ordre fini**.

---

**Définition 1.1.2** Soit  $X_t = X_t, t \in \mathcal{I}$  un champs aléatoire et soit  $J \subset \mathcal{I}$  un sous ensemble fini. On dénotera par  $X_J$  la distribution jointe des variables  $X_t, t \in J$ . L'ensemble  $X_J : J \subset \mathcal{I}, |J| < \infty$  sera appelé la famille des distributions jointes d'ordre fini de  $X$ .

En pratique, des propriétés supplémentaires sont nécessaires pour réduire la complexité inhérente dans le modèle ci dessus.

Les processus à variables  $X_t$  indépendants sont simples à utiliser, mais peut-être trop simples pour modéliser des phénomènes intéressants. dans ce cas, les distributions jointes sont simplement des produits.

Le prochaine degré de complexité est donné par les processus Markoviens. Ils incluent les marches aléatoires  $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i, Z_i.i.i.d.$ , mais cette famille est aussi une transformation simple des processus à variables indépendants, et ça simplifie son étude (par exemple la démonstration du CLT).

La classe des processus Markoviens est extrêmement riche, avec une complexité qui depend des ensembles  $\mathcal{E}, \mathcal{I}$ .

## 1.1.2 Les processus de Markov

### Définition 1.1.3 -Propriété de Markov

Un processus  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , avec  $t$  unidimensionnel a la propriété de Markov si, et seulement si ses probabilités conditionnelles ne depend pas du passé que par le passé immédiat, i.e.

$$\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < t, t_i \in \mathbb{R}, \text{ et } \forall e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_i \in \mathcal{E}$$

$$P([X_t \in A] | [X_{t_0} = e_{i_0}, \dots, X_{t_k} = e_{i_k}]) = P([X_t \in A] | [X_{t_k} = e_{i_k}])$$

Interprétation de la propriété de Markov : si on considère que le processus est indicé par le temps, cette propriété traduit le fait que le présent ne dépend du passé qu'à travers le passé immédiat.

Un processus ayant la propriété de Markov s'appelle processus de Markov.

Exemples : 2.3 et 2.1 de Ruegg, et les exemples de Belisle.

### Définition 1.1.4 Matrice des transitions

Pour tous  $0 \leq s \leq t$ , pour tous  $i, j$  dans  $I$ , et pour chaque processus de Markov, on définit les probabilités de transition par :

$$p_{ij}(s, t) = P([X_t = e_j] | [X_s = e_i]).$$

### Définition 1.1.5 Homogénéité des transitions

Un processus est dit homogène si, et seulement si :

$$\forall i, j \in I, \forall 0 \leq s \leq t, p_{ij}(s, t) = p_{ij}(0, t - s).$$

On note alors  $p_{ij}(s, t) = \underline{p_{ij}(t - s)}$ , et la matrice  $p_{ij}(t)$  est appelée matrice de transition après temps  $t$ .

Hypothèse de travail : **(H1) On ne considérera ici que des processus homogènes.**

L'exemple le plus simple des processus de Markov homogènes est fourni par les "chaînes de Markov" en temps discret et à espace d'états fini ou dénombrable.

## 1.2 Marches aléatoires et récurrences

### Définition 1.2.1 Marches aléatoires

Soit  $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires **i.i.d** (i.e. indépendantes et de même loi), à valeurs dans un groupe  $G$ , et soit  $X_0 \in G$  indépendant de  $Z$ .

Le processus  $X_n \in G, n = 0, 1, \dots$  donné par la somme de ces variables

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \boxed{\text{rw}} \quad (1.1)$$

s'appelle **marche aléatoire**. Comme alternative, la marche aléatoire peut-être définie récursivement par la récurrence

$$X_n = X_{n-1} + Z_n, n = 1, \dots \quad \boxed{\text{defr}} \quad (1.2)$$

**Motivation :** Les marches aléatoires sont parmi les processus stochastiques les plus utiles (par exemple en physique, mathématiques financières, files d'attente, statistique, etc...). Ils peuvent servir comme des excellents exemples introductifs, qui motiveront un étude plus approfondi des processus stochastiques. Finalement, ils sont aussi parmi les processus les meilleurs compris, car ils ramènent souvent à des solutions analytiques, ce qui rendent les résultats plus transparents.

**Exemple : Les marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}$**

### Définition 1.2.2 Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$ .

Soit  $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires **i.i.d** (i.e. indépendantes et de même loi), à valeurs en  $\mathbb{Z}$ , ayant une distribution discrète  $\mathbf{p} = (p_j = P[Z_n = j], j \in \mathbb{Z})$ , et soit  $X_0 \in \mathbb{Z}$  indépendant de  $Z$  et ayant aussi une distribution discrète.

a) Le processus  $X_n \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, \dots$  donné par la somme de ces variables

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \boxed{\text{rw}} \quad (1.3)$$

s'appelle **marche aléatoire**. Comme alternative, la marche aléatoire peut-être définie récursivement par la récurrence

$$X_n = X_{n-1} + Z_n, n = 1, \dots \quad \boxed{\text{defr}} \quad (1.4)$$

b) Si en plus  $|Z_n| = 1$ , i.e.  $p_i \neq 0$  ssi  $i = \pm 1$ , et le processus (1.3) est appelé **marche aléatoire simple**. On denotera  $p_1$  par  $p$  et de lors la distribution de  $Z_n$  est de la forme  $p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$ , i.e.  $P[Z_n = 1] = p$  et  $P[Z_n = -1] = 1-p$  avec  $0 < p < 1$ .

Si  $p = q = .5$  on parle d'une **marche aléatoire symétrique**, et avec  $p \neq q$  on parle d'une **marche aléatoire biaisée**.

**Extension :** Si on remplace les probabilités  $p_j$  par des probabilités  $p_{i,j} := P_{X_{n-1}=i}[X_n - X_{n-1} = j]$  on arrive à une chaine de Markov.

### 1.2.1 Moments et cumulants

**Exercice 1.2.1 Les moments et cumulants de la marche simple.** Soit  $X_0 = 0 \in \mathbb{N}$  le capital initial d'un joueur. Au temps  $n = 1, 2, \dots$ , le joueur gagnera  $Z_n = 1$  avec probabilité  $p$  et perdra  $Z_n = -1$  avec probabilité  $1-p$ , où  $0 < p < 1$ . Soit  $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$  son capital au temps  $n$ .

Calculez :

1. L'esperance du son gain  $e_n = EX_n$ .
2. La variance du son gain  $v_n = \text{Var } X_n$ .

---

3. La fonction génératrice des moments  $M(u, n) = Ee^{uX_n}$ .

4. La cumulant generating function  $\kappa(u, n) = \log(Ee^{uX_n})$ .

**Notes :** 1) Il est clair que ces propriétés de linéarité (de l'espérance, de la variance, et de la cumulant generating function), sont vraies pour chaque marche aléatoire.

2) La connaissance de la distribution ou de la fonction génératrice des moments d'une variable  $X$  sont typiquement équivalents. Mais, pour une somme  $\sum_{i=1}^n Z_i$  des v.a. i.i.d., pendant que la comme distribution est la  $n$ -ième convolution  $\mathbf{p}^{*,n}$  de la  $\mathbf{p}$  distribution de  $Z_i$ , la fonction génératrice des moments  $Ee^{\theta \sum_{i=1}^n Z_i}$  est beaucoup plus simple à obtenir (étant la  $n$ -ième puissance de la fonction génératrice des moments  $Ee^{\theta Z_1}$ ).

**Exercice 1.2.2** Soit  $m_n = m_n(X), n = 0, 1, 2, \dots$  les moments d'une va  $X$ , soit  $\kappa_X(u) = \log M_X(u) = \log(\sum_n \frac{u^n}{n!} m_n) = \sum_n \frac{u^n}{n!} c_n(X)$  la fonction génératrice des cumulants, où  $c_n = c_n(X) = \frac{\partial^n \kappa(u)}{(\partial u)^n} \Big|_{u=0}$  sont les cumulants.

a) Montrez (en utilisant éventuellement un logiciel symbolique) que  $\forall X, c_0 = 0, c_1 = m_1, c_2 = \text{Var}(X) = m_2 - m_1^2, c_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$ , etc.

b) Montrez (en utilisant éventuellement un logiciel symbolique) que  $\forall X, m_2 = c_2 + c_1^2, m_3 = c_3 + 3c_1c_2 + c_1^3$ .

Nt : 1) Le cumulant d'un ordre donné est un polynôme dans les moments d'ordre plus petit ou égal, et réciproquement.

2) Les coefficients de l'expansion des moments en fonction des cumulants sont donné par des nombres des partitions.

3) Les cumulants d'une variable centré ( $m_1 = 0$ ) coincide avec les moments jusqu'au troisième ordre. C'est le quatrième cumulant, la "kurtosis", donné dans le cas centré par  $c_4 = m_4 - 3m_2^2$ , qui joue un rôle important dans certaines tests statistiques (comme de nonnormalité, par exemple).

**Exercice 1.2.3** Pour la marche simple, calculez

1. Le premier, deuxième et troisième cumulants  $\kappa_i(n), i = 1, 2, 3$  de  $X_n$ , i.e. les premiers trois coefficients dans l'expansion  $\kappa(u, n) = \sum_i \kappa_i(n)u^i$  en puissances de  $u$ .

2. Le deuxième moment de  $X_n$ . Quelle est la particularité du cas  $p = 1/2$  ?

3. Le troisième moment de  $X_n$ .

## 1.2.2 La méthode du conditionnement sur le premier pas

**Exercice 1.2.4 La marche aléatoire symétrique.** On cherche à trouver la probabilité d'un joueur qui s'engage dans une série de parties (indépendantes) à un jeu où à l'issue de chaque partie il gagne 1F avec une probabilité 1/2 et perd 1F avec une probabilité 1/2, et qui décide de s'arrêter de jouer dès qu'il aura  $B$  francs en poche, ou dès qu'il n'a plus d'argent. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $X_n$  la fortune du joueur au bout de  $n$  parties, et  $X_0 = i$  sa fortune à l'entrée dans le Casino.

Ca revient à étudier la marche aléatoire symétrique

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, X_n \in \mathbb{Z}$$

avec  $P[Z_n = 1] = P[Z_n = -1] = 1/2$ , jusqu'au "temps d'arrêt/sortie"  $T = \min[T_0, T_B]$  quand le process sort de l'intervalle  $[0, B]$  (en prenant 0 et  $B$  comme états absorbants). On

dénotera par  $\mathbb{E}_i$  l'esperance en commençant de  $i$  (conditionnant sur  $X_0 = i$ ), et on désigne par  $E$  l'événement que le joueur gagne, i.e.

$$E = \{x_T = B\} = \{\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } X_n = B, X_k > 0, k = 1, \dots, n-1\}.$$

Pour tout  $i$  de  $\{0, \dots, B\}$ , on pose :

$$b_i = P(E \mid [X_0 = i])$$

(la probabilité du "bonheur").

1. En supposant  $B = 3$ , esquisser l'espace de tous les chemins du bonheur qui commencent avec  $X_0 = 1$ . Expliquer graphiquement les équations  $b_1 = 1/2b_2, b_2 = 1/2b_1 + 1/2$ . Calculer  $b_0, b_3$  et  $b_1, b_2$ .
2. En supposant  $B = 4$ , calculer  $b_1, b_2$  et  $b_3$ .
3. Calculer  $b_i, i = 0, \dots, B$  pour  $B$  quelconque.
4. Calculez l'espérance du nombre des pas du jeu, pour  $B$  quelconque.
5. Etant donnée une chaîne finie avec deux états absorbants  $p, g$  et le reste des états transitoires, calculer le vecteur  $\mathbf{b} = (b_i = P_i[X_T = g], i \in \mathcal{T})$ .

**R :** On pourrait essayer de calculer  $b_i$  en ajoutant les probabilités de tous les chemins du bonheur qui commencent avec  $X_0 = 1$  (en regardant l'arbre de toutes les possibilités). Mais comme cet arbre est (typiquement) infini et très compliqué, cette analyse n'est pas facile. Par contre, une approche "divide et conquière" de décomposition de l'arbre dans ses branches obtenues en conditionnant sur le premier pas ramène à des équations linéaires faciles à résoudre.

Cet exercice illustre trois idées :

1. L'avantage de la méthode du conditionnement sur le premier pas.
2. Le calcul des esperances pour les chaînes de Markov comporte des systèmes linéaires avec **une inconnue pour chaque état initial possible**.
3. Les systèmes associés avec un processus fixe implique toujours la même partie homogène appelée "opérateur" (dans le cas des chaînes de Markov en temps discret et à espace d'états fini ou dénombrable, l'opérateur est simplement  $P - I$ , où  $P$  est la matrice de transition  $P$ ).

Ces idées seront approfondies dans les chapitres suivants, où nous regarderons quelques autres problèmes résolubles par le conditionnement sur le(s) premier(s) pas.

### 1.2.3 Les systèmes linéaires associés à quelques problèmes de premier passage pour les chaînes de Markov

**Exercice 1.2.5** On lance une monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à  $q$  et celle de sortir pile égale à  $p = 1 - q$ , jusqu'à ce qu'on obtient une pile. Soit  $N^{(1)}$  le nombre de faces précédant la première pile ( $N^{(1)} = 0, 1, 2, \dots$ ). Par exemple, si  $X_1 = F, \dots, X_{j-1} = F$  et  $X_j = P, j \geq 1$ , la valeur de  $N^{(1)}$  est  $j - 1$ .

1. Calculez  $p_k = P[N^{(1)} = k], k = 0, \dots$ . Quelle est la loi (distribution) de  $N^{(1)}$  ?
2. Trouvez les moments  $m_1 = \mathbb{E}N^{(1)}$ , et  $m_2 = \mathbb{E}(N^{(1)})^2$  par la méthode du conditionnement sur le premier pas, en utilisant la relation  $\mathcal{L}(N^{(1)} \mid X_1 = F) = \mathcal{L}(1 + N^{(1)})$  (qui est une conséquence de la décomposition "premier pas + le reste")

$$N^{(1)'} = 1 + N'$$

et du fait que les distributions conditionnées par le premier pas du "reste"  $N'$  sont connues : a)  $(N'|X_1 = P) \equiv 0$  et b)  $\mathcal{L}(N'|X_1 = F) = \mathcal{L}(N^{(1)})$  par le fait que la seule différence entre les réalisations possibles de  $N'$  et ceux de  $N^{(1)}$  est le moment "de départ de la montre", qui n'affecte pas la distribution d'une chaîne homogène).

3. Trouvez l'espérance  $m = \mathbb{E}N^{(2)}$  du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient deux piles consécutives. Ind : Sauf  $m$ , il faudra trouver en même temps  $m_1 = \mathbb{E}_1N^{(2)}$  du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient deux piles consécutives, à partir du moment qu'on a obtenu la première.
4. Généraliser pour  $k = 3$  piles consécutives, et pour  $k$  arbitraire.
5. "Mieux que les moments :" Trouvez la fonction génératrice des probabilités  $\varphi_{N^{(1)}}^*(z) = \mathbb{E}z^{N^{(1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ , et deduisez l'espérance  $\mathbb{E}N^{(1)}$ , en calculant  $\varphi'(1)$ .
6. Soit  $k = 2$ . Abordez les mêmes questions pour  $\varphi_{N^{(k)}}^*(z)$ , ainsi que pour  $\varphi_{N^{(k)'}}^*(z)$ , où la dernière variable représente le nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient  $k$  piles consécutives, en incluant la suite finale des piles.  
Trouver les probabilités  $P[N^{(2)} = k]$  pour  $q = 1/3$ .
7. Reabordez la question précédente pour  $k = 3$ .

### Solutions :

1. L'espace des experiments est :  $E = \{P, FP, FFP, FFFP, \dots\} = \{P\} \cup FE$ .  
 $p_k = pq^k, k = 0, 1, \dots$  On a à faire avec une distribution bien connue (la géométrie!!).
2. Il est quand même intéressant de remarquer que l'espérance peut aussi se calculer par un conditionnement sur le premier pas :

$$m_1 = p \times 0 + q(1 + m_1) \iff m_1 = \frac{q}{p}$$

Note : Pour l'autre définition d'une variable géométrique  $N^{(1)'} := N^{(1)} + 1 \in \{1, 2, \dots\}$  (en incluant la première face), on obtient par le résultat précédent

$$n := \mathbb{E}N^{(1)+1} = \mathbb{E}(N^{(1)} + 1) = \frac{1}{p},$$

ou encore par conditionnement sur le premier pas :

$$\begin{aligned} n &= \mathbb{E}[N^{(1)+1}] = \mathbb{P}[X_1 = P]\mathbb{E}[N^{(1)+1}|\{X_1 = P\}] + \mathbb{P}[X_1 = F]\mathbb{E}[N^{(1)+1}|\{X_1 = F\}] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = P]1 + \mathbb{P}[X_1 = F](1 + \mathbb{E}[N^{(1)+1}]) = p * 1 + q * (1 + n) = 1 + q * n \end{aligned}$$

3. Remarquons que les trois événements  $PP, PF, F$  fournissent une décomposition :

$$E = \{F E\} \cup \{PF E\} \cup \{PP\}$$

de l'espace d'états qui permet soit de constater que notre événement d'arrêt est arrivé, soit de relancer le processus du début. Par conséquent :

$$n = q(n + 1) + pq(n + 2) + 0p^2 \iff n = \frac{q(1 + 2p)}{1 - q - pq} = \frac{1 + p}{p^2} - 2$$

4. Remarquons que les quatre evenements  $F, PF, PPF, PPP$  fournissent une decomposition de l'espace d'états qui permet soit de constater que notre evenement d'arrêt est arrivé, soit de relancer le processus du debut. Le conditionnement sur  $F, PF, PPF, PPP$  donne :  $n = q(n+1) + pq(n+2) + p^2q(n+3) + 0p^2 \iff n = \frac{q(1+2p+3p^2)}{p^3} = \frac{1+p+p^2}{p^3} - 3$  (et pour inclure les dernières trois piles, on ajoute 3).

5. La méthode des fonctions génératrices :

Remplaçons chaque terme de l'espace des experiments par  $p^{nb.P} q^{nb.F} z^{nb.F}$  ( $nb.P = 1$ ). Soit  $p(z)$  le résultat obtenu en ajoutant tous les termes. Observons qu'en rajoutant tous les termes, on obtient précisément  $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{p}{1-qz}$ .

Nous pourrions aussi remarquer la décomposition  $\varphi(z) = p + qz\varphi(z)$ , qui implique encore  $\varphi(z) = \frac{p}{1-qz}$ .

Finalement,  $\mathbb{E}N^{(1)} = \varphi'(1) = \frac{q}{p}$ .

**Rem :** La méthode des **fonctions génératrices** (qui n'est pas vraiment nécessaire dans cet exercice simple) s'avère une des méthodes les plus puissantes pour les espaces d'états infinis.

6. Les probabilités  $p_k$  sont moins évidentes à obtenir. *Ind : Utilisons une chaîne de Markov associé, sur l'espace  $E = \{0P, 1P, 2P\}$ , avec état absorbant  $2P$ .*

$p_0 = p^2, p_1 = qp^2, p_2 = q^2p^2, p_3 = qp_2 + pqp_1, \dots, p_n = qp_{n-1} + pqp_{n-2}, \forall n \geq 3$ . On trouve ainsi une récurrence à coefficients constants, qui donne  $p_n = C_+\lambda_+^n + C_-\lambda_-^n, \lambda_{\pm} = \frac{q \pm \sqrt{q(4-3q)}}{2}$ . Le système  $C_+ + C_- = p^2, C_+/\lambda_+ + C_-/\lambda_- = 0$  donne  $C_+ = \frac{p^2(q-\lambda_-)}{\lambda_+ - \lambda_-}, C_- = \frac{p^2(\lambda_+ - q)}{\lambda_+ - \lambda_-}$ .

On peut trouver la même réponse à partir de la mgf

$$\frac{p^2}{1 - qz - pqz^2} = \frac{C_+}{1 - z/\lambda_+} + \frac{C_-}{1 - z/\lambda_-}$$

7. *Ind : Utilisons une chaîne de Markov associé, sur l'espace  $E = \{0P, 1P, 2P, 3P\}$ , avec état absorbant  $3P$ . Soit  $Q$  la matrice des transitions entre les états transitoires  $0, 1, 2$ . Le vecteur  $\varphi$  des fonctions génératrices des moments satisfait  $\varphi(z) = z(Q\varphi(z) + \mathbf{t})$ .*

**Rem :** On peut aussi trouver une formule générale pour  $\mathbf{m} = \varphi'(1)$ . En différentiant le système, on trouve  $\varphi'(z) - zQ\varphi'(z) = Q\varphi(z) + \mathbf{t} \Rightarrow (I - Q)\varphi'(1) = Q\mathbf{1} + \mathbf{t} = \mathbf{1}$ .

**Exercice 1.2.6** *Etant donnée une chaîne finie avec deux états absorbants  $0, B$  et le reste des états transitoires, Obtenez un système et une formule explicite pour le vecteur  $\mathbf{b} = (b_i = P_i[X_T = B], i \in T)$ .*

**Sol :**  $\mathbf{b} = Q\mathbf{b} + \mathbf{a}_B \iff \mathbf{b} = (I - Q)^{-1}\mathbf{a}_B$  où  $\mathbf{a}_B$  est le vecteur des probabilités d'absorption directe en  $B$  (i.e. après un pas).

**Exercice 1.2.7** *Pour une marche aléatoire  $X_t, t = 0, 1, 2, \dots$  sur le graphe cubique ci-dessous, calculer :*

1. La probabilité  $p_A = \mathbb{P}_A\{T(U) < T(O)\} = \mathbb{P}_A\{X_T = U\}$ , ou  $T = \min[T(U), T(O)]$ . Indication : Utiliser la symétrie.
2. Comparer le résultat avec le potentiel électrique obtenu en 1 si les entiers sont connectés par des résistances unitaires, et une tension égale à 1 est appliquée entre 0 et B.

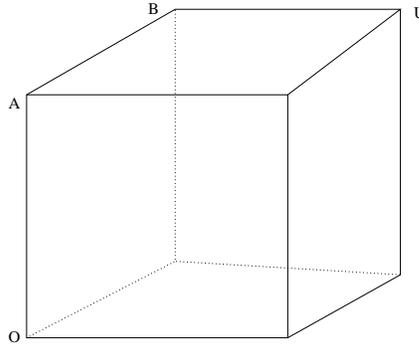


FIG. 1.1 – Marche aléatoire simple

3. L'espérance du nombre de pas  $T = \min[T(O), T(U)]$ .
4. Les probabilités stationnaires du chaque noeud. **Indication** : Devinez la réponse et montrez qu'elle satisfait le système des équations d'équilibre.
5. L'espérance en sortant de  $U$  du nombre de pas  $T_O$  jusqu'au noeud  $O$ .
6. L'espérance en sortant de  $O$  du nombre de pas  $\tilde{T}_O$  jusqu'au premier retour à  $O$ .
7. La probabilité  $p_k$  en partant de  $O$  que la marche visite  $U$  exactement  $k$  fois ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) avant le premier retour à  $O$ . Vérifier la somme  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ .

**R** :  $X(t)$  représente une marche aléatoire simple sur le cube  $[0, 1]^3$ ,  $\vec{0}$  est l'origine  $(0, 0, 0)$ , le coin opposé  $(1, 1, 1)$  est noté par  $u$ . On remarque que dans toutes les questions les voisins de l'origine ont un rôle symétrique et cela nous permet de le noter par la même lettre  $a = (0, 0, 1), \dots$ . De la même manière on appelle les voisins de  $u$  par  $b = (0, 1, 1), \dots$ .

1.  $P_a[X(T) = u]$ , s'obtient de la solution du système

$$\begin{cases} p_a = \frac{2}{3}p_b + \frac{1}{3}p_0 = \frac{2}{3}p_b \\ p_b = \frac{2}{3}p_a + \frac{1}{3}p_u = \frac{2}{3}p_a + \frac{1}{3} \end{cases}$$

qui donne  $p_b = \frac{3}{5}, p_a = \frac{2}{5}$ .

2. Même système!
3.  $t_a, t_b$  sont la solution du système

$$\begin{cases} t_a = \frac{2}{3}(1 + t_b) + \frac{1}{3}(1 + t_0) = \frac{2}{3}t_b + 1 \\ t_b = \frac{2}{3}(1 + t_a) + \frac{1}{3}(1 + t_u) = \frac{2}{3}t_a + 1 \end{cases}$$

qui donne  $t_b = t_a = 3$ . Remarquez la similarité entre les deux systèmes.

4.  $\pi = (1/8, 1/8, \dots, 1/8)$ .
5. Pour trouver  $t_u = E_u[T_0]$ , on résout le système :

$$\begin{aligned} t_u &= 1 + t_b \\ t_b &= 1 + \frac{2}{3}t_a + \frac{1}{3}t_u \\ t_a &= 1 + \frac{2}{3}t_b \end{aligned}$$

dont la solution est  $t_a = 7, t_b = 9, t_u = 10$ .

6.  $E_0[\bar{T}_0]$  où  $\bar{T}_0$  représente le temps espéré jusqu'à la prochaine visite de 0 en commençant de 0, est donné par  $1 + t_a = 1 + 7 = 8$ . A remarquer que c'est exactement l'inverse de la probabilité "de long parcours" d'être à 0, ce qui est un résultat bien connu sur les temps de retour espérés.
7. Soit  $p_k$  la probabilité d'avoir exactement  $k$  visites à  $U = (1, 1, 1)$  avant de retourner à 0. Alors  $p_0$  c'est le même que la probabilité commençant en  $A$  que la marche revient à 0 avant de visiter  $(1, 1, 1)$ , qui est  $\frac{3}{5}$ .  
 Pour  $k = 1$  visites, "le chemin" observé seulement en  $O$ , l'état après  $B$  et  $U$  est  $A, U, B, 0$ . Donc,  $p_1 = P_A[U, B, 0] = (\frac{2}{5})^2$ ,  $p_2 = P_A[U, B, U, B, 0] = (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})$ , et en général  $p_k = \frac{3}{5}p_{k-1} = (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^{k-1}$ ,  $k \geq 2$ . La distribution pour  $k \geq 1$  est géométrique (vérifiez que  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{2}{5}$ , comme il faut).

**Exercice 1.2.8** Un spéolog est perdu dans une grotte, avec deux sorties  $U, O$ , les chemins de la quelle forment le graphe papillon ci-dessous. Il se trouve à présent dans le point  $A$ , et à cause de la manque de visibilité, est obligé a faire une **marche aléatoire** entre les sommets du papillon. Cette marche finira en  $U$  avec la liberté ou en  $O$  avec la mort.

1. Calculez la probabilité de survie du spéolog.
2. Calculez l'espérance du temps  $T$  qu'il lui reste a passer dans la grotte, en sachant que les chemins menant à  $U$  prennent deux heures, ceux menant à  $O$  trois heures, et les autres 5 heures.
3. La grotte contient aussi un génie, qui frappe le spéolog des nb. aléatoires, ayant une distribution de Poisson des coups, avec esperance 3 sur les chemins menant à  $U$ , 5 pour ceux menant à  $O$ , et 2 pour les autres chemins. Calculez l'espérance du nombre des coups que le spéolog prendra dans la grotte.
4. (\*) Calculez la variance et la distribution du nombre des coups que le spéolog prendra dans la grotte.
5. Etant donnée une chaîne finie avec des états absorbants, calculer le vecteur  $\mathbf{T} = (t_i = E_i[T], i \in \mathcal{T})$ .

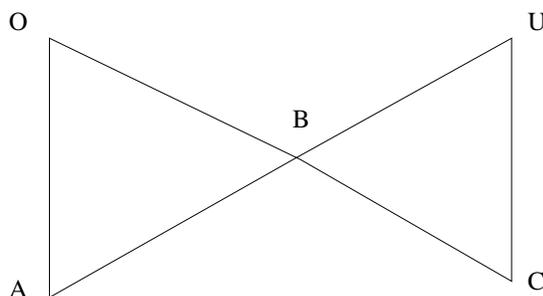


FIG. 1.2 – Marche aléatoire simple sur le graphe papillon

**Sol :** 5.  $\mathbf{T} = (I - Q)^{-1}Q \times_H \tilde{T}$  où  $\tilde{T}$  est la matrice des temps  $\tilde{T}_{i,j}$  pour traverser de  $i$  à  $j$  et  $\times_H$  denote le produit composante par composante.

**Exercice 1.2.9** Calculez, par la méthode des fonctions génératrices :

a)  $T(z) = \sum_{n \geq 0} T_n z^n$ , où

$$T_0 = 0, \quad T_n = 2T_{n-1} + 1, n \geq 1$$

---

Trouvez  $T_n$ .

b) Calculez  $T(z) = \sum_{n \geq 0} T_n z^n$ , où

$$T_0 = 1, \quad T_n = 2T_{n-1} + n - 1, n \geq 1$$

Trouvez  $T_n$ .

### 1.2.4 La ruine du joueur pour la marche aléatoire simple

Nous généraliserons maintenant les résultats pour la marche unidimensionnelle symétrique au cas des marches simples asymétriques. En même temps, nous étudierons d'autres problèmes concernant l'absorption dans un ensemble d'arrêt pour la marche aléatoire simple unidimensionnelle (les équations obtenues sont valables dans toute dimension, mais les solutions sont disponibles explicitement seulement dans le cas unidimensionnel).

**Exemple 1.2.1 La ruine du joueur et autres "problèmes de Dirichlet" pour la marche aléatoire simple.** *Considérons la marche aléatoire simple*

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, X_n \in \mathbb{Z}$$

avec  $(Z_n)$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi  $P[Z_n = \pm 1] = p, q$ . Nous étudierons la marche jusqu'au "temps d'arrêt/sortie"  $T = \min[T_0, T_B]$  quand le processus sort de l'intervalle  $[0, B]$  pour  $B$  donné, i.e. on prend 0 et  $B$  comme états absorbants. On appelle ce problème **la ruine du joueur**, à cause de l'interprétation d'un joueur qui s'engage dans une série de parties (indépendantes) à un jeu où à l'issue de chaque partie il gagne  $1F$  avec une probabilité  $p$  et perd  $1F$  avec une probabilité  $q = 1 - p$ , et qui décide de s'arrêter de jouer dès qu'il aura  $B$  francs en poche, ou dès qu'il n'a plus d'argent. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $X_n$  la fortune du joueur au bout de  $n$  parties, et  $X_0 = i$  représente sa fortune à l'entrée dans le Casino. On dénotera par  $\mathbb{E}_i$  l'espérance en commençant de  $i$  (conditionnant sur  $X_0 = i$ ), et on désigne par  $E$  l'événement que le joueur gagne, i.e.

$$E = \{x_T = B\} = [\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } X_n = B, X_i > 0, i = 1, \dots, n - 1].$$

Pour tout  $i$  de  $\{0, \dots, B\}$ , on pose :

$$b_i = P(E \mid [X_0 = i]).$$

1. Calculer  $b_0$  et  $b_B$ .
2. Montrer que :

$$\forall i \in \{1, \dots, B - 1\}, b_i = p b_{i+1} + q b_{i-1} \text{ (on rappelle que } q = 1 - p \text{)}.$$

3. Obtenir une expression explicite de  $b_i$  pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, B\}$ . Indication : Remarquez que la solution satisfaisant  $b_0 = 0$  est de la forme :

$$b_i = \begin{cases} k \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right) & \text{quand } p \neq q \\ k i & \text{quand } p = q \end{cases}$$

et déterminer  $k$  tq la condition frontière de  $b_B$  soit satisfaite.

4. Pour tout  $i$  de  $\{0, \dots, B\}$ , on pose  $a_i = P(F \mid [X_0 = i])$  où  $F$  est l'événement "le joueur repart ruiné". En procédant comme auparavant, montrer que :

$$a_i = \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^B}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^B} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{B-i}{B} & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pour tout  $i$  de  $\{0, \dots, B\}$ , calculer  $a_i + b_i$ . Que peut-on en déduire ?

Calculez les probabilités de ruine quand  $B \rightarrow \infty$ , pour  $p > q$  et pour  $p \leq q$ . Expliquez la relation avec le comportement de  $X_t, t \rightarrow \infty$ .

5. Obtenez un système d'équations pour l'espérance du gain final  $f_i = \mathbb{E}_i X_T$ . Calculez cette fonction pour  $p = q$ .
6. Obtenez un système d'équations pour l'espérance du temps de jeu :  $t_i = \mathbb{E}_i T$ . Calculez cette fonction, pour  $p = q$ , et pour  $p < q$ , quand  $B \rightarrow \infty$ .
7. Obtenez un système d'équations pour l'espérance du "coût cumulé d'inventaire"  $c_i = \mathbb{E}_i \sum_{t=0}^{T-1} X_t$ . Calculez cette fonction, pour  $p = q$ , et pour  $p < q$ , quand  $B \rightarrow \infty$ .
8. Obtenez un système d'équations pour  $w_i = \mathbb{E}_i a^T = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_i[T = k] a^k$  (qui est la fonction génératrice des probabilités  $\mathbb{P}_i[T = k]$ ). Calculez cette fonction, pour  $p \neq q$ .
9. Obtenez les équations de récurrence et les conditions frontière satisfaites par  $u_x = \mathbb{E}_x a^T g(X_T)$ ,  $a \in (0, 1)$  et par  $v_x = \mathbb{E}_x [a^T g(X_T) + \sum_{t=0}^{T-1} h(X_t)]$ ,  $a \in (0, 1)$ .

Résolvons cet exercice en utilisant la méthode du **conditionnement** sur le premier pas  $Z_1$ , l'idée de quelle est d'obtenir des relations de récurrence qui lient les valeurs de l'espérance conditionnée à partir de tous les points de départ possibles.

Nous verrons, en examinant les questions 2)-8) de cet exercice, qu'ils utilisent toutes le même opérateur

$$(Gf)_n := (P - I)(f)_n = p f_{n+1} + q f_{n-1} - f_n \tag{1.5} \quad \boxed{\text{op}}$$

la seule différence étant dans les conditions frontière et dans la partie nonhomogène. En plus, ils se regrouperont en deux types de questions :

1. "Gain final espéré", satisfaisant :

$$f_n = \mathbb{E}_n [g(X_T)] = p f_{n+1} + q f_{n-1} \iff (Gf)_n = 0, \quad F(0) = g(0), F(B) = g(B)$$

2. "Coût total accumulé espéré"

$$f_n = \mathbb{E}_n \left[ \sum_0^{T-1} h(X_i) \right] = h(n) + p f_{n+1} + q f_{n-1} \iff (Gf)_n = 0, \quad f(0) = 0, f(B) = 0$$

**Solution :**

1.  $b_0 = 0, b_B = 1$
2. Gain final espéré,  $g(x) = 1_{x=B}$ .

En conditionnant, on trouve :

$$\begin{aligned} b_n &= \mathbb{P}_n [X(T) = B] \\ &= p \mathbb{P}_n [X(T) = B / X(1) = n + 1] + q \mathbb{P}_n [X(T) = B / X(1) = n - 1] \\ &= p b_{n+1} + q b_{n-1} \quad 1 \leq n \leq B - 1 \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n [X(T) = B / X(1) = n \pm 1] &= \mathbb{P} [X(T) = B / X(0) = n, X(1) = n \pm 1] = \\ &= \mathbb{P} [X(T) = B / X(1) = n \pm 1] = \mathbb{P} [X(T) = B / X(0) = n \pm 1] = b_{n \pm 1} \end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov et l'homogénéité.

3. Quand  $p = q = 1/2$ ,  $b_x = P_x[X(T) = B]$  satisfait :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{b_{n-1}}{2} \quad \text{for any } 1 \leq n \leq B-1 \\ b_B &= 1 \\ b_0 &= 0 \end{aligned}$$

La méthode de résolution des équations de récurrence homogènes à coefficients constants commence en cherchant des solutions de la forme  $b_n = r^n$ . Si les racines de l'équation auxiliaire sont distinctes, la solution générale est :

$$b_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n$$

où  $k_1, k_2$  sont déterminés en utilisant les conditions frontière.

Ici, cherchant des solutions puissances  $r^x$  ramène à l'équation  $r^2 - 2r + 1 = 0$  à deux racines identiques  $r_{1,2} = 1$ . La solution générale est  $b_x = A + Bx$ . Les conditions frontière donnent  $b_x = \frac{x}{B}$ .

Solution finale si  $p \neq q$  :  $b_n = \frac{1-(q/p)^n}{1-(q/p)^B}$ .

4.  $a_i + b_i = 1$ , et donc la marche sera éventuellement absorbé dans une des deux frontières (elle ne peut pas rester à l'intérieur indéfiniment).

Pour  $p = q$ ,  $\lim_{B \rightarrow \infty} a_n = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{B-n}{B} = 1$ . Autrement,

$$\lim_{B \rightarrow \infty} a_n = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{(q/p)^n - (q/p)^B}{1 - (q/p)^B} = \begin{cases} (q/p)^n, & q < p \\ 1, & q > p. \end{cases}$$

5.  $f_x = E_x[X(T)]$  (valeur finale espérée) satisfait  $Gf(x) = 0, f(0) = 0, f(B) = B$ . Pour  $p = q$ , la solution  $f_x = x$  est obtenue comme ci-dessus :

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{f_{x+1}}{2} + \frac{f_{x-1}}{2} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq B-1 \\ f_B &= B \\ f_0 &= 0 \end{aligned}$$

(C'est aussi une fonction "harmonique", mais avec conditions frontière différentes.)

6.  $t_x = E_x[T]$  (temps de sortie espéré) est un coût total accumulé espéré (obtenu en prenant  $h(x) = 1$ ), qui satisfait le système inhomogène  $Gt(x) + 1 = 0, t(0) = 0, t(B) = 0$ .

Pour  $p = q$

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + 1 \quad \text{for any } 1 \leq x \leq B-1 \\ t_B &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution d'une équation nonhomogène est donnée par

$$t_x = t_p(x) + h(x)$$

où  $t_p(x)$  est une solution particulière et  $h(x)$  est la solution générale de l'équation homogène. Commençons par l'équation homogène.

La solution générale homogène ("fonction harmonique")  $h(x) = A + Bx$  pour cet opérateur a été déjà obtenue ci-dessus.

Nous aimerions maintenant trouver une solution particulière  $t_p(x)$  de l'équation  $Gt_p(x) = -1$  de la même forme que la partie nonhomogène  $-1$  de l'équation, donc  $t_p(x) = C$ ; mais, comme les constantes, et puis aussi les fonctions linéaires vérifient l'équation homogène  $Gt_p(x) = 0$ , nous devons modifier deux fois cette forme en multipliant par  $x$ , en arrivant donc à  $t(x) = Cx^2$ . Comme  $Gx^2 = 2x(p - q) + 1 = 1$ , on trouve  $C = -1$  et finalement la solution particulière  $t_p(x) = -x^2$ .

La solution générale est donc  $t(x) = -x^2 + A + Bx$  et les conditions frontière ramènent à  $t_x = x(B - x)$ .

Pour  $p \neq q$

$$\begin{aligned} t_x &= pt_{x+1} + qt_{x-1} + 1 \quad \text{for any } 1 \leq x \leq B - 1 \\ t_B &= 0 \\ t_0 &= 0 \end{aligned}$$

La solution générale homogène avec  $p \neq q$  est  $h(x) = k_1(q/p)^x + k_2$  et le terme nonhomogène 1 suggère une solution particulière constante  $k$ , mais comme ça satisfait l'équation homogène, on modifie à  $kn$ . Finalement,  $k = \frac{1}{q-p}$ .

La solution particulière est  $t_p(x) = \frac{x}{q-p}$ ; elle satisfait déjà  $t_p(0) = 0$ . La partie homogène  $h(x) = t_x - t_p(x)$  devra aussi satisfaire  $h(0) = 0$  et donc elle sera de la forme  $h(x) = A\tilde{h}(x)$  où  $\tilde{h}(x) = ((q/p)^x - 1)$ .

En demandant que  $t_n = \frac{n}{q-p} + A(q/p)^n - 1$  satisfait la condition frontière  $t_B = 0$  on trouve :

$$t_n = t_p(n) - t_p(B) \frac{\tilde{h}(n)}{\tilde{h}(B)} = \frac{n}{q-p} - \frac{B}{q-p} \frac{(q/p)^n - 1}{(q/p)^B - 1}.$$

La limite quand  $B \rightarrow \infty$  est  $t_n = \begin{cases} \infty & \text{si } p > q \\ t_p(n) = \frac{n}{q-p} & \text{si } p < q \end{cases}$ ; on peut aussi obtenir ce

resultat en utilisant l'approximation déterministe  $X_n - X_0 \sim nE(Z_1)$ , appelée aussi limite fluide.

7.  $c_x = E_x[\sum_0^{T-1} X(t)]$  (coût total d'inventaire espéré) satisfait le système inhomogène  $Gc(x) + x = 0, c(0) = 0, c(B) = 0$ .

Pour  $p = q$  :

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{c_{x+1}}{2} + \frac{c_{x-1}}{2} + x \quad \text{for any } 1 \leq x \leq B - 1 \\ c_B &= 0 \\ c_0 &= 0 \end{aligned}$$

Une solution particulière est  $c_p(x) = \frac{-x^3}{3}$ . Finalement, on arrive à  $c(x) = \frac{x(B^2 - x^2)}{3}$ .

Pour  $p \neq q$ , une solution particulière est  $c_p(x) = \frac{x^2}{2(q-p)}$  (elle satisfait déjà  $c_p(0) = 0$ ).

La partie homogène satisfaisant  $h(0) = 0$  sera toujours  $h(x) = A\tilde{h}(x)$  où  $\tilde{h}(x) = ((q/p)^x - 1)$ .

En demandant que  $c_n = c_p(n) + A(q/p)^n - 1$  satisfait la condition frontière  $c_B = 0$  on trouve :

$$c_n = c_p(n) - c_p(B) \frac{\tilde{h}(n)}{\tilde{h}(B)}$$

La limite quand  $B \rightarrow \infty$  est  $c_n = \begin{cases} \infty & \text{si } p > q \\ c_p(n) & \text{si } p < q \end{cases}$ .

8. On arrive à  $w(x) = A_1 z_1^x + A_2 z_2^x$ , où  $z_i$  sont les racines de  $pz^2 - a^{-1}z + q = 0$ , et  $A_i$  satisfont  $A_1 z_1^B + A_2 z_2^B = 1$ ,  $A_1 + A_2 = 1$  et  $w(x) = \frac{z_1^x - z_2^x + z_1^x z_2^x (z_1^{B-x} - z_2^{B-x})}{z_1^z - z_2^z}$

9. On a  $u_x = g(x)$ , pour  $x \in \{0, B\}$ , et le conditionnement donne la relation :  $u_x = \mathbb{E}_x[a^T g(X_\tau)] = a(pu_{x+1} + qu_{x-1})$ .

$v_x = g(x)$ , pour  $x \in \{0, B\}$ , et le conditionnement donne la relation :  $v_x = a(pv_{x+1} + qv_{x-1}) + h(x)$ .

Nous avons vue ici une des idées les plus importantes de la modélisation Markovienne : **les espérances, vues comme fonctions de l'état initial, satisfont certaines équations qui font toujours intervenir un opérateur associé fixe, appelé générateur du processus, même que les conditions frontière, termes non-homogènes, et d'autre "details" (comme la presence/absence d'une multiple de l'operateur identité) peuvent varier.**

Il s'avère que les mêmes équations décrivent la solution des problèmes analogues pour toutes les chaîne de Markov à espace d'états comptable, et avec des états absorbants – voir la prochaine section.

Par exemple, pour les chaînes de Markov, l'operateur associé est  $G = P - I$ , où  $P$  est la matrice de transition, et pour le cas particulier d'une marche aléatoire  $X_t = \sum_{i=1}^t Z_i$  avec  $p_k = P[Z_i = k]$ ,  $k \in [-c, d]$  on a encore  $G = P - I$ , où  $P = \sum_k p_k F^k$  et  $F$  est l'operateur de translation  $(Ff)_k = f_{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Alors, nous obtendrons des équations similaires pour les problèmes respectives, juste en remplaçant l'ancien operateur par le nouveau.

On recontre la même situation pour toute la classe des processus "de Markov",  $X_t$ , différents qu'elles soient, vivant sur des espaces  $S$  considerablement plus compliqués, la seule difference étant que l'operateur  $G_X : F(S) \rightarrow F(S)$  associé a ces processus sera plus compliqué!

Par exemple, les problèmes de cette section ont aussi des versions à espace d'états continu, obtenu en considérant des marches avec incréments infinitésimaux  $\epsilon$ , et en prenant la limite  $\mathbb{E} \rightarrow 0$ . La marche aléatoire devient ainsi un processus avec chemins continus, appelé mouvement Brownien. Les équations resterons les mêmes, seul l'operateur  $G$  changera (dans un operateur différentiel).

En conclusions, il existe une correspondance un à un entre les processus de Markov et une certaine classe des operateurs deterministes associés ; nous l'appellerons "Le Dictionnaire".

### 1.2.5 Les marches aléatoires sur $(-\infty, \infty)$

Rapellons qu'un état est récurrent si sa probabilité de retour  $q$  satisfait  $P < 1$ , ou si l'espérance du nb. des visites dans ce point satisfait  $E = 1/(1 - P) < \infty$ . Pour la marche aléatoire simple, il est facile de calculer  $P = 2 \min(p, q)$  ; en conclusion, il y a récurrence ssi

$p = q$ . On verifie facilement que le temps esperé de retour est  $\infty$ ; ce cas qui peut aparaitre seulement sur les espace d'états infinis s'apelle nulle recurrent. Dans le cas des marches récurrentes avec  $E_i < \infty$ , appellé récurrent positif, on peut vérifier que la distribution stationnaire est  $\pi_i = E_i^{-1}$ .

Pour la marche simple, on peut aussi calculer  $E$  par la decomposition

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} P[S_{2k} = 0] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} (pq)^k = 1/(1 - 4pq)^{1/2} = |2p - 1|^{-1} = |p - q|^{-1}.$$

Le resultat est obtenu en verifiant le quotient des termes consecutifs dans la serie ci-dessus; on aperçoit alors qu'on a a faire avec la serie hypergeometrique  ${}_1F_0[-^{1/2}; -4pq] = \frac{1}{(1-z)^{1/2}}$  (ce genre des sommes ont des formules explicites, qu'on peut decouvrir facilement avec un logiciel symbolyque, assez souvent)<sup>1</sup>.

**Rm :** La dernière expresssion est valable aussi pour la marche paresseuse avec  $p + q < 1$ .

### 1.2.6 Problèmes de premier passage sur un intervalle semi-infini

Soit  $\psi_n := \lim_{B \rightarrow \infty} a_n(B)$  la probabilité de ruine sur  $[0, \infty)$ . Nous avons deja vu, en partant des recurrences sur un domaine borné  $[0, B]$ , que :

$$\psi_n = \begin{cases} (q/p)^n, & q < p \\ 1, & q \geq p. \end{cases}$$

Cette solution peut être trouvée aussi directement, sans passer par la probabilité de ruine sur  $[0, B]$ , en s'appuyant sur des arguments probabilistes. On remarque d'abord que cette fonction est multiplicative en  $n$ , i.e.  $\psi_n = \rho^n$ , et en suite on choisit  $\rho$  selon la limite de  $X_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

La solution la plus simple est en effet de remarquer que l'absence des sauts strictement plus grands que 1 implique une propriété de multiplicativité, ce qui impose une solution puissance. Mais, bien-sur, cette approche ne peut pas contribuer à l'étude des marches "non-simples" dans les deux directions.

Examinons maintenant la méthode de fonctions génératrices (analogues à la transformée de Laplace), qui n'est pas réellement nécessaire pour la marche simple, mais qui est la méthode la plus puissante pour la resolution des équations de differences (différentielles).

On ajoute les équations  $\bar{\psi}_n = p\bar{\psi}_{n+1} + q\bar{\psi}_{n-1}$  multipliées respectivement par  $z^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . On obtient ainsi une équation pour la fonction  $\bar{\psi}^*(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z^n \bar{\psi}_n$  :

$$\bar{\psi}^*(z) = \frac{p\bar{\psi}_1}{\Phi(z) - 1}$$

où  $\Phi(z) = Ez^{Z_1} = pz^{-1} + qz$

---

<sup>1</sup>On peut aussi utiliser la representation  $P_k = Coef(0, \mathbb{E}z^{S_k})$ . On trouve  $E = \sum_{k=0}^{\infty} Coef(0, \mathbb{E}z^{S_k}) = Coef(0, \sum_{k=0}^{\infty} (pz + qz^{-1})^k) = Coef(0, \frac{z}{z-pz^2-q}) = Coef(0, \frac{1}{p-q}(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-pz/q})) = \dots$ , ou l'inversion de la transformée de Fourier. Cette méthode aboutisse aussi en deux dimensions, en ramenant a des integrales elliptiques

De lors,

$$\psi^*(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{zp\bar{\psi}_1}{p+qz^2-z} = \frac{p-qz-pz\bar{\psi}_1}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p-qz-z(p-q)}{(1-z)(p-qz)} = \frac{p}{p-qz}$$

car le numerator s'annule en 1 ("méthode du noyau") et donc  $p\bar{\psi}_1 = p - q$ .

De lors,  $\psi_n = (q/p)^n$ .

**Exercice 1.2.10** Calculer les probabilités de ruine  $\psi_x, x \in \mathbb{N}$ , pour une marche sur les nombres naturelles, avec la distribution de chaque pas donné par :  $\{p_1 = \frac{8}{10}, p_{-1} = \frac{1}{10}, p_{-2} = \frac{1}{10}\}$ . Montrer qu'elles sont positives.

**R :** La moyenne est  $m_1 = 1/2 > 0$ . Les probabilités de ruine satisfont  $\psi_x = \frac{8}{10}\psi_{x+1} + \frac{1}{10}\psi_{x-1} + \frac{1}{10}\psi_{x-2}, x \in \mathbb{N}$ . Elles sont des combinaisons de puissances  $\rho_x$ , avec  $\rho$  une racine de

$$\frac{8}{10}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{10}\rho + \frac{1}{10} = (\rho - 1)\left(\frac{8}{10}\rho^2 - \frac{2}{10}\rho - \frac{1}{10}\right) = \frac{8}{10}(\rho - 1)(\rho - 1/2)(\rho + 1/4)$$

$\psi_x = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^x + A_2\left(-\frac{1}{4}\right)^x$  satisfait  $\psi_0 = \psi_{-1} = 1$  ssi  $A_1 = 5/6, A_2 = 1/6$ . Les probabilités de ruine sont :

$$\psi_x = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{4}\right)^x \approx \frac{5}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

**Exercice 1.2.11** Calculer les probabilités de ruine pour une marche avec  $\{p_2 = \frac{3}{8}, p_1 = \frac{1}{8}, p_{-1} = \frac{1}{2}\}$

## 1.2.7 Exercices

- Rélations de récurrence.** Obtenez la formule analytique des suites décrites par les relations de récurrence ci-dessous, et vérifiez-les en utilisant les premiers termes de la suite  $t_2, t_3$ .
  - $t_i = 2t_{i-1} + i - 1, t_0 = 0$
  - $t_i = 2t_{i-1} + 5 \cdot 2^i, t_0 = 0$
  - $t_i = 3t_{i-1} - 2t_{i-2} + 2, t_0 = 0, t_1 = 2$
  - $t_i = 2t_{i-1} - t_{i-2} + 2, t_0 = 0, t_1 = 2$
- Calculer les probabilités de "bonheur" pour une marche sur  $[0, B]$ , avec a)  $\{p_{-2} = \frac{2}{5}, p_{-1} = \frac{1}{5}, p_1 = \frac{1}{5}\}$   
 b)  $\{p_{-1} = \frac{8}{10}, p_1 = \frac{1}{10}, p_2 = \frac{1}{10}\}$   
 c)  $\{p_{-1} = \frac{6}{7}, p_1 = 0, p_2 = \frac{1}{7}\}$
- Une particule décrit une marche aléatoire sur  $E = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$  : si la particule est en  $i < n$ , alors elle se déplace en  $j = i + 1$ , et si la particule est en  $i > n$ , alors elle se déplace en  $j = i - 1$ ; si la particule est en  $i = n$ , alors elle se déplace en 1 avec probabilité a, en  $2n - 1$  avec probabilité b, et avec probabilité  $1 - a - b > 0$  à une position  $j$  choisie avec probabilités égales parmi les autres éléments de  $E$ , différents de  $n$ . La position  $X_k$  au temps  $k$  constitue une chaîne de Markov.
  - Donner la matrice de transition.
  - Déterminer la loi stationnaire de la chaîne.
  - Calculer la position moyenne de la particule en régime stationnaire.
  - Calculer l'espérance du temps de retour en  $n$  d'une particule qui part de  $n$ .

- (e) En supposant maintenant que les états  $1, 2n - 1$  deviennent absorbants, calculer les probabilités de ruine  $\psi(k)$  et l'espérance du temps  $T = \min[T(1), T(2n - 1)]$ .
4. **La marche paresseuse :** Soit  $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$  une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ , avec  $(Z_n)$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi  $P[Z_n = \pm 1] = p/q$  et  $P[Z_n = 0] = 1 - p - q$ , avec  $0 < p + q < 1$ . Pour tout  $x$  de  $\mathbb{N}$ , on note par  $\mathbb{E}_x$  l'espérance en commençant de  $x$  (conditionnant sur  $X_0 = x$ ). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt  $T$  auquel le processus sort de l'intervalle  $[0, K]$  pour  $0 < K$  donnés.
- Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par  $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\}$ ,  $f_x = \mathbb{E}_x X_T$ ,  $t_x = \mathbb{E}_x T$ ,  $c_x = E_x[\sum_0^T X(t)]$  et  $w_x = \mathbb{E}_x a^T$ .
- Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour a)  $p_x$ , b)  $f_x$ , c)  $t_x$ , d)  $c_x$  et e)  $w_x$ , quand  $p = q < 1/2$ .
5. a) Quelle est la probabilité que la marche aléatoire simple est de retour en 0 après  $2n$  pas? b) Approximer cette quantité par la formule de Stirling  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$ . c) (\*) Démontrez la formule de Stirling.
6. (\*) Marc et un groupe de  $n - 1$  amis jouent un jeu. Chacun met un euro, et ensuite lance une monnaie biaisée, avec une probabilité de sortir "face" égale à  $p$ . La totalité de l'argent est partagé également entre ceux qui ont obtenu face (s'il n'y a aucune, l'argent est donné à une oeuvre charitable), et les piles perdent leur argent. a) Quelle est l'espérance du capital de Marc, après un tour? b) (\*) Quelle est l'espérance du capital après un tour pour un joueur choisi aléatoirement?

**Solutions :**

1. (a) C'est une équation nonhomogène, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \quad \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \quad \text{avec} \quad c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\begin{aligned} \text{et alors} \quad c_1 &= 2c_1 + 1 \quad \text{et} \quad c_1 = -1 \\ c_2 &= -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et} \quad c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 &= 0 = -1 + A \quad \text{et} \quad A = 1 \\ t_i &= -i - 1 + 2^i \end{aligned}$$

- (b) C'est une équation nonhomogène, alors :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \quad \tilde{t}_i = ci2^i \quad \text{avec} \quad ci2^i = 2(c(i - 1)2^i/2) + 52^i$$

$$\begin{aligned} \text{et alors} \quad c &= 5, \quad t_i = 5i2^i + A2^i \quad \text{et finalement,} \\ t_0 &= 0 = A \quad \text{et} \quad A = 0 \\ t_i &= 5i2^i \end{aligned}$$

- (c) C'est une équation différentielle nonhomogène et l'équation quadratique attachée a les racines 1, 2, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 2^i + A_2, \quad \tilde{t}_i = ci \quad \text{avec} \quad ci = 3(ci - c) - 2(ci - 2c) + 2$$

---

et alors  $c = -2$  et  $c_2 = 2c_1 + 1 = -1$   
 $\tilde{t}_i = -i - 1$  Finalement,  
 $t_0 = 0 = -1 + A$  et  $A = 1$   
 $t_i = -i - 1 + 2^i$

(d) C'est une équation différentielle nonhomogène avec des racines confondues égales à 1 de l'équation quadratique attachée, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 + A_2i, \quad \tilde{t}_i = c_1i + c_2 \quad \text{avec} \quad c_1i + c_2 = 2(c_1i - c_1 + c_2) + i - 1$$

et alors  $c_1 = 2c_1 + 1$  et  $c_1 = -1$   
 $c_2 = -2c_1 + 2c_2 - 1$  et  $c_2 = 2c_1 + 1 = -1$   
 $\tilde{t}_i = -i - 1$  Finalement,  
 $t_0 = 0 = -1 + A$  et  $A = 1$   
 $t_i = -i - 1 + 2^i$

2.

3.

4. (a) La matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)  $\pi_k = \frac{k}{2(n-1)}\pi_n, \forall k < n$  et la symétrie  $\pi_k = \pi_{2n-k}$  impliquent  $\pi_n(1 + \frac{(n-1)n}{2(n-1)}) = \pi_n(1 + \frac{n}{2}) = 1$  et  $\pi_n = \frac{2}{2+n}, \pi_k = \frac{k}{(n+2)(n-1)}$

(c)  $E_S[X_n] = n$

(d)  $t_n = \frac{1}{\pi_n} \frac{2+n}{2}$

5. (a) Soit  $(Gf)_x = p(f_{x+1} - f_x) + q(f_{x-1} - f_x)$  (formellement, la même expression comme dans le cas "non-paresseux", sauf que maintenant  $p + q < 1$ ).

Les équations sont respectivement :

$$\begin{aligned} (Gp)_x &= 0, p_K = 1, p_0 = 0 \\ (Gf)_x &= 0, f_K = K, f_0 = 0 \\ (Gt)_x + 1 &= 0, t_K = 0, t_0 = 0 \\ (Gc)_x + x &= 0, c_K = 0, c_0 = 0 \\ (Gw)_x &= (a^{-1} - 1)w_x, w_K = 1, w_0 = 1 \end{aligned}$$

Ces sont exactement les mêmes équations comme pour une marche non-paresseuse, sauf que l'opérateur est différent.

(b) Pour  $p_x$  et  $f_x$  on obtient donc les mêmes équations comme pour une marche symétrique avec  $p = 1/2$ , par exemple :

$$\begin{aligned} 2pp_x &= pp_{x+1} + pp_{x-1} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ p_K &= 1, \quad p_0 = 0 \end{aligned}$$

et donc les mêmes réponses  $p_x = \frac{x}{K}$ ,  $f_x = x$  Pour  $t_x = E_x[T]$  (temps de sortie espéré) on trouve :

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + \frac{1}{2p} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ t_K &= 0, \quad t_0 = 0 \end{aligned}$$

avec solution  $t_x = \frac{x(K-x)}{2p}$ .

**Remarque :** Le fait que les équations sont identiques pour ces deux marches (paresseuse et non-paresseuse) n'est pas une coïncidence. En fait, il s'avère que les réponses obtenues sont les mêmes par n'importe quel processus Markovien homogène, si on définit l'opérateur de la façon juste. Donc, la réponse pour tous les problèmes concernant espérances va impliquer un seul opérateur  $G$  (seulement les conditions frontière et la partie non-homogène changent d'un problème à l'autre)- en fait, la famille des processus aléatoires Markoviens est isomorphe à une famille d'opérateurs déterministes.

En plus, la structure des réponses en fonction de  $G$  est la même pour toutes les processus aléatoires Markoviens, malgré leur diversité; c'est un fait remarquable, qui démontre la puissance de ce concept.

6.

7. a)  $X$ , le nombre total des faces a une distribution binomiale  $B(n, p)$ . Il y a deux possibilités : - que Marc tire une pile et perd, dans quel cas son gain sera 0, et qu'il tire une face, dans quel cas le gain sera  $Y = \frac{n}{1+X'}$  où  $X'$  a une distribution binomiale  $B(n, p)$ . Donc, l'espérance du gain est

$$\begin{aligned} Y &= pE \frac{n}{1+X'} = p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} = p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} p^k q^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-1-k} = \sum_{j=1}^n C_n^j p^j q^{n-j} = 1 - q^n \end{aligned}$$

b) Le gain espéré d'un "joueur aléatoire"  $Y = Y(X)$  est 0 si  $X = 0$ , a.p.  $q^n$ . Au cas contraire, le "joueur aléatoire" est gagnant avec probabilité  $\frac{X}{n}$  et perdant avec probabilité  $1 - \frac{X}{n}$ . Le gain espéré est toujours  $(1 - q^n)E[\frac{X}{n}] = (1 - q^n)$ .

Finalement, cet exercice suggère la question générale du calcul des "sommes binomiales", comme par exemple

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i$$

où  $x = \frac{p}{q}$ . Parfois, ces sommes peuvent être déduites à partir de l'identité  $(1+x)^m = \sum_{i=0}^m C_m^i x^i$  en dérivant ou en intégrant. Mais, le proces d'integration n'abouti pas

toujours à des sommes closes. Une somme  $S_n = \sum_1^n f_n$  est une solution d'une relation de récurrence de premier ordre  $S_n - S_{n-1} = f_n$  et donc la question de l'existence des formules closes pour  $f_n$  polynomes ou fonctions rationnelles est un cas particulier de la question de l'existence des formules closes pour les récurrences avec coefficients polynomiaux.

Cette question est assez difficile, et le plus efficace est d'utiliser un logiciel symbolique. Ceux ci nous informent s'il y a des formules closes dans la famille relativement simple des solutions "d'Alembertiennes", ou si non.

### 1.2.8 Récurrences et équations différentielles linéaires à coefficients constants

L'étude des marches aleatoires et des processus Markoviens ramène souvent à des équations différentielles ou de récurrence linéaires. Le cas des coefficients constants est assez simple, car toutes les solutions peuvent être construites à partir des solutions basiques exponentielles  $e^{rx}$ .

Comme le cas des équations différentielles à coefficients constants est très bien connu, on rappelle ici seulement le cas de récurrences linéaires.

Les deux équations de récurrence linéaire de deuxième ordre ci-dessous

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0, \tag{1.6} \quad \boxed{\text{rec}}$$

$$av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = d_n, \tag{1.7} \quad \boxed{\text{r1}}$$

sont appelées **homogène** et **nonhomogène** respectivement.

#### L'équation homogène

Si les coefficients  $a, b$  et  $c$  sont constants, on sait qu'ils existent des solutions de la forme  $u_n = x^n$  pour tout  $n$  ( fonctions exponentielles ). Pour trouver  $x$  on remplace  $x^n$  en (1.6) et on trouve que  $x$  doit satisfaire **l'équation auxiliaire** :

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1.8} \quad \boxed{\text{quad}}$$

Soient  $x_1$  et  $x_2$  les deux racines de l'équation de deuxième degré (1.8). On en déduit que la solution *générale* de (1.6) est toujours de la forme

1. Si  $x_1 \neq x_2$

$$u_n = Ax_1^n + Bx_2^n,$$

2. Si  $x_1 = x_2,$

$$u_n = Ax_1^n + Bnx_1^n,$$

avec des constantes  $A$  et  $B$ .

Dans les deux cas  $A$  et  $B$  doivent être déterminées à partir des conditions supplémentaires sur la frontière.

#### L'équation nonhomogène

La résolution du problème nonhomogène (1.7) comporte quatre pas :

1. Trouver un basis pour l'espace vectoriel des solutions de l'équation auxiliaire homogène (1.6), et donc la solution générale  $u_n$  pour cette équation.
2. Déterminer une solution particulière de (1.7), par exemple en utilisant une expression "essai"  $\tilde{v}_n$  qui a la même forme générale que le membre droit  $d_n$ , mais des coefficients non-déterminés. Par exemple, si  $d_n$  est un polynôme d'ordre  $k$ , on essaie un polynôme général d'ordre  $k$ .
3. Néanmoins, si votre expression d'essai a des termes qui sont inclus dans l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène obtenue au pas 1 (et donc qui vont être annihilés par l'opérateur des différences), il faut multiplier l'expression d'essai par  $n, n^2, \dots$  jusqu'à ce qu'il n'y a plus des termes inclus dans cet'espace .
4. Après la décision de la forme d'essai, on trouvent les valeurs des coefficients de  $\tilde{v}_n$  à partir de (1.7), par la méthode des coefficients non-déterminés.
5. La solution générale de (1.7) est de la forme  $v_n = \tilde{v}_n + u_n$ . On trouve finalement les coefficients encore non déterminés en  $u_n$ , en utilisant les conditions sur la frontière pour  $v_n$ .

**Exemple 1.2.2** On considère l'ensemble  $E$  des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui vérifient la relation suivante :

$$(R) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + \frac{3}{2}u_{n+1} - u_n = 0.$$

1. Rechercher les suites géométriques qui vérifient cette relation (R).
2. On note  $r_1$  et  $r_2$  leurs raisons et on admet que  $E$  est un espace vectoriel de dimension 2, i.e. toute suite de  $E$  s'écrit sous la forme

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit  $(a_n)$  la suite de  $E$  qui vérifie  $a_0 = 1$  et  $a_1 = 0$ . Calculer  $a_n$ .

**Exemple 1.2.3** On considère l'ensemble  $E'$  des suites  $(v_n)$  qui vérifient la relation :

$$(R') \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} + \frac{3}{2}v_{n+1} - v_n = 4n + 1.$$

1. On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = an + b$ . Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $(u_n)$  soit une solution particulière de  $(R')$ .
2. Soit  $(v_n)$  une suite de  $E'$ .
  - (a) Pour toute suite  $(t_n)$  de  $E'$  on définit la suite  $(u_n)$  par  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n - t_n$ . Vérifier que  $(u_n) \in E$ .
  - (b) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + an + b$ .
  - (c) Déterminer  $v_n$  pour  $v_0 = -\frac{5}{9}$  et  $v_1 = -\frac{26}{9}$ .

**Exemple 1.2.4** Obtenez les formules analytiques des suites décrites par les relations de récurrence ci-dessous, et vérifiez-les en utilisant les premiers termes de la suite  $t_2, t_3$ .

1.  $t_i = 2t_{i-1} + i - 1, \quad t_0 = 0$
2.  $t_i = 2t_{i-1} + 5 \cdot 2^i, \quad t_0 = 0$
3.  $t_i = 3t_{i-1} - 2t_{i-2} + 2, \quad t_0 = 0, t_1 = 2$
4.  $t_i = 2t_{i-1} - t_{i-2} + 2, \quad t_0 = 0, t_1 = 2$

---

**Solution :**

1. C'est une équation nonhomogène, alors nous aurons :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \quad \tilde{t}_i = c_1i + c_2 \quad \text{avec} \quad c_1i + c_2 = 2(c_1i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\begin{aligned} \text{et alors} \quad c_1 &= 2c_1 + 1 \quad \text{et} \quad c_1 = -1 \\ c_2 &= -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et} \quad c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 &= 0 = -1 + A \quad \text{et} \quad A = 1 \\ t_i &= -i - 1 + 2^i \end{aligned}$$

2. C'est une équation nonhomogène, alors :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \quad \tilde{t}_i = ci2^i \quad \text{avec} \quad ci2^i = 2(c(i-1)2^i/2) + 52^i$$

$$\begin{aligned} \text{et alors} \quad c &= 5, \quad t_i = 5i2^i + A2^i \quad \text{et finalement,} \\ t_0 &= 0 = A \quad \text{et} \quad A = 0 \\ t_i &= 5i2^i \end{aligned}$$

3. C'est une équation de différences nonhomogène et l'équation quadratique attachée a les racines 1, 2, alors nous aurons :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_12^i + A_2, \quad \tilde{t}_i = ci \quad \text{avec} \quad ci = 3(ci - c) - 2(ci - 2c) + 2$$

$$\begin{aligned} \text{et alors} \quad c &= -2 \quad \text{et} \quad c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 &= 0 = -1 + A \quad \text{et} \quad A = 1 \\ t_i &= -i - 1 + 2^i \end{aligned}$$

4. C'est une équation de différences nonhomogène dont les racines de l'équation quadratique attachée sont confondues égales à 1 donc nous aurons :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 + A_2i, \quad \tilde{t}_i = c_1i + c_2 \quad \text{avec} \quad c_1i + c_2 = 2(c_1i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\begin{aligned} \text{et alors} \quad c_1 &= 2c_1 + 1 \quad \text{et} \quad c_1 = -1 \\ c_2 &= -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et} \quad c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\ t_0 &= 0 = -1 + A \quad \text{et} \quad A = 1 \\ t_i &= -i - 1 + 2^i \end{aligned}$$

### 1.2.9 Récurrences et équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux (\*)

Dans le cas des coefficients polynomiaux la resolution est possible seulement dans des cas particuliers, et en utilisant toute une hierarchie des fonctions de base : hypergeometriques, d'Alembertiennes et Liouvilliennes.

## 1.3 Le processus de Poisson

Poiexp

### 1.3.1 Rappels sur la distribution de Poisson et exponentielle

1. On considère deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  indépendantes de loi de Poisson de paramètres  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$  respectivement.
  - (a) Quelle est la loi de  $Z = X + Y$ ? **Indication** : On peut utiliser la fonction génératrice des probabilités  $p_X(z) = \mathbb{E}z^X$ , ou la fonction génératrice des moments  $m_X(s) = \mathbb{E}e^{sX} = p_X(e^s)$ .
  - (b) Trouver la distribution d'une somme de  $n$  variables Poisson indépendantes de paramètre  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ .
  - (c) Pour tout entier  $n \geq 0$ , déterminer la loi conditionnelle de  $X$  sachant que  $Z = X + Y = n$ .
  - (d) Déterminer  $E(X | X + Y)$ .
  - (e) Quelle est la distribution de

$$S = \sum_{i=1}^X B_i$$

où  $B_i$  sont des va aléatoires Bernoulli de paramètre  $p$ ?

#### 2. La loi exponentielle et la propriété de "manque de mémoire"

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle positive. Montrez que  $X$  suit une loi exponentielle si, et seulement si :  $\forall t, h \geq 0, P([X - t \geq h] | [X \geq t]) = P[X \geq h]$ . qu'on appelle la propriété de manque de mémoire.

**Démonstration:** Si  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  alors pour tous  $t, h \geq 0$  on a :

$$\begin{aligned} P([X \geq t + h] | [X \geq t]) &= \frac{P([X \geq t + h] \cap [X \geq t])}{P[X \geq t]} = \frac{P[X \geq t + h]}{P[X \geq t]} \quad (*) \\ P([X \geq t + h] | [X \geq t]) &= \frac{1 - F_X(t + h)}{1 - F_X(t)} \\ &= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(t+h)})}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = e^{-\lambda h} = 1 - F_X(h) = P[X \geq h] \end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose que  $\forall t, h \geq 0, P([X \geq t + h] | [X \geq t]) = P[X \geq h]$  c'est-à-dire encore d'après (\*) :

$$\forall t, h \geq 0, P[X \geq t + h] = P[X \geq t] P[X \geq h]$$

d'où la fonction  $\bar{F} = \bar{F}_X = 1 - F_X$  vérifie l'équation fonctionnelle

$$(**) \bar{F}(t + h) = \bar{F}(t) \bar{F}(h) \text{ pour tous } t, h \geq 0$$

En prenant logarithmes, on trouve que la fonction  $f(x) = \log(\bar{F}(x))$  vérifie l'équation fonctionnelle

$$(**) f(t + h) = f(t) + f(h) \text{ pour tous } t, h \geq 0$$

On utilise maintenant le résultat :

**Théorème 1.3.1** Une fonction monotone satisfaisant l'équation fonctionnelle

$$(**) f(t+h) = f(t) + f(h) \text{ pour tous } t, h \geq 0$$

doit être linéaire, i.e.

$$f(t) = tf(1)$$

**Démonstration:** : A partir de (\*\*), on obtient que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left((f(1))^{\frac{1}{n}}\right)^m = (f(1))^{\frac{m}{n}}$$

Montrons que  $f(1) \neq 0$  : si  $f(1) = 0$  alors d'après ce qui précède  $f$  est nulle sur  $\mathbb{Q}^+$ , or on sait que pour tout réel  $x > 0$ , il existe  $r$  dans  $\mathbb{Q}^+$  tels que  $r \leq x$ , comme  $f$  est décroissante, on aura alors  $0 \leq f(x) \leq f(r) = 0$  donc  $f(x) = 0$  et  $f = 0$ , ce qui est faux.

Par conséquent les fonctions  $f$  et  $x \mapsto (f(1))^x = e^{x \ln f(1)}$  coïncident sur  $\mathbb{Q}^+$ , comme ces fonctions sont continues sur  $\mathbb{R}^+$ , on peut alors affirmer que  $\forall x \geq 0, f(x) = e^{x \ln f(1)}$

On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 0$  donc  $\ln f(1) < 0$  et on peut écrire que

$$\forall x \geq 0, F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ avec } \lambda = -\ln f(1) > 0$$

et on en déduit que la loi de  $X$  est une loi exponentielle.

### 1.3.2 Le processus de Poisson multidimensionnel

Soit  $\lambda$  une constante. On appelle champs (ou processus) de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}^d$  un ensemble des v.a.  $N(A)$  index'ées par les sous-ensembles  $A \subset \mathbb{R}^d$  tq :

1. **indépendance** : si les sous-ensembles  $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^d$  sont disjoints, alors les variables  $N(A_1), \dots, N(A_k)$  sont indépendantes
2. **stationarité** : la distribution des variables  $N(A+t), t \in \mathbb{R}^d$  ne dépend pas de  $t$
3.  $N(A)$  est une variable Poisson d'intensité  $c = \lambda m(A)$ , où  $m(A)$  est la mesure de Lebesgue.

**Rq :**

1. Un processus ayant les propriétés (1) et (2) s'appelle processus de Levy.
2. En fait, la troisième condition peut être remplacée par une condition beaucoup plus faible :  $N(A) \in \mathbb{N}$ , et la probabilité de plus d'un point dans des ensembles petits est négligeable, i.e.  $P[N(A) \geq 2] = o(P[N(A) = 1])$ , quand  $m(A) \rightarrow 0$ .

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on arrive au processus de Poisson uni-dimensionnel. Dans ce cas, on étudie les variables aléatoires indexées par les intervalles  $A = [a, b]$ , et on réserve le nom de processus de Poisson pour le processus  $N(t), t \in \mathbb{R}$ , défini par  $N(t) := N([0, t])$ . Les variables  $N(A) = N(b) - N(a)$  sont appelées alors "incrément" du processus  $N(t)$ .

**dP1**

**Définition 1.3.1** Un processus qui a des accroissements indépendants (PAI) et pour le quel il existe une constante  $\lambda > 0$  tq pour tout  $t > 0$ , la variable aléatoire  $N_{t+s} - N_s$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$  :

$$p_k(t) := \mathbb{P}\{N_{t+s} - N_s = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

s'appelle processus de Poisson homogène.

**Remarque 1.3.1** *Le nombre espéré d'arrivées du processus de Poisson dans un interval de longueur  $t$  est :  $E[N(s+t) - N(s)] = \lambda t$ .*

**Exemple 1.3.1** *Considérons la distribution du nombre d'accidents de voiture dans une ville, par jour. a. Est ce que ce nombre d'accidents pourra suivre approximativement une loi de Poisson ? b. Trouver i. la probabilité qu'il y ait au plus trois accidents un jour donné. ii. le nombre moyen d'accidents ( $M$ ) pour lequel la probabilité d'avoir trois accidents ou plus un jour donné est  $< 0.05$ . (On exprimera cette probabilité en fonction de l'inconnue  $M$  et on en déduira une équation qu'il faudra résoudre numériquement).*

**Exercice 1.3.1** *Des clients arrivent dans une banque selon un processus de Poisson  $N(t), t \in \mathbb{R}$ , de paramètre  $\lambda = 1.2$  (l'unité de temps est la minute).*

1. *Il arrive en moyenne combien de clients en 10 mn ?*
2. *Donnez la loi de probabilité de  $N(2)$ , le nombre de clients qui arrivent en deux minutes, et esquisser le graphique de  $p_k = P[N(2) = k]$ , pour  $k=0,1,2,3,4,5$ .*
3. *Donnez la probabilité que personne n'arrive durant 2 mn, et après ça que 3 personnes arrivent dans les 4 mn suivantes.*
4. *Donnez la probabilité  $q_3$  que 3 personnes arrivent en 4 mn, vérifiez que  $q_3 = p_0p_3 + p_1p_2 + p_2p_1 + p_3p_0$ , et expliquez pourquoi.*

**Exercice 1.3.2** *a) Montrez que la distribution du temps de la prochaine arrivée d'un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  est exponentielle a paramètre  $\lambda$ .*

*b) Trouver la distribution du temps de la  $n$ -ième arrivée d'un processus de Poisson.*

### 1.3.3 Processus de comptage et renouvellement en temps continu

**Motivation :** La plupart des phénomènes aléatoires demandent une modélisation et étude au cours du temps, comme les processus de comptage (où de naissances)  $N_t, t \in \mathbb{R}_+$ , tq les :

- appels arrivant dans un standard téléphonique
- arrivées de clients à un guichet
- survenue de pannes dans un parc de machines, ...

**Définition 1.3.2** *Un processus  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est appelé processus de comptage s'il prend des valeurs dans  $\mathbb{N}$  et s'il vérifie les trois propriétés suivantes :*

- (i)  $0 \leq s \leq t \Rightarrow N_s \leq N_t$
- (ii)  $N_s$  a des chemins "cadlag", i.e. continues à droite et avec des limites à gauche
- (iii)  $P[N_s - N_{s-} > 1] = 0$

Il s'agit donc des processus non décroissants et qui n'augmentent jamais avec plus d'une unité, et qui modélisent la réalisation d'une suite d'événements aléatoires d'un même type au cours du temps. Soit  $a_i, i = 1, 2, \dots$  les temps entre deux arrivés consecutives.

**Définition 1.3.3** *Un processus de comptage pour le quel les temps entre deux arrivés consecutives sont des variables aleatoires i.i.d. s'appelle processus de renouvellement.*

*Les temps de renouvellement (ou les temps de la  $n$ -ième arrivée) sont :*

$$A_n = \sum_{i=1}^n a_i, n = 0, 1, 2, \dots$$

---

Il est facile de voir que le nombre d'arrivées avant le temps  $t$ , i.e. le processus

$$(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+} = \sup_k \{k : A_k \leq t\}$$

est un processus de comptage.

**Théorème 1.3.2** (*admis*) *Le seul processus de renouvellement qui est aussi markovien est le processus de Poisson.*

### 1.3.4 Le processus de Poisson unidimensionnel

On peut aussi définir le processus de Poisson homogène comme le processus de comptage associé à un processus de renouvellements, au cas où les temps  $a_i$  entre les arrivées sont exponentiels.

**dP2** **Définition 1.3.4** *Soit  $a_i, i = 1, 2, \dots$  une suite des v.a. i.i.d., à distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$  ("interarrivées"), et soit  $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$  les temps de renouvellement. On appellera processus de Poisson homogène (en partant de  $N_0 = 0$ ) le processus qui compte le nombre d'arrivées pendant  $[0, t]$  :*

$$N_{[0,t]} = N_t = \max\{n \in \mathbb{N} : A_n \leq t\}$$

Rq : La densité de  $A_n$  est la densité  $\Gamma_{(n,\lambda)}(x)$ .

Il existe plusieurs objets d'intérêt associés à chaque processus de renouvellement :

1. l'âge courant  $Z_1(t) = t - A_{N_t}$
2. le temps résiduel courant  $Z_2(t) = A_{N_t+1} - t$
3. le temps total courant  $Z(t) = Z_1(t) + Z_2(t) = A_{N_t+1} - A_{N_t}$

**Exercice 1.3.3** *Soit  $N_\lambda(t)$  un processus de renouvellement de Poisson.*

a) *Quelle sont les probabilités  $P[Z_1(t) = t]$ , et  $P[Z_1(t) \in [s, t], \forall s \leq \infty$  ? Trouver la densité de  $Z_1(t)$ . Concluez que l'âge courant satisfait :*

$$F_{Z_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda} & \text{pour } x \leq t \text{ et} \\ F_{Z_1}(x) = 1 & \text{outrement} \end{cases}$$

b) *Montrer que le temps résiduel courant a une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$ .*

c) *Calculez l'espérance du temps total courant; et comparez la à l'espérance des temps entre les arrivées  $\lambda$ .*

Les deux définitions (1.3.1), (1.3.4), sont équivalentes : voir les notes de Belisle. L'idée de la démonstration est présentée dans les exercices suivantes :

**Exercice 1.3.4** *Soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus défini par la Définition 1.3.4. Pour tout  $t > 0$ , la variable aléatoire  $N_t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ , i.e.*

$$p_k(t) = \mathbb{P}\{N_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

**Demo :** a) Comme  $A_k$  est la somme de  $k$  variables exponentielles, elle a la densité Gamma  $\Gamma(\lambda, k)$  donnée par :  $f_{A_k}(t)dt = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \lambda dt$ . On a aussi :

$$f_{A_k}(t)dt = \mathbb{P}\{A_{k-1} \leq t, A_k \geq t, A_k \leq t + dt\} = \mathbb{P}\{A_{k-1} \leq t, A_k \geq t\} \lambda dt = \mathbb{P}\{N_t = k - 1\} \lambda dt$$

b) Calcul direct pour  $k = 0, 1, \dots$

**Exercice 1.3.5** Soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson unidimensionnel d'intensité  $\lambda > 0$ , défini par la Définition 1.3.1. Montrez que les variables aléatoires suivantes :  $a_1$ , qui représente le temps jusqu'à la première arrivée, et  $a_2$ , qui représente le temps entre les deux premières arrivées, sont indépendantes et exponentielles de paramètre  $\lambda$ . Outrement dit, pour tout  $t_1 > 0, t_2 > 0$ ,

$$\mathbb{P}\{a_1 > t_1, a_2 > t_2\} = e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda t_2}$$

**Exercice 1.3.6** La distribution exponentielle et l'indépendance des intervalles  $a_i$  entre les arrivées implique la propriété de Markov. Plus spécifiquement, montrez par exemple que :

$$P[N_{t+s} \geq k + 1 | N_t = k, N_{t-s_1} = k, \forall s, s_1 > 0]$$

Première méthode :

$$\begin{aligned} P[N_{t+s} \geq k + 1 | N_t = k, N_{t-s_1} = k] &= P[a_{k+1} \leq t + s - A_k | A_k \leq t - s_1, a_{k+1} > t - A_k] \\ &= \frac{P[t - A_k < a_{k+1} \leq t + s - A_k, A_k \leq t - s_1]}{P[A_k \leq t - s_1, a_{k+1} > t - A_k]} \\ &= \frac{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) P[t + s - x \geq a_{k+1} > t - x] dx}{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) P[a_{k+1} > t - x] dx} \\ &= \frac{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) (e^{-\lambda(t-x)} - e^{-\lambda(t+s-x)}) dx}{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) e^{-\lambda(t-x)} dx} = \frac{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) e^{-\lambda(t-x)} (1 - e^{-\lambda s}) dx}{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) e^{-\lambda(t-x)} dx} = 1 - e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

Rq : Pour d'autres distributions, cette miraculeuse simplification n'est pas vraie <sup>2</sup>.

Par conséquent, le processus de Poisson est le seul processus de comptage Markovien.

*Deuxième méthode (\*).* Pour démontrer des propriétés comme ci dessus, on utilise souvent la propriété "d'oubli de la durée de la dernière attente" de la loi exponentielle au temps  $t$  (voir Rappel ??).

Ici on a :

$$P[a_{k+1} \leq t + s - A_k | A_k \leq t - s_1, a_{k+1} > t - A_k] = P[a_1 \leq s | A_0 = 0] = 1 - e^{-\lambda s}$$

### 1.3.5 Le processus de Poisson comme limite des processus de Bernoulli

On peut aborder l'étude du processus de Poisson unidimensionnel en discretisant le temps : on partagera chaque unité de temps en  $n$  unités "infinitesimales" de longueur  $h = 1/n$ , et en ignorant la possibilité des arrivées doubles. Ça remplace le processus d'arrivées en temps

---

<sup>2</sup>La réponse dépendra de  $t$  et de  $s_1$  (on l'obtient en utilisant la formule  $\bar{F}_{a_i}(x) = e^{-\int_0^x h(y) dy}$  où  $h(y) = f_{a_i}(y)/\bar{F}_{a_i}(y)$  est le "taux de termination = hazard rate" de  $a_i$ ).

continu par un processus de Bernoulli (lancés d'une monnaie) en temps discret. En suite, en laissant  $n \rightarrow \infty \iff h \rightarrow 0$ , on arrive au processus de Poisson. Le fait que le nombre (binomial) d'arrivées des succès dans un processus de Bernoulli en temps discret converge vers processus de Poisson en temps continu est une conséquence de l'exercice suivant :

**Exercice 1.3.7** *Considérez un processus d'arrivées indépendantes dans des unités de temps de longueur  $h = 1/n$ , avec la probabilité d'une arrivee par unite de temps egale a  $\lambda$ .*

1. Montrez que la limite quand  $n \rightarrow \infty$  d'une distribution binomiale  $B(n, p)$  avec  $p = \frac{\lambda}{n}$  est la distribution de Poisson avec esperance  $\lambda$ .
2. Soit  $N_n^{(i)} i = 1, 2, \dots$  les nombres d'intervalles separant les arrivées consecutives. Montrez que les temps  $T_n^{(i)} = \frac{N_n^{(i)}}{n}$  entre les arrivées consecutives convergent vers des distributions exponentielles de paramètre  $\lambda$ , pour  $i = 1, 2$ .
3. Considérez un processus d'arrivées indépendantes, avec la probabilité d'une arrivee par unite de temps (ou "taux") egale a  $\lambda$ . Trouver la distribution jointe des nombres d'arrivées dans deux unités de temps consecutives, en subdivisant chaque unité en  $n$  periodes d'observation et en prenant  $n \rightarrow \infty$ .

### 1.3.6 Le processus de Poisson composé

**Définition 1.3.5** *Le processus de Poisson composé*

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \tag{1.9} \quad \boxed{\text{pc}}$$

est une somme des variables aléatoires *i.i.d.* (indépendantes et idéntiquement distribuées)  $Z_i$ , où  $N_t$  est un processus de Poisson, independant de  $Z_i$ .

Rqs : 1) Outrement dit, il s'agit des marches aléatoires avec increments qui arrivent après des temps exponentiels.

2) Si  $Z_i$  ont une distribution discrète  $\mathbf{p} = (p_i, i \in \mathbb{Z})$ , il s'agit simplement des marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}$ , mais **en temps continu**; si en plus  $p_i \neq 0$  ssi  $i$  est un voisin de l'origine, alors le processus (1.9) est une **marche aléatoire simple**.

In the next exercise we obtain formulas for the expectation, variance and cumulant generating functional of a compound Poisson process  $S_t$  (with bounded jumps) whose jumps' density is  $f(x)$ .

**Exercice 3.1** a) Show that  $\mathbb{E}S_1, \text{Var } S_1$  for a compound Poisson process are given by :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S_1 &= \lambda \mathbb{E}X_1 \\ \text{Var } S_1 &= \lambda \mathbb{E}(X_1)^2 \end{aligned}$$

b) Compute the fonction génératrice des moments  $\mathbb{E}e^{\theta S_t}$  compound Poisson process  $S_t$  (assuming bounded jumps) and show that  $c(\theta)$  is given by :

$$c(\theta) = \lambda(M_{X_1}(\theta) - 1) = \lambda \left( \int_0^\infty e^{\theta=x} f(x) dx - 1 \right) \tag{1.10}$$

**Solution 3.1** a) Conditioning on the number of jumps we find

$$\mathbb{E}S_1 = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^j}{j!} j \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_1 \mathbb{E}Po(1) = \lambda \int x f(x) dx$$

Similarly, the variance

$$\begin{aligned} \text{Var } S_1 &= \mathbb{E}(S_1)^2 - (\mathbb{E}S_1)^2 = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^j}{j!} \mathbb{E}(\sum_{i=1}^j X_i)^2 - (\lambda \mathbb{E}X_1)^2 \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^j}{j!} (j \mathbb{E}X_1^2 + j(j-1)(\mathbb{E}X_1)^2) - (\lambda \mathbb{E}X_1)^2 \\ &= \lambda \mathbb{E}X_1^2 + \lambda(\mathbb{E}X_1)^2 - \lambda(\mathbb{E}X_1)^2 = \lambda \mathbb{E}X_1^2 \end{aligned}$$

b) Let  $M_{X_1}(u) = \mathbb{E}e^{uX_1} = \int_0^{\infty} e^{ux} f(x) dx$  denote the moment generating function of one jump. Conditioning on the number of jumps we find

$\mathbb{E}e^{uS_t} = \mathbb{E}e^{u(\sum_{i=1}^{N_T} X_i)} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} (M_{X_1}(u))^j = e^{\lambda t (M_{X_1}(u) - 1)} = e^{\lambda t (\int_0^{\infty} (e^{ux} - 1) f(x) dx)}$ . Taking logarithms yields :

$$c(u) = \lambda (M_{X_1}(u) - 1)$$

**Exercice 1.3.8** Déterminer la fonction de covariance

$$\text{Cov} [X_t, X_{t+s}]$$

d'un processus de Poisson composé  $X_t, t \geq 0$  (qu'on utilise pour modéliser le montant total des sinistres).

**1.3.7 Conclusions**

En conclusion, le processus de Poisson homogène unidimensionnel de taux  $\lambda$  est un processus de comptage, où "l'avancé du compteur" se fait après des temps exponentielles de paramètre  $\lambda$ , et qui a plusieurs propriétés remarquables, comme :

- distribution exponentielle (donc "sans mémoire") de paramètre  $\lambda$  pour les intervalles  $a_i$  entre les arrivées
- la propriété de Markov
- $(X_t)_{t \geq 0}$  est homogène, c'est-à-dire les increments  $X_{[s,s+t]} = X_{s+t} - X_s$  ont une distribution indépendante du moment initial  $s$  :

$$\forall s, t > 0, \forall k \in \mathbb{N}, P [X_{s+t} - X_s = k] = P [X_t = k] \stackrel{not.}{=} p_k(t).$$

- $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus à accroissements indépendants (P.A.I. en abrégé), c'est-à-dire les v.a.  $X_{I_i}, i = 1, \dots, n$  sont indépendantes, si les intervalles  $I_i, i = 1, \dots, n$  sont disjoints. En particulier,

$$\forall s, t \geq 0 \text{ avec } s \leq t, X_t - X_s \text{ est indépendante de } X_u \text{ pour tout } u \leq s.$$

- $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Markov, et les probabilités de transition satisfont  $\mathbb{P}\{X_t = j | X_0 = i\} = \mathbb{P}\{X_t = j - i | X_0 = i\} = p_{j-i}(t)$ .

Exemple d'application du processus de Poisson : La pêche ! On note  $X_t$  le nombre de poissons pris par un pêcheur à la ligne dans l'intervalle de temps  $[0, t]$ . On fait les hypothèses suivantes :

(h1) il y a un très grand nombre de poissons, de façon à ce qu'une prise n'influe pas sur la suite de la pêche

(h2) l'appétit des poissons ne varie pas avec le temps.

- 
- Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  peut alors être considéré comme un processus de Poisson, car :
- $(X_t)_{t \geq 0}$  est bien un processus de comptage (il est assez clair qu'il est très peu probable de pêcher plusieurs poissons au même instant)
  - $(X_t)_{t \geq 0}$  est homogène d'après (h2)
  - $(X_t)_{t \geq 0}$  est un P.A.I. d'après (h1).

### 1.3.8 Exercices

1. a) Montrez que si les variables  $\{a_i, i = 1, \dots, n\}$  ont des distributions exponentielles indépendantes à paramètres  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ , alors la variable  $a = \min\{a_i, i = 1, \dots, n\}$  a une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda = \sum_i \lambda_i$ . b) Trouvez la distribution de la variable  $I$  qui donne l'index qui réalise le minimum. c) Qu'est-ce qu'on obtient en superposant  $n$  processus de Poisson à paramètres  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  ?
2. Soit  $X_t$  un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , les points duquel sont coloriés en  $K$  couleurs, indépendamment avec des probabilités  $p_1, \dots, p_K$ , donnant naissance ainsi à  $K$  processus de comptage  $X_1(t), \dots, X_K(t)$ . Montrez que  $X_1(t), \dots, X_K(t)$  sont des processus de Poisson indépendants, avec taux  $\lambda p_1, \dots, \lambda p_K$ .
3. Des voitures passent sur une route selon un processus de Poisson de param.  $\lambda = 1/mn$ .
  - a. Si 5% des voitures sont des Renault, montrer que le passage de ces voitures suit un processus de Poisson de param. 0.05.
  - b. Sachant que 10 Renault sont passées en une heure, quelle est l'espérance du nombre total de voitures passées durant cette heure ?
  - c. Si 50 voitures sont passées en une heure, quelle est la probabilité que cinq d'entre elles soient des Renault ?
4. Un scribe doit copier  $n$  pages d'un manuscrit. Comme il est fatigué, il commet un nombre total d'erreurs distribuées à distribution de Poisson  $Po(\lambda)$ , qui peuvent se trouver sur n'importe quelle page, avec des probabilités égales.
  - a) Quelle est la probabilité que la première page ne contient pas des erreurs ?
  - b) Quelle est l'espérance du nombre des pages contenant des erreurs ?
5. (a) Quelle est la probabilité qu'un cercle de rayon  $r$  autour de l'origine ne contient aucun point d'un processus de Poisson deux-dimensionnel de taux  $\lambda$  ? Autrement dit, calculez la fonction de "survie" ou de "distribution complémentaire"  $\bar{F}_D(r) = \mathbb{P}\{D > r\}$ , où  $D$  est la distance de l'origine jusqu'au point le plus proche d'un processus de Poisson deux-dimensionnel.
  - (b) Calculez la fonction de densité  $f_D(r)$ .
  - (c) Calculez le mode de la fonction de densité.
  - (d) Calculez par parties l'intégrale  $\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$  et montrez que l'espérance est  $\mathbb{E}D = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$  (l'intégrale  $\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \sqrt{\pi/2} = \int_0^\infty \int_{r^2/2}^\infty e^{-s} ds dr$  peut-être calculé par le théorème de Fubini)
6. **Le temps jusqu'à la première arrivée non-découragée.** Soit  $N$  une variable géométrique, à distribution  $\mathbb{P}\{N = k\} = (1-p)p^{k-1}, k = 1, \dots$ , soit  $T_i, i = 1, 2, \dots$  des variables aléatoires i.i.d. exponentielles à paramètre  $c$ , et soit  $W = \sum_{i=1}^N T_i$  "le temps jusqu'à la première arrivée non-découragée".
  - (a) Trouvez la fonction génératrice des moments  $m_{T_1}(s) = \mathbb{E}e^{sT_1}$  de  $T_1$ ,

(b) Trouvez la fonction génératrice des moments  $m_W$  de  $W = \sum_{i=1}^N T_i$ .

(c) Quelle est la distribution de la variable aléatoire  $W$  ?

7. **Ross, Exercice 63** Une société d'assurance paie pour les déclarations de sinistres dans le cadre des contrats d'assurance vie selon un processus de Poisson de taux  $\lambda = 5$  par semaine. Si le montant payé pour chaque contrat suit une distribution exponentielle de moyenne 2000, quelles sont la moyenne et la variance des montants payés par la société d'assurances dans un intervalle de quatre semaines ?
8. **Ross, Exercice 66** L'arrivée des clients à un distributeur de billets suit un processus de Poisson de taux 12 per hour. Le montant retiré à chaque transaction est une variable aléatoire de moyenne 30 et écart-type 50 (un retrait négatif signifie que de l'argent a été déposé). La machine est utilisée 15 heures par jour. Approximez la probabilité que le montant total retiré par jour soit inférieur à 6000.
9. Belisle, TD4

**Solutions :**

1. c) Il s'agit d'un processus de comptage à interarrivées exponentielles, donc d'un processus de Poisson, a paramètre  $\lambda = \sum_i \lambda_i$ .
2. a) Les nombres des erreurs  $N_i$  sur chaque page  $i$  sont des variable de Poisson "coloriée" avec probabilité  $1/n$ , et donc  $N_i$  sont des variables de Poisson de taux  $\lambda/n$  (independantes). La probabilité que  $N_i \geq 1$  est  $1 - e^{-\lambda/n}$ .
- b) En decomposant la variable  $N$  comme somme des indicatrices, l'espérance de  $N = \sum_{i=1}^n N_i$  est  $n(1 - e^{-\lambda/n})$  (en fait,  $N$  a une distribution binomiale, car  $N_i$  sont independants, par le théorème de coloriage des variables Poisson).
3. a)  $\bar{F}(r) = e^{-\lambda\pi r^2}$
- b)  $f_D(r) = 2\lambda\pi r e^{-\lambda\pi r^2}$ . c) Le mode de la densité satisfait  $(1 - 2\lambda\pi r^2)e^{-\lambda r^2} = 0$ , donc  $r = \frac{1}{\sqrt{2\lambda\pi}}$ .
- d)  $ED = 2\lambda \int_0^\infty r^2 e^{-\lambda\pi r^2}$
- En posant  $\lambda\pi = \frac{1}{2\sigma^2} \iff \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\lambda\pi}}$ , on s'aperçoit que notre integrale est de la forme

$$\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma^3}{2}$$

car elle represente une demi de la variance de la distribution Gaussienne. (On peut aussi retrouver ce resultat en utilisant l'integration par parties, et en calculant l'integrale  $\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \sqrt{\pi/2} = \int_0^\infty \int_{r^2/2}^\infty e^{-s} ds dr$  par le théorème de Fubini.)

On trouve finalement que l'espérance est

$$\mathbb{E}D = 2\lambda \frac{\sqrt{2\pi}}{4\lambda\sqrt{2\lambda\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$$

- 5 (a)  $m_{T_1}(s) = \frac{c}{c-s} = \frac{1}{1-s/c}$
- (b)  $m_W(s) = \sum_{n=1}^\infty (1-p)p^{n-1} \left(\frac{c}{c-s}\right)^n = (1-p) \frac{c}{c-s} \frac{1}{1-p\frac{c}{c-s}} = \frac{(1-p)c}{(1-p)c-s}$
- (c)  $W$  est donc exponentielle à paramètre  $(1-p)c$ , qui est précisément le taux des points acceptés.

## 1.4 Les semigroupes de Markov homogènes ; le calcul de l'exponentielle des operateurs

**Théorème 1.4.1** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus Markovien homogène, à temps continu  $t \in \mathbb{R}_+$ . Alors, les operateurs de transition  $(P_t)_{t \geq 0}$  forment un semi-groupe stochastique, c'est-à-dire :

1.  $P_0 = I_d$
2.  $\forall s, t \geq 0$ ,

$$P_{t+s} = P_t P_s$$

(équations de Chapman-Kolmogorov)

3.  $\forall t \geq 0$ ,  $P_t$  est une matrice stochastique (i.e.  $\forall i, j \in I$ ,  $p_{ij}(t) \geq 0$  et  $\forall i \in I$ ,  $\sum_{j \in I} p_{ij}(t) = 1$ ).

4.

$$\begin{cases} P_t' = P_t G & (\text{équation Kolmogorov avant}) \\ P_t' = G P_t & (\text{équation Kolmogorov arrière ou rétrograde}) \end{cases}$$

où  $G$  est le générateur.

5. Pour tout  $t \geq 0$ ,

$$P_t = e^{tG},$$

et la transformée de Laplace/résolvente est  $\int_0^\infty e^{-st} P_t dt = (sI_d - G)^{-1}$ , pour tout  $s > 0$ .

tc

**Rémarques :** 1) Le cas le plus simple est celui des processus de sauts, i.e. avec des espaces états  $E$  finis ou dénombrables, dans quel cas  $P_t, G$  sont des matrices. Nous traiterons surtout ce cas (si possible, car les processus de Levy, qui sont parmi les outils de modélisation les plus utiles, font défaut !)

2) Dans le cas dénombrable, il faudra ajouter des conditions qui assurent que les sommes, intégrales, etc., soient bien définis. Une telle condition est  $\sup_{i \in I} (-G_{ii}) < +\infty$ .

3) Comme les matrices  $P_t = e^{tG}$  doivent être stochastiques pour chaque  $t$ , il découle que la partie réelle des valeurs propres de  $G$  doit être nonpositive.

4) Pour le cas des espaces d'états finies, les équations différentielles de Kolmogorov pour  $P_t$  calculent la fonction exponentielle matrice  $e^{tG}$ , et donc admettent toujours des solutions explicites en fonction des valeurs/vecteurs propres de  $G$ . En plus, la fonction exponentielle de matrice est mise en oeuvre numériquement dans toutes les logicielles modernes. Par contre, pour les espace d'états dénombrables, le calcul explicite de  $P_t$  devient difficile, même pour le cas le plus simple de la file M/M/1<sup>3</sup>. Ils restent toujours les approches numériques, et il y en a beaucoup, comme pour témoigner sur la difficulté du problème.

5) Pendant que le calcul du semigroupe suppose la connaissance du spectrum, celui de la resolvente ne le demande pas. Par conséquent, une méthode possible pour le calcul du semigroupe est de commencer par la resolvente, et ensuite l'inverser numériquement (ou analytiquement parfois, par exemple en utilisant la decomposition en fractions simples, dans le cas rationnel).

**Exercice 1.4.1** Calculer la resolvente d'un bloque de Jordan  $G$  de taille  $n \times n$ , ainsi que l'exponentielle  $e^{tG}$ , pour  $n = 2$ .

<sup>3</sup>Dans ce cas, la transformé de Laplace de  $P_t$  est explicite, et on peut l'inverser, en arrivant a des combinaisons des fonctions Bessel.

### 1.4.1 Résolution des équations Chapman-Kolmogorov pour le processus de Markov à deux états

On suppose que  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans

$$E = \{e_1, e_2\}, \text{ de générateur } G = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha, \beta \geq 0.$$

On est bien dans les conditions d'application du théorème 1-2 ( $E$  est fini). La chaîne étant simple, on a deux méthodes pour la résolution des équations de Kolmogorov.

• Première méthode : on calcule  $e^{tG}$  pour tout  $t \geq 0$ . Pour cela, on va essayer de diagonaliser  $G$ . Le polynôme caractéristique  $P_G$  de  $G$  est donné par :

$$P_G(\lambda) = \det(G - \lambda I_2) = \lambda(\alpha + \beta + \lambda).$$

→ 1<sup>er</sup> cas :  $\alpha = \beta = 0$

On a  $G = 0$  donc  $e^{tG} = I_2$  pour tout  $t \geq 0$ .

→ 2<sup>ième</sup> cas :  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

La matrice  $G$  admet 2 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.

Les valeurs propres sont 0 (avec  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  comme vecteur propre associé) et  $-(\alpha + \beta)$

(avec  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$  pour vecteur propre associé).

En posant  $P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$ , on a  $P^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et

$$G = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha + \beta) \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$P_t = e^{tG} = P e^{tD} P^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha e^{-(\alpha + \beta)t} & \alpha - \alpha e^{-(\alpha + \beta)t} \\ \beta - \beta e^{-(\alpha + \beta)t} & \alpha + \beta e^{-(\alpha + \beta)t} \end{pmatrix} \text{ car } e^{tD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(\alpha + \beta)t} \end{pmatrix}$$

(on peut remarquer que  $P_t$  est bien une matrice stochastique).

• Deuxième méthode (toujours pour  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ) :

$$\text{on a : } P_t = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } P'_t = P_t G \text{ d'où : } \begin{cases} p'_{11}(t) = -\alpha p_{11}(t) + \beta p_{12}(t) & (1) \\ p'_{12}(t) = \alpha p_{11}(t) - \beta p_{12}(t) & (2) \\ p'_{21}(t) = -\alpha p_{21}(t) + \beta p_{22}(t) & (3) \\ p'_{22}(t) = \alpha p_{21}(t) - \beta p_{22}(t) & (4) \end{cases}$$

De plus, comme  $P_t$  est une matrice stochastique, on a :

$$\begin{cases} p_{11}(t) + p_{12}(t) = 1 & (5) \\ p_{21}(t) + p_{22}(t) = 1 & (6) \end{cases}$$

Les équations (1) et (5) donnent :  $p'_{11}(t) = -\alpha p_{11}(t) + \beta(1 - p_{11}(t))$  i.e.  
 $p'_{11}(t) + (\alpha + \beta)p_{11}(t) = \beta$  donc  $p_{11}(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + C e^{-(\alpha + \beta)t}$  avec  $C \in \mathbb{R}$ .

Or, on sait que  $p_{11}(0) = 1$  donc  $C = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$  d'où :  $p_{11}(t) = \frac{1}{\alpha + \beta} (\beta + \alpha e^{-(\alpha+\beta)t})$

Avec (5), on a alors :  $p_{12}(t) = \frac{1}{\alpha + \beta} (\alpha - \alpha e^{-(\alpha+\beta)t})$

En procédant de même, les équations (3) et (6) donnent :

$$p'_{21}(t) = -\alpha p_{21}(t) + \beta(1 - p_{21}(t)) \text{ i.e. } p'_{21}(t) + (\alpha + \beta)p_{21}(t) = \beta$$

d'où  $p_{21}(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + C' e^{-(\alpha+\beta)t}$  avec  $C' \in \mathbb{R}$ .

Comme  $p_{21}(0) = 0$  on obtient  $C' = -\frac{\beta}{\alpha + \beta}$  d'où :  $p_{21}(t) = \frac{1}{\alpha + \beta} (\beta - \beta e^{-(\alpha+\beta)t})$

Et avec (6), on a :  $p_{22}(t) = \frac{1}{\alpha + \beta} (\alpha + \beta e^{-(\alpha+\beta)t})$  et on retrouve  $P_t$ .

## 1.4.2 Résolution des équations de Chapman-Kolmogorov pour le processus de Poisson ; le calcul de l'exponentielle des matrices triangulaires (\*)

Considérons le processus de Poisson Markov homogène  $(X_t)_{t \geq 0}$  d'intensité  $\lambda \geq 0$ , de

$$\text{générateur } G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Fixons l'état initial  $i = 0$  et posons  $P_{0,j}(t) = p_j(t)$ . Les équations de Kolmogorov avant  $P' = PG$  pour la première ligne sont

$$p'_j(t) = \sum_{k \neq j} p_k(t) g_{k,j} - p_j(t) \sum_{k \neq j} g_{j,k}$$

**Note :** En écrivant ces équations comme  $p_j(t+h) = \sum_{k \neq j} p_k(t) g_{k,j} h + p_j(t)(1 - h \sum_{k \neq j} g_{j,k})$  on voit que c'est encore des équations de conditionnement.

Pour le processus de Poisson, ces équations sont :

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) \\ p'_j(t) = \lambda(p_{j-1}(t) - p_j(t)) \text{ si } j \neq 0 \end{cases}$$

On sait aussi que  $p_j(0) = 0$  si  $j \neq 0$  et  $p_0(0) = 1$ .

On a donc un système différentiel pour déterminer les  $p_j$ , qui peut être résolue **recursivement** :

→ Pour  $j = 0$  :

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) \\ p_0(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{p_0(t) = e^{-\lambda t}}$$

→ Pour  $j = 1$  :

$$\begin{cases} p'_1(t) = \lambda(p_0(t) - p_1(t)) \\ p_1(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p'_1(t) + \lambda p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} \\ p_1(0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$t \mapsto \lambda t e^{-\lambda t}$  est une solution particulière de (\*) et  $t \mapsto C e^{-\lambda t}$  (où  $C \in \mathbb{R}$ ) est la solution générale de  $p_1'(t) + \lambda p_1(t) = 0$  donc  $t \mapsto (C + \lambda t) e^{-\lambda t}$  est la solution générale de (\*). De plus, on doit avoir  $p_1(0) = 0$  donc  $C = 0$  et on a  $p_1(t) = e^{-\lambda t} \lambda t$ .

→ Raisonnons alors par récurrence. Supposons que pour  $j$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $p_j(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$  et déterminons  $p_{j+1}$ . On a :

$$\begin{cases} p_{j+1}'(t) = \lambda(p_j(t) - p_{j+1}(t)) \\ p_{j+1}(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{j+1}'(t) + \lambda p_{j+1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{j+1} t^j}{j!} \\ p_{j+1}(0) = 0 \end{cases} \quad (**)$$

$t \mapsto K e^{-\lambda t}$  (où  $K \in \mathbb{R}$ ) est la solution générale de  $p_{j+1}'(t) + \lambda p_{j+1}(t) = 0$  et  $t \mapsto \frac{\lambda^{j+1} t^{j+1}}{(j+1)!} e^{-\lambda t}$  est une solution particulière de (\*\*). Or  $p_{j+1}(0) = 0$  d'où  $K = 0$  et on obtient :  $p_{j+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{j+1}}{(j+1)!} e^{-\lambda t}$  ce qui recupère la distribution Poisson (en éclaircissant la provenance de la terminologie "processus de Poisson").

Nous venons de redémontrer que pour un processus de Poisson  $(X_t)_{t \geq 0}$  d'intensité  $\lambda > 0$ , la variable aléatoire  $X_t$  suit pour tout  $t > 0$  une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ .

**Exercice 1.4.2** Recalculez les probabilités de transition du processus de Poisson par la méthode des fonctions génératrices.

**Remarque :** 1) La solution recursive ci-dessus s'appuie sur la structure triangulaire du générateur, et peut-être aussi implémenté pour tout processus de "Poisson composé de naissance pure" (permettant la naissance de jumeaux, etc).

Le calcul peut-être simplifié en commençant par la substitution  $p_k(t) = e^{-\lambda_k t} P_k(t)$ , où  $\lambda_k$  est le taux total de naissance en état  $k$ . Il s'avère que  $P_j(t)$  sont des polynômes, faciles a obtenir recursivement.

**Exercice 1.4.3** Recalculez les probabilités de transition du processus de Poisson par cette substitution.

**Solution :** Les équations de Kolmogorov pour le processus de Poisson deviennent après la substitution :

$$\begin{cases} P_0'(t) = 0, P_0(0) = 1 \\ P_j'(t) = \lambda P_{j-1}(t), P_j(0) = 0 \text{ si } j \neq 0 \end{cases}$$

Il suit que  $P_0(t) = 1$ , et integrations succesives donnent  $P_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}$ .

### 1.4.3 Exercices

1. Soit  $X = (X_t; t \geq 0)$  une chaîne de Markov en temps continu sur l'ensemble  $S = \{1, 2, 3\}$ . Supposons que la matrice infinitésimale (de taux de transitions) de  $X$  est donnée par

$$G = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- 
- (a) Donnez la formule exacte, ainsi qu'une approximation des probabilités de transition infinitésimales  $\mathbb{P}_i\{X_{dt} = j\}$  de la chaîne.
- (b) Quelles sont **approximativement** les probabilités de transition de la chaîne discrétisée associée au temps .1 ?
- (c) Quelles sont les probabilités de transition de la chaîne discrétisée associée aux temps de saut ?
- (d) Trouvez la distribution stationnaire de ce processus.
- (e) Quelle est la loi conditionnelle de  $T_3 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 3 | X_0 = 3\}$ , en sachant que  $X_0 = 3$  ?
- (f) Posant  $T^{(3)} = \inf\{t > T_3 : X_t = 3\}$ , donnez un système des équations pour  $x_1 = \mathbb{E}[T^{(3)} | X_0 = 1]$  et  $x_2 = \mathbb{E}[T^{(3)} | X_0 = 2]$ . Résolvez les équations.
- (g) Calculez  $\mathbb{E}[T^{(3)} | X_0 = 3]$
- (h) Calculez, pour le processus absorbé en 3,  $P_{i,j}(t) = \mathbb{P}[t \leq T^{(3)}, X(t) = j | X_0 = i], i = 1, 2$ .
- (i) Calculez  $\bar{P}_1(t) = \mathbb{P}[T^{(3)} \geq t | X_0 = 1]$  et  $\bar{P}_2(t) = \mathbb{P}[T^{(3)} \geq t | X_0 = 2]$  à partir des équations de Chapman-Kolmogorov et à partir de la réponse précédente et vérifiez que les réponses coïncident. Vérifiez que  $x_i = \int_0^\infty \bar{P}_i(t) dt, i = 1, 2$ .
- (j) Soit  $\hat{X}_i, i \in \mathbb{N}$  la chaîne sous-jacente. Calculez les distributions de  $T_{3,2} = \inf\{t \geq 0 : X_t = 2 | \hat{X}_0 = 3, \hat{X}_1 = 2\}, T_{3,1} = \inf\{t \geq 0 : X_t = 1 | \hat{X}_0 = 3, \hat{X}_1 = 1\}, T_{i,j} = \inf\{t \geq 0 : X_t = j | \hat{X}_0 = i, \hat{X}_1 = j\}$ .
2. a) Obtenez les équations de Chapman-Kolmogorov pour un processus des sauts Markovien, en conditionnant sur le moment de la première transition.
- b) Obtenez les équations de Chapman-Kolmogorov, en conditionnant sur la position au moment  $t + h$ , pour  $h$  très petit.
- Ind* : Commencez par le cas du processus de Poisson.

**Solutions :**

1. (a) Les probabilités de transition infinitésimales

$$P(dt) = e^{dt G} \approx I + dt G = \begin{pmatrix} 1 - 7dt & dt & 6dt \\ 2dt & 1 - 6dt & 4dt \\ dt & 2dt & 1 - 3dt \end{pmatrix}$$

- (b)

$$P(.1) \approx \begin{pmatrix} .3 & .1 & .6 \\ .2 & .4 & .4 \\ .1 & .2 & .7 \end{pmatrix}$$

- (c) Les probabilités de transition au moment du premier saut sont :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/7 & 6/7 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

(d)  $\pi = (\frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{8}{13})$

(e) La loi conditionnelle de  $T_3 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 3\}$ , en sachant que  $X_0 = 3$ , est la loi exponentielle à paramètre 3 (et moyenne 1/3).

(f) En conditionnant sur le premier saut, nous trouvons :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{7} + \frac{1}{7}x_2 \\ x_2 &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

donc le même système. De lors,  $x_1 = \frac{7}{40}, x_2 = \frac{9}{40}$ .

(g) Conditionnant au moment du premier saut

$$\mathbb{E}[T^{(3)}|X_0 = 3] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{7}{40} + \frac{2}{3}\frac{9}{40} = \frac{1}{3}(1 + \frac{7+18}{40}) = \frac{1}{3}\frac{13}{8} = \frac{13}{24}$$

(h) Soit

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le générateur du processus absorbé en 3, et soit

$$\tilde{\tilde{G}} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

le générateur du processus observé seulement en 1, 2. Diagonalisons  $\tilde{\tilde{G}} = L^{-1}Diag(\lambda_i)L$ , où les lignes de la matrice  $L$  sont les vecteurs propres à gauche. Ici, les valeurs propres, données par  $\lambda^2 + 13\lambda + 40 = (\lambda + 8)(\lambda + 5) = 0$  sont  $-8$  et  $-5$  avec vecteurs propres  $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Finalement,

$$\tilde{\tilde{P}}(t) = L^{-1}Diag(e^{\lambda_i t})L$$

(i) Les probabilités demandées satisfont  $\bar{P}_i(t) = 1 - P_{i,3}(t), i = 1, 3$ , où  $P_{i,3}(t)$  sont les probabilités de transition du processus absorbé avec générateur

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A. Par la question précédente, :

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} = L^{-1}Diag(e^{\lambda_i t})L\mathbf{1},$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-8t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-8t} \\ 2e^{-5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2e^{-5t}/3 + e^{-8t} \\ 4e^{-5t}/3 - e^{-8t} \end{pmatrix}$$

et  $x_1 = \frac{2}{3} \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \frac{1}{8} = \frac{7}{40}$ ,  $x_2 = \frac{9}{40}$ .

B. Posons  $p_i(t) = \bar{P}_{i,3}(t) = 1 - P_{i,3}(t)$  pour les probabilités de non-absorption dans la colonne fixe 3. On a  $p_1(0) = p_2(0) = 1$ . Comme  $P_{3,3}(t) = 1$ , l'équation Chapman-Kolmogorov  $P' = GP$  donne pour la troisième colonne :

$$\begin{aligned}(1 - p_1(t))' &= -7(1 - p_1(t)) + (1 - p_2(t)) + 6 \\ (1 - p_2(t))' &= 2(1 - p_1(t)) + -6(1 - p_2(t)) + 4\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}p_1(t)' &= -7p_1(t) + p_2(t), p_1(0) = 1 \\ p_2(t)' &= 2p_1(t) - 6p_2(t), p_2(0) = 1\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = e^{t\tilde{G}} \mathbf{1}$$

où  $\tilde{G}$  denote le générateur avec la colonne et ligne d'absorption 3 enlevée.

2. Soit  $j \in \mathbb{N}$ , on veut calculer  $p_j(t) = P[X_t = j]$ . Dans ce qui suit on conviendra de noter  $p_{-1}(t) = 0$ . On a pour tout  $h > 0$  :

$$\begin{aligned}p_j(t+h) &= P[X_{t+h} = j] = \sum_{i=0}^j P[X_{t+h} = j \text{ et } X_t = i] \text{ car } X_t \leq X_{t+h} \text{ d'après (1)} \\ &= \sum_{i=0}^j P([X_{t+h} - X_t = j - i] \cap [X_t = i]) \\ &= \sum_{i=0}^j P[X_{t+h} - X_t = j - i] P[X_t = i] \text{ car } (X_t)_{t \geq 0} \text{ est un P.A.I.} \\ &= \sum_{i=0}^j p_{j-i}(h) p_i(t) \text{ d'après (2)} \\ &= (1 - \lambda h) p_j(t) + \lambda h p_{j-1}(t) + h \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{p_j(t+h) - p_j(t)}{h} = \lambda(p_{j-1}(t) - p_j(t)) + \varepsilon(h)$$

En passant à la limite ( $h \rightarrow 0$ ), on obtient alors :

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ p_j'(t) = \lambda(p_{j-1}(t) - p_j(t)) \text{ si } j \neq 0 \end{cases}$$

## 1.5 Problèmes de premier passage/Dirichlet pour les chaînes et processus de Markov

### 1.5.1 Les chaînes/processus de Markov absorbants

**Définition 1.5.1** Une chaîne/processus de sauts s'appellent absorbants ssi tous leurs états récurrents sont absorbants, i.e.  $P_{i,j} = \delta_{i,j}$  au cas discret, et  $G_{i,j} = 0$  pour chaque état  $i$  récurrent.

**Motivation :** 1) Parfois, on s'intéresse à une chaîne/processus jusqu'au moment quand elle sort d'un sous-ensemble de son espace d'états .

Considerons par exemple une chaîne de Markov  $X_k, k \in \mathbb{N}$ , récurrente, de matrice de transition  $P$ , qui nous intéresse seulement dans un ensemble d'états  $\mathcal{T}$ . Soit  $\partial$  l'ensemble des autres états, et soit  $E = \mathcal{T} \cup \partial = \{1, 2, \dots, I, C1, C2, \dots\}$  l'espace d'états total. En modifiant les probabilités de transition tq  $P_{i,j} = \delta_{i,j}$ , for  $i, j \in \partial$ , on obtient une chaîne absorbante  $\tilde{P}$  avec états transitoires  $\mathcal{T}$ , états absorbants  $\partial = \{C1, C2, \dots\}$ , et matrice de transition

$$\tilde{P} = \left\| \begin{array}{c|c} Q & P^{(\mathcal{T}, \partial)} \\ \hline 0 & I \end{array} \right\|$$

**Définition 1.5.2** Soit  $X_t$  un processus/chaîne absorbants, soit  $\partial$  l'ensemble des états absorbants, et soit  $\mathcal{T}$  le sous-ensemble (complémentaire) d'états transitoires. On appellera **temps de premier passage/sortie/absorbtion**  $\tau$  le premier temps quand le processus  $X_t$  n'est plus en  $\mathcal{T}$  (et donc est arrivé en  $\partial$ )

$$\tau = \inf\{t : X_t \notin \mathcal{T}\} \in \{1, 2, \dots\}$$

**Remarque 1.5.1** Dans le cas discret,  $\tau$  est précisément le nombre de fois en  $\mathcal{T}$ , en incluant la position initiale.

On s'intéressera dans plusieurs problèmes concernant le temps  $\tau$  du premier passage dans l'ensemble des états l'absorbants  $\partial$ , et les position après absorbtion  $X_\tau \in \partial$  immédiatement avant absorbtion  $X_{\tau-} \in \mathcal{T}$ . Plus précisément, nous étudierons :

1. Les espérances des temps d'absorbtion

$$\mathbf{t} = (t_i = \mathbb{E}_i \tau, i \in \mathcal{T}).$$

2. Les probabilités d'absorbtion dans les différents états absorbants

$$\hat{p}_{i,j} = P_i[X_\tau = j], i \in \mathcal{T}, j \in \partial$$

(s'il y en a plusieurs).

3. La distribution de  $\tau$  (especialement les moments et la transformée de Laplace qui sont plus faciles à trouver).

**Sommaire :** Nous considerons en suite plusieurs problèmes concernant l'absorbtion des processus et chaînes de Markov de transition  $P$ . Brèvement, nous allons voir que les problèmes de Dirichlet (sauf l'étude de la distribution de  $\tau$ ) ramènent aux systèmes linéaires qui impliquent l'opérateur  $G$ . La méthode pour obtenir ces équations est toujours le "conditionnement sur le premier pas".

Par exemple, les systèmes associés aux espérances des temps d'absorption et aux probabilités d'absorption dans un sous ensemble  $A \subset \partial$  sont respectivement :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{t} + \mathbf{1} &= 0 \\ t_i &= 0, \quad \forall i \in \partial \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\mathbf{G}\mathbf{p} = 0 \tag{1.12}$$

$$p_i = I_A(i), \quad \forall i \in \partial \tag{1.13}$$

Nous verrons que les mêmes équations sont valables pour les chaînes, après avoir associé à chaque chaîne de matrice de transition  $P$  une matrice génératrice

$$G = P - I.$$

**Définition 1.5.3** Une matrice  $G$  satisfaisant

1.  $g_{ij} \geq 0$  si  $i \neq j$ ,  $g_{ii} \leq 0$  et
2.  $g_{i,i} + \sum_{j \neq i} g_{i,j} = 0$

sera appelée **matrice génératrice** ou **générateur** de la chaîne de Markov.

Une matrice  $G$  satisfaisant 1. et  $g_{i,i} + \sum_{j \neq i} g_{i,j} \leq 0$  sera appelée **sous-générateur**.

**Exercice 1.5.1** Pour une matrice (sous)stochastique arbitraire, la matrice  $G = P - I$  est une matrice (sous) génératrice.

**Remarque 1.5.2** Il est facile de vérifier que la matrice  $G = P - I$  a les mêmes vecteurs propres comme  $P$ , et que ses valeurs propres sont translatées par  $-1$ .

Les systèmes de Dirichlet –voir ci dessus– concernant les chaînes de Markov en temps discret peuvent être formulées également en termes de  $P$  ou de  $G$ , mais l'avantage de la dernière formulation est qu'elle généralise pour le temps continu.

## 1.5.2 Les espérances des temps d'atteinte

t:EN

**Théorème 1.5.1** a) Les espérances des temps d'absorption à partir des états transitoires  $\mathbf{n}$  satisfont le système d'absorption

$$\mathbf{n} = \mathbf{Q}\mathbf{n} + \mathbf{1}$$

b) Elles sont données explicitement par :

$$\mathbf{n} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}$$

c) Avec une distribution initiale  $\beta$ , l'espérance  $\bar{n} = \mathbb{E}_\beta N$  du temps d'absorption est :

$$\bar{n} = \mathbb{E}N = \beta(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}$$

**Démonstration :** a) est équivalent au système

$$n_i = \sum_{j \in \mathcal{E}} P_{i,j}(n_j + 1) = \sum_{j \in \mathcal{T}} Q_{i,j}(n_j + 1) + \sum_{j \notin \mathcal{T}} P_{i,j}^{(\mathcal{T}, \partial)} * 1,$$

obtenu par un conditionnement sur le premier pas.

b) est simplement la solution du système donné en a).

**e:N** **Exemple 1.5.1** Soit une chaîne sur  $\{1, 2\}$  définie par la matrice de transition  $\left( \begin{array}{c|c} p & 1-p \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$

avec  $X_0 = 1$  (i.e., la loi initiale est  $\mathbf{c}_0 = (1, 0)$ ).

Soit  $N$  le nombre des transitions jusqu'à l'absorption, en partant du temps 0

a) Quelle est la valeur de  $N$  si  $X_0 = X_1 \dots X_{k-1} = 1$  et  $X_k = 2$ ? Quel est l'espace d'états de  $N$ ?

b) Trouvez l'espérance  $n = \mathbb{E}N$  du nombre des pas  $N$  jusqu'à l'absorption, en partant du premier état (i.e.  $X_0 = 1, \beta = (1, 0)$ ).

**Remarque 1.5.3** Comme toujours, le système et la méthode donnée au point a) sont plus importants que la formule explicite donnée en b); en effet, l'inversion des matrices n'est pas forcément la meilleure solution pour résoudre un système. Aussi, il existe beaucoup de variations de ce problème, ramenant à une diversité des formules explicites, pendant que le principe pour obtenir les systèmes est toujours le même : **conditionnement sur le premier pas**. Ce problème fournit donc une illustration du fait que conceptuellement et numériquement, les systèmes d'équations sont plus utiles que leurs solutions explicites!

**Dir1** **Corollaire 1.5.1** Soit  $\tilde{\mathbf{G}} := \mathbf{Q} - \mathbf{I}$  l'opérateur restreint aux états transitoires. Le vecteur  $\mathbf{t}$  des espérances des temps d'absorption à partir des tous les états transitoires satisfait le système

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{t} + \mathbf{1} &= 0 \\ t_i &= 0, \quad \forall i \in \partial \end{aligned} \tag{1.14}$$

**Remarque 1.5.4** Ceci est notre premier exemple de "système de Dirichlet" faisant intervenir l'opérateur  $G$ . Formulé comme ci-dessus, il est valable aussi en temps continu (et en fait pour tous les processus de Markov).

**Remarque 1.5.5** La matrice  $\tilde{\mathbf{G}}$  a seulement ses valeurs propres avec partie réelle négative, étant par conséquent inversible.

**Remarque 1.5.6** La formule explicite

$$\mathbf{n} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1} = \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{Q})^i \right] \mathbf{1}$$

a une interprétation probabiliste importante. Remarquons d'abord la décomposition en indicateurs

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} I_k$$

où  $I_k$  est l'indicateur d'être dans la partie transitoire au temps  $k$ . Donc,  $n_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_i I_k$ . Remarquons aussi la décomposition en indicateurs  $I_k = \sum_{j \in \mathcal{T}} I_{k,j}$ , où  $I_{k,j}$  est l'indicateur d'être en position  $j \in \mathcal{T}$  au temps  $k$ . Ces décompositions nous ramènent finalement à

$$n_i = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathcal{T}} \mathbb{E}_i I_{k,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathcal{T}} (\mathbf{Q})_{i,j}^k$$

### 1.5.3 Les probabilités d'absorbtion

**Définition 1.5.4** Soit  $X_t$  un processus, soit  $E$  un sous-ensemble arbitraire de l'espace d'états, et soit  $\partial$  son complémentaire. On appellera **processus absorbé en l'ensemble d'arrêt  $\partial$**  le processus  $\tilde{X}_t$  obtenu à partir de  $X_t$  en modifiant tous les états en  $\partial$  en sorte qu'ils soient absorbants.

Dans le prochaine exemple, nous utiliserons plusieurs ensembles d'arrêt.

**Exemple 1.5.2** Pour une **marche aléatoire**  $X_t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$  sur le **graphe papillon** ci-dessous, calculer :

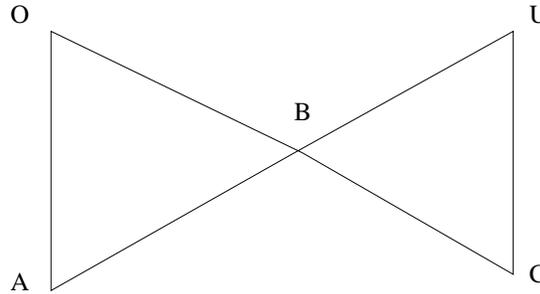


FIG. 1.3 – Marche aléatoire simple sur le graphe papillon

1. L'espérance  $n_U$  en sortant de  $U$  du nombre de pas  $N$  jusqu'au noeud  $O$ . Indication : Utiliser la symétrie.
2. Les probabilités stationnaires de chaque noeud.
3. L'espérance en sortant de  $O$  du nombre de pas  $\tilde{N}_O$  jusqu'au premier retour à  $O$ .
4. La probabilité  $p_A = \mathbb{P}_A\{X_N = O\} = \mathbb{P}_A\{N_O < N_U\}$ , où  $N = \min[N_U, N_O]$ .

**Solution :** 4) En résolvant le système d'absorbtion pour  $p_A, p_B, p_C$ , on trouve  $p_A = 3/4, p_B = 1/2, p_C = 1/4$ ■.

**Exercice 1.5.2** Etant donnée une chaîne finie avec deux états absorbants  $0, B$  et le reste des états transitoires, Obtenez un système et une formule explicite pour le vecteur  $\mathbf{b} = (b_i = P_i[X_T = B], i \in \mathcal{T})$ .

**Sol :**  $\mathbf{b} = Q\mathbf{b} + \mathbf{a}_B \iff \mathbf{b} = (I - Q)^{-1} \mathbf{a}_B$  où  $\mathbf{a}_B$  est le vecteur des probabilités d'absorbtion directe en  $B$  (i.e. après un pas).

Supposons qu'il y a plusieurs états absorbants à probabilités d'absorbtion  $\mathbf{p}^{(j)}, j \in S - \partial$ , qui donnent des "prix finals"  $\mathbf{f} = \{f_j, j \in \partial\}$ , posons  $\hat{p}_i = \mathbb{E}_i f(N)$ , et  $\hat{\mathbf{p}} = \{\hat{p}_i, i \in S - \partial\}$  le vecteur de prix finals esperés. Le calcul de  $\hat{\mathbf{p}}$  est le fameux **problème de Dirichlet**. Par exemple, pour  $\mathbf{f}_j = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\} = \{\delta_j(i), i = 1, 2, \dots\}$  (avec le 1 sur la position  $j$ ) on obtient les probabilités d'absorbtion  $\hat{p}_i(j) = \mathbb{P}_i\{X_N = j\} = \mathbb{E}_i I_{\{X_N=j\}}$ .

La théorie des chaînes pour les quelles tous les états récurrents sont absorbants peut être utilisée pour étudier n'importe quelle chaîne, en modifiant certaines transitions.

**Théorème 1.5.2** Le vecteur  $\hat{\mathbf{p}}$  d'espérances d'un "prix final"  $\mathbf{f}$  satisfait le système d'absorbtion

$$\hat{\mathbf{p}} = Q\hat{\mathbf{p}} + P^{(\mathcal{T}, \partial)} \mathbf{f}$$

En particulier

**Théorème 1.5.3** Les probabilités d'absorption  $\hat{p}^{(j)}$  dans un état absorbant fixe  $j$  satisfont le système d'absorption

$$\hat{p}^{(j)} = Q\hat{p}^{(j)} + p_{(\mathcal{T},\partial)}^{(j)}$$

où  $p_{(\mathcal{T},\partial)}^{(j)}$  denote le vecteur des probabilités de transition dans l'état absorbant  $j$ .

La matrice  $P^{(abs)}$  des probabilités d'absorption satisfait :

$$P^{(abs)} = QP^{(abs)} + P^{(\mathcal{T},\partial)}$$

et donc

$$P^{(abs)} = (I - Q)^{-1}P^{(\mathcal{T},\partial)}$$

Dir2

**Corollaire 1.5.2** Soit  $G := P - I$  (ici, on pourrait encore "effacer" les lignes de  $G$  correspondant à  $\partial$ , mais pas les colonnes). Avec un prix final arbitraire  $f$ , les prix finaux espérés  $p$  à partir de tous les états satisfont le système d'absorption

$$Gp = 0 \tag{1.15}$$

$$p_i = f_i, \quad \forall i \in \partial \tag{1.16}$$

**Corollaire 1.5.3** Avec une distribution initiale  $\beta$ , avec un prix final arbitraire  $f$ , on a l'espace d'états :

$$\hat{p} = \beta(I - Q)^{-1}P^{(\mathcal{T},\partial)}f$$

Pour autres exemples des problèmes d'absorption pour les chaînes de Markov, voir Ruegg, 2.6.4-2.6.5.

### 1.5.4 Les distributions et transformées de Laplace des temps d'absorption/atteinte/"matrix geometric"/de type phase

**Exercice 1.5.3** a) Pour un processus absorbant en temps continu a deux états 0,1 avec  $G_{0,1} = 0, G_{1,0} = \lambda$ , calculez l'esperance du temps d'absorption  $\tau$ .

b) Quelle est la transformées de Laplace de  $\tau$  ?

c) Quelle est la distribution de  $\tau$  ?

**Exercice 1.5.4** a) Calculez l'esperance du temps d'absorption  $\tau$  pour un processus absorbant en temps continu a trois états 0,1 avec

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$$

et distribution initiale  $(0, \alpha_1, \alpha_2)$ .

b) Quelle est la distribution de  $\tau$  ?

c) Quelle est la transformées de Laplace de  $\tau$  ?

---

**Exercice 1.5.5** a) Calculez l'esperance du temps d'absorption  $\tau$  pour un processus absorbant en temps continu a trois états  $0, 1$  avec

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

et distribution initiale  $(0, 1, 0)$ .

- b) Quelle est la transformée de Laplace de  $\tau$  ?  
 c) Quelle est la distribution de  $\tau$  ?

**Exercice 1.5.6** a) Calculez l'esperance du temps d'absorption  $\tau$  pour un processus absorbant en temps continu a trois états  $0, 1$  avec

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$$

et distribution initiale  $(0, 1, 0)$ .

- b) Quelle est la transformée de Laplace de  $\tau$  ?  
 c) Quelle est la distribution de  $\tau$  ?

**Sol :**  $f(t) = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$ , un melange d'exponentielles.

**Exercice 1.5.7** Calculez la transformée de Laplace du temps d'absorption  $\tau$  pour les processus absorbants ayant une diagramme série et pour les processus absorbants ayant une diagramme parallèle.

Il s'avère que la distribution du temps d'absorption  $\tau$  (à partir des diverses états initiaux) est disponible explicitement pour chaque processus de sauts de Markov  $X_t$  avec un état absorbant, et qu'il est même plus facile de traiter directement le cas général, à matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{b} = (-\mathbf{B})\mathbf{1}$ .

En effet, un moment de réflexion nous montre que la matrice

$$\mathbf{P}_t = (P_t(i, j) = \mathbb{P}_i[t < \tau, X_t = j], i, j \in \mathcal{T})$$

des probabilités de survie/ccdfs conditionnées par les positions de depart et d'arrivée au temps  $t$  vaut

$$\mathbf{P}_t = e^{t\mathbf{B}}.$$

Par consequent, la matrice des transformées de Laplace  $\mathbf{P}^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} \mathbf{P}_t dt$  des probabilités de survie conditionnées par les positions de depart et d'arrivée au temps  $t$  vaut

$$\mathbf{P}^*(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}.$$

**Corollaire 1.5.4** Les cdfs des temps d'absorption  $\bar{F}_i(t) = \mathbb{P}_i[\tau > t]$  d'un processus de Markov avec un état absorbant, à matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

sont :

$$\bar{\mathbf{F}} = e^{t\mathbf{B}}\mathbf{1}$$

et les densités sont

$$\mathbf{f} = e^{t\mathbf{B}}\mathbf{b}$$

où  $\mathbf{b} = (-\mathbf{B})\mathbf{1}$ .

**Exercice 1.5.8** Obtenez par conditionnement sur la position après un interval très petit les transformés de Laplace

$$l_i(s) = f_i^*(s) = E_i e^{-s\tau} = \int_0^\infty e^{-st} f_i(t) dt$$

des temps d'absorption d'un processus de Markov avec un état absorbant, à matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

**Sol :** Les équations sont

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{l} - s\mathbf{l} = 0 \\ l_i = 1, \quad \forall i \in \partial \end{cases}$$

$$\iff \mathbf{B}\mathbf{l} + \mathbf{b} - s\mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{l} = (s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{b}$$

Avec une distribution initiale  $\beta$ , on trouve

$$\mathbb{E}e^{-s\tau} = \beta(s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{b}.$$

**Exercice 1.5.9** Soit  $X = (X_t; t \geq 0)$  un processus de Markov en temps continu, à matrice génératrice donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} -\beta_0 & \beta \\ \mathbf{b} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{b} = (-\mathbf{B})\mathbf{1}$  et  $\beta_0 = \beta \mathbf{1}$ . Montrez que le **temps de retour** au premier état, en partant du moment qu'on le quitte, a transformée de Laplace :  $\hat{b}[s] = \beta (s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{b}$  et espérance  $\bar{b} = \mathbf{b}(-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{1}$ , et que la probabilité stationnaire de cet état satisfait  $\pi_0^{-1} = 1 + \bar{b}$

**Note :** Dans le cas  $b_0 = 1$ , on retrouve la bien connue relation du cas du temps discret  $\pi_0^{-1} = \mathbb{E}T_0$ , où  $T_0$  est le temps total de retour au premier état.

En conclusion, on a toutes les transformées

$$l_i(s) = ((s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{b})_i, \forall i \in \mathcal{T}.$$

Il est quand même profitable de reformuler ce résultat en fonction de la matrice génératrice  $\mathbf{G}$ .

---

**Corollaire 1.5.5** Soit  $X_t$  un processus de Markov des sauts avec un état absorbant, à matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\mathbf{R}_s = (s\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$$

sa resolvente. Alors, les transformées de Laplace  $l_i(s) \forall i \in \mathcal{T}$  du temps de passage à état absorbant sont données par :

$$l_i(s) = \frac{R_s(i, \partial)}{R_s(\partial, \partial)} \forall i \in \mathcal{T}.$$

De plus, cette formule est valable pour chaque processus de Markov des sauts, i.e.

$$l_{i,j}(s) = \frac{R_s(i, j)}{R_s(j, j)} \forall i \in E.$$

Pour les temps de retour au même état, on trouve :

$$l_{i,i}(s) = 1 - \frac{1}{R_s(i, i)} \forall i \in E.$$

### Exercice 1.5.10

Rq : Ces équations continuent à être vraies pour les processus semi-Markoviennes.

### Exercice 1.5.11

Obtenez les transformés de Laplace

$$\mathbf{L}_{i,j} = E_i[e^{-\tau} 1_{\{X_\tau=j\}}], \quad i \in \mathcal{T}, j \in \partial$$

pour les temps d'absorption jointes avec la position d'absorption, pour un processus de Markov avec plusieurs états absorbants.

## 1.5.5 Les distributions de type phase discrètes

**Exercice 1.5.12** a) Pour une chaîne à deux états 0,1 avec  $P_{0,1} = \lambda, P_{1,0} = \mu$ , calculez l'espérance  $t_0$  du temps de retour  $T_0$  (retour en 0, conditionné par un départ en 0).

b) Vérifiez l'identité  $t_0 = \pi_0^{-1} / P_0[X_1 \neq 0]$ , valable pour toutes les chaînes ergodiques.

c) Quelle est la distribution du  $T_0$  ?

Les distributions de temps d'absorption, appelées aussi "distributions de phase", sont disponibles explicitement pour chaque chaîne absorbante. Soit

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(k) &= (\mathbf{p}_{x,y}(k), x \in \mathcal{T}) := (\mathbb{P}_{x,y}\{N = k\}, x \in \mathcal{T}, y \in \partial) \\ \mathbf{P}(k) &:= (\mathbb{P}_{x,y}\{N > k\}, x \in \mathcal{T}, y \in \mathcal{T}) \end{aligned}$$

les matrices de dimension  $|\mathcal{T}| \times |\partial|$  ayant comme éléments les probabilités jointes de  $k$  pas avant l'absorption, de départ en  $x$  et d'absorption en  $y$ .

**Théorème 1.5.4** a) Pour une chaîne de Markov absorbante à matrice de transition  $\left\| \begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbf{P}^{(\mathcal{T}, \partial)} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right\|$  les distributions du temps d'absorption  $N$  sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(k) &= (\mathbf{Q})^{k-1} \mathbf{P}^{(\mathcal{T}, \partial)} \\ \mathbf{P}(k) &= (\mathbf{Q})^k, \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \end{aligned}$$

b) Avec distribution initiale  $\beta$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N = k\} &= \beta(\mathbf{Q})^{k-1} \mathbf{P}^{(\mathcal{T}, \partial)} \\ \mathbb{P}\{N > k\} &= \beta(\mathbf{Q})^k \mathbf{1} \end{aligned}$$

c) Avec distribution initiale  $\beta$ , on a :

$$\varphi_N(z) = \sum_k z^k \mathbb{P}\{N = k\} = \beta(\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}$$

d) Les transformées de Laplace  $\mathbf{l}$  satisfont :

$$\mathbf{Q}\mathbf{l} - s\mathbf{l} + \mathbf{1} = 0$$

**Exercice 1.5.13** Démontrez le théorème. Ind : Les matrices  $\mathbf{p}(k), \mathbf{P}(k)$  satisfont les récurrences :

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{p}(k-1), \quad \text{et } \mathbf{P}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(k-1)$$

qui ramènent (en itérant) au résultat :

**Démonstration alternative :**  $I_{N=k} = \sum_{x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathcal{T}, y \in \partial} I_{X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_{k-1}=x_{k-1}, X_k=y \in \partial \in \mathcal{T}$ .  
Dès lors,

$$\mathbb{P}_{x_0}\{N = k, X_k = y\} = \sum_{x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathcal{T}} \mathbf{Q}_{x_0, x_1} \mathbf{Q}_{x_1, x_2} \cdots \mathbf{Q}_{x_{k-2}, x_{k-1}} \mathbf{P}_{x_{k-1}, y}^{(tr)} = (\mathbf{Q})^{k-1} \mathbf{P}^{(tr)}(x_0, y)$$

Les résultats sont obtenus en prenant somme en  $y$  et somme en  $x_0$ , pondéré par les poids  $\beta$ . ■

**Exercice 1.5.14** Démontrez que

$$\mathbb{E}N = \sum_k \mathbb{P}\{N > k\}$$

**Rémarque :** Ce théorème nous fournit une deuxième démonstration du Théorème 1.5.1 c) :

$$\mathbb{E}N = \sum_k \mathbb{P}\{N > k\} = \beta(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}$$

**ser** **Exercice 1.5.15** Soit la matrice de transition  $\left( \begin{array}{cc|c} q_1 & p_1 & 0 \\ 0 & q_2 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

- a) Trouvez l'espérance de  $N$ .  
 b) Généralisez au cas des matrices de ce type (série) de taille  $K + 1$ .  
 c) Soit  $N = N_1 + N_2$ , où  $N_i$  est le nombre de fois qu'on reste en  $i$ . Montrez que la distribution de  $N_1$  conditionné par  $N$  est uniforme et calculez la distribution de  $N$ , si  $q_1 = q_2 = q$ .

**Remarque 1.5.7** On peut aussi résoudre l'exercice en remarquant que  $N_i$  sont des variables géométriques, et donc  $N$  est hypergéométrique (une somme des géométriques).

**par** **Exercice 1.5.16** Soit la matrice de transition  $\left( \begin{array}{cc|c} q_1 & 0 & p_1 \\ 0 & q_2 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$  et la distribution initiale  $(\beta_1, \beta_2, 0)$ . Trouvez l'espérance et la distribution de  $N$ .

Voir aussi Ruegg, 2.6.3.

**Conclusion :** Les distributions de type phase demandent le calcul des puissances/exponentielles de matrices. Ces expressions sont très vite obtenues par logiciels comme Matlab, etc, et leur formule a toutes les apparences d'une expression analytique ; mais, comme pour la plupart des matrices, les valeurs propres ne sont pas accessible analytiquement, leur calcul demande en effet une évaluation numérique.

## 1.5.6 Classification des quelques problèmes sur les esperances des fonctionelles dependant des temps de premier passage

Les problèmes de Dirichlet ont comme objet l'étude des temps de sortie  $\tau$ , de la distribution du point de sortie  $X_\tau \in \partial$ , et des diverses autres fonctionnelles comme des prix finaux ou des coûts accumulés par un processus jusqu'au moment de son absorption en  $\partial$ . Ils ramènent toujours aux systèmes spécifiant les relations entre les esperances des fonctionnelles conditionnées par le point de départ.

**Exercice 1.5.17** Obtenez les équations de Dirichlet pour les probabilités  $\mathbf{p}$  d'absorption dans un sous-ensemble  $A \subset \partial$ , et les temps esperés d'absorption  $\mathbf{t}$ , (à partir des diverses états initiaux, voir Ch. 2.6, Part 1), en conditionnant sur le moment de la première transition, pour un processus de Markov avec un état absorbant, à matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par :

$$G = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

où  $\mathbf{b} = (-\mathbf{B})\mathbf{1}$ .

Obtenez par conditionnement sur la position après la première transition les transformés de Laplace

$$l_i(s) = f_i^*(s) = E_i[e^{-s\tau} 1_{\{X_\tau \in A\}}]$$

des temps d'absorption.

**Sol :** Les trois équations sont respectivement

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{p} &= 0 \\ p_i &= 1_A(i), \quad \forall i \in \partial \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{n} + \mathbf{1} &= 0 \\ n_i &= 0, \quad \forall i \in \partial\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{l}(s) - s\mathbf{l} &= 0 \\ l_j(s) &= 1_A(j), \quad \forall j \in \partial\end{aligned}$$

où  $\tilde{\mathbf{G}} = (\mathbf{B}, \mathbf{b})$  denote la matrice generatrice avec les lignes des états recurrentes enlevées.

**Conclusion :** Nous avons observé dans les chapitres precedants trois idées très importantes dans la modélisation Markovienne :

1. Pour les chaînes et processus de Markov, l'étude des esperances des diverses fonctionnelles, vues comme fonctions de l'état initial, ramène a des systèmes linéaires avec **une inconnue pour chaque état initial possible**.
2. Ces systèmes peuvent être obtenues par la méthode du conditionnement sur le premier pas.
3. Les diverses systèmes associés avec un processus fixe implique toujours la même partie homogène appelée "operateur" ou **générateur du processus** (dans le cas des chaînes de Markov en temps discret et à espace d'états fini ou dénombrable, l'operateur est simplement  $P - I$ , où  $P$  est la matrice de transition  $P$ ). Par contre, les conditions frontière, termes non-homogènes, et d'autre "details" (comme la presence/absence d'un multiple de l'operateur identité) varient d'un problème à l'autre.

Il s'avère que ces principes s'appliquent pour toutes les processus de Markov,  $X_t$ , différents qu'elles soient, vivant sur des espaces  $S$  considerablement plus compliqués, la seule difference étant que l'operateur  $G_X : F(S) \rightarrow F(S)$  associé a ces processus sera plus compliqué!

On arrivent toujours aux mêmes équations, obtenues juste en remplaçant un operateur par un autre.

Par exemple, les problèmes concernant les marches simples ont aussi des versions pour le mouvement Brownien, qui est un processus à espace d'états continu, avec chemins continus (obtenu en considérant des marches simples avec incréments infinitésimaux  $\pm\epsilon$ , et en prenant la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ). Les équations resterons les mêmes, mais l'operateur des difference et remplacé par loperateur differentiel  $\nabla$  (le Laplacien).

En conclusions, il existe une correspondance/dictionnaire un à un entre les processus de Markov et une certaine classe d'operateurs deterministes associés.

## 1.6 Chaînes de Markov à espace fini : analyse spectrale et comportement limite

En vue de la representation exponentielle des semigroupes, l'importance de l'analyse spectrale des generateurs est evidente. Dans ce chapitre, nous allons approfondir ce sujet dans le cadre le plus simple des chaînes de Markov à espace fini.

## 1.6.1 L'existence de la matrice des distributions à la longue $P$

Nous attaquons ici la question de l'existence des distributions "à la longue" (ou simplement limites) d'une chaîne spécifiée par  $c(0)$  et  $P$  :

$$\pi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(0)P^n$$

pour n'importe quelle distribution initiale  $\mu(0)$ . Il est évident que cette question est équivalente à l'existence de la limite  $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ .

## 1.6.2 Un exemple de chaîne non-ergodique

Nous allons examiner maintenant une chaîne non-ergodique, pour la quelle la distribution stationnaire n'est pas unique.

**ne** **Exemple 1.6.1 Exemple de non unicité de la distribution stationnaire**  $\pi$  : Dans l'exemple défini par la matrice ci dessous, cherchons  $\pi \in (\mathbb{R}^+)^5$  tel que  $\pi P = \pi$  et  $\sum_{i=1}^5 \pi_i = 1$ .

$$\pi P = \pi \iff (\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \pi \iff \begin{cases} \pi_2 = 0 \\ \pi_1 = \pi_3 \\ \pi_5 = 2\pi_4 \end{cases}$$

On voit clairement qu'il n'y a pas unicité (par exemple  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0)$  et  $(0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  sont des distributions stationnaires).

Cette chaîne étale des "pathologies", qu'on peut percevoir en examinant le **graphe de communication de la chaîne** :

**Remarque** : afin d'apercevoir la structure de la chaîne et de calculer plus facilement  $P^n$ , il peut être intéressant de renuméroter les états en sorte que des états qui conduisent l'un à l'autre) soient groupés ensemble.

Dans cet exemple, si on échange les états  $e_2$  et  $e_3$ , on obtient, après le rangement facilitant des éléments dans l'ordre 1, 3, 2, 4, 5, la matrice de transition :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{à structure : } P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ et encore}$$

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & B_{1,2} \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix} \text{ où } A, \text{ correspondant aux états } (1, 3) \text{ (qui conduisent l'un à l'autre)}$$

et  $B_2$ , correspondant aux états (4, 5) (qui conduisent l'un à l'autre aussi) sont des matrices stochastiques, et  $B_1$ , correspondant aux transitions entre les états transitoires ((2) est une matrices sous-stochastique.

Il y'a ici deux pathologies :

1. il existe un élément “**transitoire**” 2 (qu'on peut quitter sans retour pour toujours)
2. le graph de communication se décompose en deux classes : (1, 3) et (2, 4, 5) qui ne communiquent pas et la matrice de transition a une structure block diagonale, appelée “**réducibilité**” en probas.

Le fait que la réducibilité se traduise dans une structure de matrice à ”bloques”, montre immédiatement qu'on peut traiter (1, 3) et (2, 4, 5) séparément. Aussi, en enlevant l'élément “transitoire” 2, il nous restent deux ”classes de communication fermées”, (1, 3) et (4, 5), appellées ”**classes de récurrence**”, où on reste pour toujours une fois entré.

On verifie facilement que : 
$$P^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 & 0 \\ 0 & B_1^n & B_{1,2,(n)} \\ 0 & 0 & B_2^n \end{pmatrix}$$

en reflexion du fait qu'on peut étudier les trois chaînes correspondant aux  $A$ ,  $B_1$  et  $B_2$  séparément.

Concernant la matrice  $B_1$  contenant les probabilités de transition entre les éléments transitoires (appelée aussi projection de la matrice  $P$  sur la réunion des classes transitoires), remarquons d'abord que elle est une matrice **sous-stochastique**.

**Définition 1.6.1** Une matrice  $Q$  s'appelle sous-stochastique si la somme des éléments de chaque ligne est  $\leq 1$ , avec inégalité stricte dans au moins une ligne.

**Théorème 1.6.1** Toutes les valeurs propres d'une matrice sous-stochastique  $Q$  ont valeurs absolues inférieurs à 1. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = 0$$

*i.e.* la limite des probabilités de transition entre les états transitoires est 0.

On verifie ici que  $P^n(2, 2) = (1/2)^n$ , en illustrant le théorème ci-dessus. En conclusion,

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Il reste encore à déterminer  $x_1, x_2$ . Une approche directe par un système des récurrences nous montrera que ces deux quantités sont aussi  $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$ .

En general, ce dernier problème peut être abordé algébriquement via la décomposition spectrale, ou par une approche probabiliste qui décompose la vie d'une particule dans la partie qui précède l'absorbtion, et la partie qui s'ensuit.

**Définition 1.6.2** Soit  $i$  un élément transitoire d'une chaîne  $X_n$ , et soit  $j$  un élément appartenant à une classe de récurrence  $\hat{j}$ . On appellera **probabilité d'absorbtion**  $p_i(\hat{j})$  la probabilité que la chaîne commençée en  $i$  finisse en  $\hat{j}$ .

Le calcul des probabilités d'absorption sera abordé en détail plus tard.

Finalement, on arrivera à la conclusion que si la limite  $\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$  existe, elle satisfait :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j) = p_i(\hat{j}) \pi(j)}$$

où on a dénoté par  $p_i(\hat{j})$  la probabilité d'absorption dans la classe de récurrence de  $j$  et par  $\pi(j)$  la probabilité stationnaire de  $j$  dans sa classe (qui coïncide avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j)$  pour  $i \in \hat{j}$ ). Ce deuxième facteur reflète le fait évident qu'une fois absorbée dans une classe fermée, la marche oubliera sa position initiale et donc aura exactement les probabilités limites de la classe.

Dans notre exemple, le fait qu'il existe une seule classe destination possible pour l'élément transitoire 2, et donc que l'absorption dans cette classe est sûre, implique  $p_2(\hat{4}) = p_2(\hat{5}) = 1$ . En conclusion

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Mais, si dans l'exemple 1.6.1 l'élément transitoire aurait eu des possibilités de passage vers les deux classes récurrentes existantes, ça nous aurait obligé de résoudre un problème d'absorption avant de calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ .

En conclusion, une procédure qui fournisse la limite  $\mathbf{P}$  doit :

1. établir si elle existe, ce qui n'est pas toujours le cas, comme on voit en examinant les chaînes de Markov qui bougent cycliquement sur les noeuds d'un graphe
2. inclure la résolution des **problèmes de Dirichlet** concernant l'absorption de la chaîne de Markov dans les classes récurrentes
3. calculer la distribution stationnaire des classes récurrentes.

### 1.6.3 La périodicité

On analysera maintenant, pour chaque état  $e_i$ , l'ensemble  $A_i$  de temps pour lesquels il est possible de se trouver en  $i$  en partant de  $i$ , i.e.

$$A_i = \{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

**Remarque 1.6.1** Cet ensemble est fermé sous l'opération d'addition, i.e. cet ensemble est un sous groupe de  $\mathbb{N}$ .

**Définition 1.6.3** Soit  $e_i$  dans  $E$ . On appelle période de  $e_i$  l'entier  $d(i) = \text{pgcd} \{n > 0 ; p_{ii}^{(n)} > 0\}$  (autrement dit :  $p_{ii}^{(n)} > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = md(i)$ ).  
Si  $d(i) = 1$ , l'état  $e_i$  est dit apériodique.

**Remarque 1.6.2** La période ne dépend que de la classe. Une classe de période 1 est dite apériodique.

**Remarque 1.6.3** *L'existence d'une boucle, i.e.  $p_{ii} > 0$ , assure l'apériodicité.*

**Exemple 1.6.2** *Une classe de communication à matrice de transition  $\tilde{P}$ , pour laquelle il existe un entier  $c$  tel que  $\tilde{P}^c = I$ , appelée cyclique d'ordre  $c$ , est forcément périodique, et la période  $d$  est parmi les diviseurs de  $c$ . Par exemple, en changeant la classe transitoire dans l'exemple ci-dessus en sorte qu'elle contient un cycle de longueur 4 et un de longueur 2, on obtient une classe cyclique d'ordre 4 et période 2.*

L'existence de la matrice des distributions à la longue est liée à la question de la périodicité.

per **Exemple 1.6.3**

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On aperçoit immédiatement la classe récurrente 6, 7 et les classes transitoires 1 et 2, 3, 4, 5. La dernière classe est le collage des deux cycles de période 3, ce que donne immédiatement que  $A_2 = \{3k, k \geq 0\} = \{3, 6, 9, \dots\}$ . Si par contre un de ces cycles avait une longueur pas divisible par 3, par exemple 4, on aurait eu :  $A_2 = \{3k + 4l, k, l \geq 0\} = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, \dots\}$ , dans quel cas  $A_2$  contient tous les nombres en partant de 6.

On voit que les ensembles  $A_i$  contiennent toujours tous les nombres de la forme  $k d(i)$ , pour  $k$  assez grand (cela est un résultat valable pour n'importe quel semigroup de  $\mathbb{N}$ ). En ce qui concerne la périodicité, il y a deux possibilités pour  $A_i$ , en dépendant de  $d = \text{p.g.c.d}$  de la longueur des deux cycles :

1. Dans le cas  $d = 1$ , cet ensemble contient "tous les nombres assez grands" (en partant d'un certain point).
2. Dans le cas  $d > 1$ , cet ensemble est un sous ensemble du sous groupe  $d\mathbb{N}$ . Donc, la matrice  $P^{(n)} = P^n$  ne peut converger quand  $n \rightarrow \infty$  (car il y aura des 0 qui alternent avec des nombres positifs pour toujours : voir par exemple la marche cyclique sur  $\mathbb{Z}^3$ ).

**Remarque 1.6.4** *On verra que la périodicité des classes transitoires n'empêche pas du tout le calcul de la matrice de distributions à la longue, parce que la masse totale de la partie transitoire d'une chaîne converge vers 0 (voir la troisième remarque qui suit le théorème ??).*

Par contre, la périodicité dans une classe récurrente rend la convergence impossible. On peut démontrer que son absence assure la convergence, car cela est équivalent à l'absence des valeurs propres qui sont racines de l'unité, et à l'absence des valeurs propres de valeur absolue  $|\lambda| = 1$ , sauf  $\lambda = 1$  (par Perron-Frobenius). Finalement, le fait que  $\lambda^n$  converge pour chaque valeur propre  $\lambda$  assure l'existence de la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ .

**Donc, la limite à la longue  $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j)$  d'une chaîne existe ssi il n'y a pas des classes récurrentes périodiques.**

---

## 1.6.4 Le théorème de Perron-Frobenius

**Exercice 1.6.1** Est-ce qu'il existent des matrices réelles  $2 \times 2$ , sans éléments négatifs, et avec des valeurs propres complexes ?

La réponse est un cas particulier du :

**Théorème 1.6.2** (Perron-Frobenius) Soit  $P$  une matrice finie sans éléments négatifs. Alors :

1. Parmi les valeurs propres de module maximal il existe toujours une,  $\lambda = \lambda_{PF}$  qui est **réelle positive**, qu'on appellera **la valeur propre PF** (de Perron-Frobenius). Dès lors, toutes les autres valeurs propres ont une valeur absolue inférieure ou égale à la valeur propre  $\lambda_{PF}$ .
2. Le bloque de Jordan correspondant à  $\lambda_{PF}$  a une structure diagonale (i.e. la multiplicité algébrique  $\nu_{PF}$  de  $\lambda_{PF}$  est égale à la dimension de son espace de vecteurs propres), et les espaces des vecteurs propres à droite et à gauche de  $\lambda_{PF}$  contiennent chacun une base de vecteurs propres  $\mathbf{v}_i^{(PF)}, \boldsymbol{\pi}_i^{(PF)}, i = 1, 2, \dots, \nu_{PF}$  ayant **toutes leurs composantes nonnégatives**.
3. S'il y a d'autres valeurs propres égales à  $\lambda_{PF}$  en valeur absolue, elles doivent être des racines de  $\lambda_{PF}$ , i.e. de la forme  $\lambda_{PF}^{1/p}, p \in \mathbb{N}$ .

**Rémarque :** Le théorème de PF a plusieurs implications pour l'analyse des chaînes de Markov homogènes à espace d'états **fini**. Par exemple, l'existence des valeurs propres qui sont des racines de  $\lambda_{PF}$  est équivalente à la présence des périodicités dans la suite des puissances  $P^n, n = 1, 2, \dots$

**e:PF**

**Exercice 1.6.2** Démontrer qu'une matrice stochastique  $P$  n'a pas de valeurs propres avec module plus grand que 1, et donc sa valeur propre PF est égale à 1. Ind : Inyuitivement, les moyennes pondérées de  $v$  données par  $Pv$  ne peuvent pas augmenter les composantes de  $v$ .

**Exercice 1.6.3** Montrez que le théorème de Perron-Frobenius implique :

1. Une chaîne homogène à espace d'états **fini** a au moins une distribution stationnaire.
2. La dimension de l'espace d'états des distributions stationnaires coïncide avec le nb des classes de récurrence.

## 1.6.5 Le comportement limite des chaînes, à partir de la représentation spectrale

Le comportement limite de chaînes de Markov, i.e. le calcul de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}_0 P^n := \mathbf{p}_0 \mathbf{P}$$

est facile à obtenir via une approche complètement algébrique, en utilisant :

1. le théorème PF. Plus précisément, le fait que 1 est la valeur propre PF pour toutes les matrices stochastiques  $P$  (exercice (1.6.2)), et que donc dans l'absence des classes périodiques, toutes les autres valeurs propres sont strictement inférieures à 1 en valeur absolue.

2. La décomposition spectrale. Considerons d'abord le cas le plus simple d'une matrice diagonalisable  $P$ , avec valeurs propres  $\lambda_i$  et vecteurs propres à droite/gauche  $\mathbf{v}_i$  et  $\boldsymbol{\pi}_i$ , normalisés tq  $\boldsymbol{\pi}_i \mathbf{v}_j = \delta_{i,j}$ . Soit  $\Lambda$  la matrice diagonale des valeurs propres,  $V$  une matrice ayant  $\mathbf{v}_i$  comme colonnes, et  $\Pi$  une matrice ayant  $\boldsymbol{\pi}_i$  comme lignes.

Remarquons que la diagonalisation

$$\Lambda = V^{-1}PV = \Pi PV \iff P = V\Lambda\Pi$$

nous permet aussi!!! de représenter  $P$  comme

$$P = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i \boldsymbol{\pi}_i$$

(Dans le cas  $\lambda_i = 1, \forall i$ , c'est juste la définition du produit matriciel, écrit en forme decomposé comme somme de  $n$  matrices de rang 1).

On trouve alors dans le cas diagonalisable que

$$P^n = V\Lambda^n\Pi = \sum_i \lambda_i^n \mathbf{v}_i \boldsymbol{\pi}_i$$

et que convergence peut avoir lieu seulement dans l'absence des valeurs propres  $\lambda_i \neq \lambda_{PF}$  tq  $|\lambda_i| = \lambda_{PF}$  (i.e., de périodicités). Dans ce cas,

$$P^n \implies \mathbf{P} \rightarrow \sum_{i:\lambda_i=1}^{\nu_{PF}} \mathbf{v}_i^{(PF)} \boldsymbol{\pi}_i^{(PF)} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Pi} \quad (1.17) \quad \boxed{\text{alg}}$$

où  $\mathbf{V}\boldsymbol{\Pi}$  sont les matrices ayant  $\mathbf{v}_i^{(PF)}$  et  $\boldsymbol{\pi}_i^{(PF)}$  comme colonnes et lignes, respectivement.

Cette formule reste encore valable dans le cas général, même que la décomposition de Jordan peut contenir des blocques nondiagonales, car les blocques de Jordan associées à des valeurs propres tq  $|\lambda_{(i)}| < 1$  disparaissent dans la limite  $n \rightarrow \infty$ . On obtient donc que dans l'absence des périodicités dans les classes récurrentes, la limite de  $P^n$  est donnée toujours par (1.17).

**Théorème 1.6.3** 1. La multiplicité de la val. propre 1 est égale au nombre des classes récurrentes.

2. Les vecteurs propres à gauche/droite correspondant à une classe récurrente  $A$  sont respectivement de la forme  $\boldsymbol{\pi}_A$ , où  $\boldsymbol{\pi}_A$  est la distribution stationnaire de  $A$  complété par des 0, et  $\mathbf{v}_A = (\mathbf{a}_T, \mathbf{1}_A, \mathbf{0})$ , où  $\mathbf{a}_T$  denote le vecteur des probabilité d'absorbtion dans la classe  $A$ .

3. La limite  $\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$  existe ssi la matrice  $P$  n'a pas des valeurs propres avec  $|\lambda| = 1$  à part la valeur propre de Perron-Frobenius  $\lambda_{PF} = 1$  (i.e. s'il n'y a pas des périodicités), dans quel cas elle est donnée par (1.17).

Dans ce cas, elle est égale à  $\sum_A \mathbf{v}_A \boldsymbol{\pi}_A$ .

**Corollaire 1.6.1** 1. La distribution stationnaire est unique ssi la valeur propre de Perron-Frobenius  $\lambda = 1$  a multiplicité 1.

2. Une chaîne de Markov est ergodique, i.e.  $P^n \implies \mathbf{1}\boldsymbol{\pi}$  ssi les deux conditions ci dessus sont vérifiées.

En conclusion, l'étude de l'existence et l'unicité de distributions à la longue, et l'étude du comportement asymptotique de  $P^n$ , peuvent être abordés algébriquement.

Il convient quand même de s'intéresser aussi aux interprétations probabilistes, comme par exemple, au fait que  $\nu_{PF}$  coïncide avec le nombre de classes récurrentes, et nous aborderons ensuite plusieurs aspects probabilistes du théorème de Perron-Frobenius (en fait, la théorie des chaînes de Markov finies/dénombrables peut être conçue comme une explication probabiliste du théorème de Perron-Frobenius).

### 1.6.6 La structure de la matrice de distributions a la longue $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j)$

Nous donnerons maintenant une méthode pour la détermination des distributions "à la longue" d'une chaîne, dans l'absence des classes récurrentes périodiques. Soit

$$P = \begin{pmatrix} Q_t & T_1 & \dots & \dots & T_I \\ 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & P_I \end{pmatrix}$$

une décomposition de la matrice de transition  $P$ , avec  $P_i, i = 1, \dots, I$  étant les projections de la matrice  $P$  sur les classes récurrentes, et avec  $Q_t$  étant la projection de la matrice  $P$  sur les classes transitoires. Il est facile de vérifier que la puissance  $P^n$  est de la forme :

$$P^n = \begin{pmatrix} Q_t^n & T_{1,n} & \dots & \dots & T_{I,n} \\ 0 & P_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & P_2^n & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & P_I^n \end{pmatrix}$$

Cette formule de décomposition reflète les idées suivantes :

1. Les classes récurrentes "ne savent" pas du tout qu'il existe un "monde extérieur"; par conséquent, la projection  $P_i$  de la matrice  $P$  sur une classe récurrente  $\hat{i}$  est elle-même une matrice stochastique et la projection de la puissance  $P^n$  sur la classe  $i$  est précisément  $P_i^n$ ; ce calcul peut être effectué en ignorant le reste des éléments. Le même est vrai pour les probabilités de transition  $Q^n(i, j)$  entre  $i$  et  $j$  transitoires, i.e. la projection de la puissance  $P^n$  sur les classes transitoires est précisément  $Q^n$  et peut être donc aussi calculée en ignorant le reste des éléments.
2. Les probabilités  $P^n(i, j)$  pour  $i, j$  récurrentes mais dans des classes différentes sont toujours 0 (comme pour  $n = 1$ ) et alors la limite est aussi 0. Le même est vrai pour les probabilités  $P^n(i, j)$  pour  $i$  récurrent et  $j$  transitoire.
3. La limite de  $Q^n$  sera toujours 0, parce que la matrice  $Q$  est sous-stochastique, et les limites de  $P_i^n$  seront donné par le théorème ergodique.

En conclusion, si la limite  $\mathbf{P}$  existe, elle est de la forme :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & X_1 & \dots & \dots & X_I \\ 0 & \Pi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \Pi_I \end{pmatrix}$$

où  $X_1, \dots, X_I$  sont encore à déterminer, cf. la lemme 1.6.2 ci-dessous, en résolvant un pb d'absorbtion.

**Exercice 1.6.4** *Que devient la décomposition spectrale (1.17) dans le cas décomposable et sans éléments transitoires ?*

Avant le cas général, nous analyserons encore deux cas particuliers :

1. les chaînes (faiblement) ergodiques, donc avec  $I = 1$  classes récurrentes
2. les chaînes absorbantes, i.e avec les classes récurrentes étant toutes de cardinalité 1.

### La distribution limite dans le cas faiblement ergodique

**Exercice 1.6.5** *Calculez par l'approche algébrique (donc en résolvant les équations  $P\mathbf{v} = \mathbf{v}, \pi P = \pi, \pi\mathbf{v} = 1$ ) la matrice limite  $\mathbf{P}$  si*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & b \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

erg **Théorème 1.6.4** *Soit  $X_n$  une chaîne de Markov finie avec une seule classe récurrente, qui est apériodique.*

a) *Cela est algébriquement équivalent à une multiplicité un pour la valeur propre  $\lambda = 1$ , et à l'absence des autres valeurs propres de valeur absolue  $|\lambda| = 1$ .*

b) *La distribution limite est unique et la limite  $\mathbf{P}$  est une matrice de rang 1 :*

$$\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \mathbf{1} \times (\mathbf{0} \quad |\pi_\infty) \tag{1.18} \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">une$$

où  $\pi_\infty$  est la distribution stationnaire de la classe récurrente.

La démonstration du théorème 1.6.4 b) par l'approche algébrique est immédiate. En effet, prenons  $\mathbf{v} = \mathbf{1}$ . Soit  $P = \begin{pmatrix} Q & T \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$  et cherchons à trouver un vecteur propre à gauche de la forme  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_1)$ , donc satisfaisant

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_t Q &= \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_t T + \mathbf{p}_1 P_1 = \mathbf{p}_1 \iff \\ \mathbf{p}_t &= (I - Q)^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{p}_1 = \pi \end{aligned}$$

En conclusion, la structure de la matrice limite  $\mathbf{P}$  pour les chaînes faiblement ergodiques est assez simple, pareille à celle du théorème fondamental ergodique ; il suffit de trouver la

distribution stationnaire  $\pi_\infty$  de la seule classe récurrente, et a "l'étendre" par des zéros sur les classes transitoires. En suite on utilise la formule

$$P = \mathbf{1} p$$

où  $p$  est le vecteur  $\pi_\infty$  complété avec des zéros. Remarquons encore que  $\mathbf{1}, p$  sont des vecteurs propres à droite et gauche, normalisés tel que  $p$  est un vecteur des probabilités et tel que  $\langle p, \mathbf{1} \rangle = 1$ , et donc la décomposition ci-dessus est un cas particulier de la forme spécifiée en (1.17).

### La distribution limite dans le cas purement absorbant

Un autre cas simple est celui des chaînes qui n'ont que des états récurrents absorbants, où  $P = \begin{pmatrix} Q & T \\ 0 & I \end{pmatrix}$  et où  $T$  contient comme colonnes les probabilités d'absorption immédiate dans les états absorbants.

Nous savons que  $P$  est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

En utilisant  $PP = P$ , on trouve explicitement, la solution est

$$X = (I - Q)^{-1}T = P^{(abs)}$$

qui est précisément la formule de la matrice des probailités d'absorption (pratiquement, il est plus convenable de les obtenir en résolvant le "système d'absorption" trouvé en conditionnant sur le premier pas.

**Lemma 1.6.1** *Pour une chaîne absorbante, les probabilités limite  $P_{i,j}^{(abs)} := P_{i,j}, \forall i$  transitoire,  $\forall j$  absorbant sont égales aux probabilités d'absorption  $p_i(j) = \mathbb{P}_i\{X_\tau = j\}$ .*

En conclusion, on trouve que la matrice limite est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P^{(abs)} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

**Exercice 1.6.6** *Que devient la décomposition spectrale (1.17) et les vecteurs propres à droite et gauche de la valeur 1 dans le cas absorbant ?*

**Solution :** Cherchons à trouver un vecteur propre à droite  $v_j$  et un vecteur propre à gauche  $\pi_j$  pour chaque élément absorbant  $j$ .

On trouve  $\pi_j = e_j = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ . Décomposant  $v_j = (v_t, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$  on trouve  $v_j = p_j$ , où  $p_j$  sont les probabilités d'absorption dans la classe  $j$ .

### La distribution limite dans le cas général

Nous considerons maintenant le cas général à plusieurs classes récurrentes. Il nous reste seulement de calculer les limites  $X(i, j) := \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j)$  pour  $i$  transitoire et  $j$  récurrent.

Nous avons vu dans nos exemples qu'il y a deux vecteurs de probabilités à déterminer :

- a)  $p_i(\hat{j})$ , de finir dans la classe de récurrence de  $j$  à partir de l'élément transitoire  $i$ , et
- b)  $\pi(j)$  la probabilité stationnaire que la chaîne soit observée dans l'état  $j$  (ou la proportion de temps passé dans l'état  $j$ ).

Pour cela, on utilisera :

mult **Lemma 1.6.2**

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j) = p_i(\hat{j}) \pi(j)} \quad (1.19)$$

où on a dénoté par  $p_i(\hat{j})$  la probabilité d'absorption dans la classe de récurrence de  $j$  (et par  $\pi(j)$  la probabilité stationnaire de  $j$  dans sa classe).

En forme matricielle,  $X_{\hat{j}} = \mathbf{p}_{\hat{j}} \times \boldsymbol{\pi}_{\hat{j}}$

Cette loi multiplicative est assez claire intuitivement : elle reflète l'indépendance entre le comportement avant et après absorption, et se vérifie facilement <sup>4</sup>.

Donc, le calcul des limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j)$  pour  $i$  transitoire et  $j$  récurrent demande le calcul des probabilités d'absorption  $p_i(\hat{j})$  et l'application de la lemme 1.6.2.

p1 **Exemple 1.6.4** Calculer la matrice  $\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$  pour l'exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 1-a-b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Solution :** Après le rangement facilitant des éléments dans l'ordre 1, 4, 6, 2, 3, 5 la matrice de transition devient :

$$P = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1-a-b & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

---

<sup>4</sup>En conditionnant sur la position  $k$  d'arrivée dans la classe de récurrence  $\hat{j}$  de  $j$  après le temps  $T$  de transition de la partie transitoire, on trouve que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j) = \sum_{k \in \hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\} \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(k, j) \quad (\text{par propr. Markov}) \quad (1.20)$$

$$= \sum_{k \in \hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\} \pi(j) \quad (\text{par ergodicité de la classe récurrente}) \quad (1.21)$$

$$= \pi(j) \sum_{k \in \hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\} = p_i(\hat{j}) \pi(j) \quad (1.22)$$

On aperçoit par la structure de matrice à "bloques" qu'on peut traiter les classes (2) et (3, 5) séparément. Ici, l'absorption dans les classes récurrentes se fait toujours en partant de 1, et alors les probabilités d'absorption de 4 et 6 sont identiques aux celles de 1. En plus, l'absorption se fait avec les probabilités données  $a, b$  dans les classes récurrentes (2) et (3, 5), respectivement.

Finalement, on trouve par la lemme (1.6.2)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b} & \frac{1}{2} & \frac{b}{a+b} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b} & \frac{1}{2} & \frac{b}{a+b} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b} & \frac{1}{2} & \frac{b}{a+b} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Le problème du calcul de  $P$  a été simplifié ci-dessus par la connaissance immédiate des probabilités d'absorption  $p_i(\hat{j})$  dans chacune des classes récurrentes.

En applications, il faudra calculer les probabilités d'absorption  $p_i(\hat{j})$  séparément pour chaque classe, sauf une, en résolvant un système d'absorption correspondant, obtenu en "collant ensemble" toutes les éléments de chaque classe (pour la dernière classe, on peut obtenir les probabilités d'absorption comme complémentaires de celles dans les autres classes)

**p2** **Exemple 1.6.5** Calculer la matrice  $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$  pour l'exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & b & 0 & 1-b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Solution :** Après le rangement des éléments dans l'ordre 1, 4, 6, 2, 3, 5 la matrice de transition devient :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1-b \end{pmatrix}$$

Le système d'absorption :

$$\begin{aligned} p_1(2) &= \frac{1}{3}p_4(2) + \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}0 \\ p_4(2) &= \frac{1}{2}p_4(2) + \frac{1}{2}1 \\ p_6(2) &= p_1(2) \end{aligned}$$

donne  $p_1(2) = 3/5 = p_6(2)$  et  $p_4(2) = 4/5$ , et alors les probabilités complémentaires sont :  $p_1(\hat{3}) = 2/5 = p_6(\hat{3})$  et  $p_4(\hat{3}) = 1/5$  (les résultats auraient pu être devinés, en observant que

l'absorption dans les classes récurrentes se fait seulement en partant de 1 et de 4, tandis que 6 a les mêmes probabilités d'abs. que 1. Posant  $\tilde{a} = \frac{a}{a+b}$ ,  $\tilde{b} = \frac{b}{a+b}$  on trouve finalement :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\tilde{b} & \frac{2}{5}\tilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\tilde{b} & \frac{1}{5}\tilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\tilde{b} & \frac{2}{5}\tilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Exercice 1.6.7** Démontrer la lemme, à partir des deux équations  $PP = P$ ,  $PP = P$ . Que devient la décomposition (1.17), i.e. les vecteurs propres à droite et gauche de la valeur 1 dans le cas général ?

**Solution :** Cherchons à trouver un vecteur propre à droite  $\mathbf{v}^{(j)}$  et un vecteur propre à gauche  $\boldsymbol{\pi}^{(j)}$  pour chaque élément absorbant  $j$ .

On trouve  $\boldsymbol{\pi}^{(j)} = (0, 0, \dots, \pi_j, \dots, 0)$ , la distribution stationnaire de la classe  $j$ . Décomposant  $\mathbf{v}^{(j)} = (\mathbf{v}_t, 0, 0, \dots, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  on trouve  $\mathbf{v}_t = \mathbf{p}_j$ , où  $p_j$  sont les probabilités d'absorption dans la classe  $j$ .

En travaillant en forme matricielle, on trouve les matrices de rang 1  $X_j = \mathbf{p}_j \times \boldsymbol{\pi}_j$ .

**Conclusion :** On voit que la connaissance de la structure du graphe de communication simplifie considérablement le problème du calcul de la limite  $\mathbf{P}$ .

### 1.6.7 Exercices

1.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer la limite  $\mathbf{P}$  et la décomposition spectrale, en utilisant un logiciel si nécessaire.

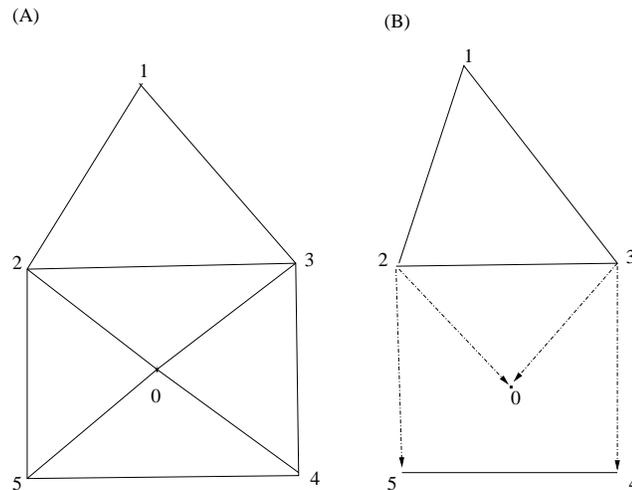
2. L'espace des états d'une chaîne est  $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  et la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Dessinez le graphe de communication et identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrents et transitoires. Y'a-t-il des classes périodiques ?
- (b) Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.
- (c) Trouvez la limite quand  $n \rightarrow \infty$  de la matrice de transition après  $n$  étapes  $P^n$

## 1.7 Exercices

1. Considérez une particule effectuant une **marche aléatoire simple**  $X_t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$  sur le graphe (A) ci-dessous : i.e. à chaque moment  $t = 1, 2, \dots$ , la particule se déplace vers l'un de ses voisins sur le graphe à sa position actuelle, avec la même probabilité pour chaque choix.



- (a) Calculer :
- L'espérance en sortant de 1 du nombre de pas  $T_0$  jusqu'au noeud 0. *Indication* : Utiliser la symétrie.
  - L'espérance en sortant de 0 du nombre de pas  $\tilde{T}_0$  jusqu'au premier retour en 0.
  - Les probabilités stationnaires de chaque noeud. *Indication* : On peut utiliser les équations d'équilibre détaillé.
  - La probabilité  $x_2 = \mathbb{P}_2\{X_T = 1\}$ , où  $T = \min[T_1, T_0]$ .
  - Les probabilités  $p_k$  en partant de 1 que la marche visite 0 exactement  $k$  fois ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) avant le premier retour en 1.
- (b) À un moment donné, le passage sur certains arrêts du graphe devient impossible, ou possible seulement dans une direction, comme indiqué par des flèches dans le graphe (B). Plus précisément, la particule continue de choisir des destinations suivant le graphe (A) ("aveuglement"), mais les choix qui ne sont plus disponibles résultent dans un pas annulé, donc sur place.
- Donnez la matrice de transition de la marche.
  - Identifiez les classes de la chaîne, et classifiez les en récurrentes et transitoires.
  - Trouvez la distribution stationnaire de chaque classe récurrente.
  - Est-ce que la limite au sens de Caesaro quand  $n \rightarrow \infty$  de la matrice de transition après  $n$  étapes  $P^n$  existe ? Le cas échéant, trouvez-la.

2. Une particule décrit une marche aléatoire sur  $E = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$  : si la particule est en  $i < n$ , alors elle se déplace en  $j = i + 1$ , et si la particule est en  $i > n$ , alors elle se déplace en  $j = i - 1$  ; si la particule est en  $i = n$ , alors elle se déplace en une position  $j$  choisie avec probabilités égales parmi les éléments de  $E$  différents de  $n$ . La position  $X_k$  au temps  $k$  constitue une chaîne de Markov.
- (a) Donner la matrice de transition.
  - (b) Déterminer la loi invariante de la chaîne.
  - (c) Calculer la position moyenne de la particule en régime stationnaire.
  - (d) Calculer l'espérance du temps de retour en  $n$  d'une particule qui part de  $n$ .
  - (e) Rajouter maintenant deux états absorbants 0 et  $2n$ , et supposer que si la particule est en  $i = n$ , alors elle se déplace en 0 avec probabilité  $a$ , en  $2n$  avec probabilité  $b$ , et avec probabilité  $1 - a - b \geq 0$  à une position  $j$  choisie avec probabilités égales parmi les autres éléments de  $E$ , différents de  $n$ .
    - i. Déterminer les lois stationnaires de la chaîne.
    - ii. Calculer l'espérance du temps  $T = \min[T(0), T(2n)]$ .
    - iii. Calculer les probabilités de ruine  $\psi(k) = P_k[T(0) < T(2n)]$ .

3. Soit une chaîne absorbante définie par la matrice de transition
- $$\left( \begin{array}{cc|c} p_1 & p_2 & 1 - p_1 - p_2 \\ 0 & p & 1 - p \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

et la distribution initiale  $(\alpha_1, \alpha_2)$ .

Trouvez l'espérance et la distribution du nombre des pas  $N$  jusqu'à l'absorption.

4. Des femmes et des hommes arrivent dans un magasin, après des temps fixes, unitaires. Chaque instant, une femme arrive avec probabilité  $\lambda_F$ , ou un homme arrive avec probabilité  $\lambda_H$ , ou il n'y a pas d'arrivée, avec probabilité  $q = 1 - \lambda_F - \lambda_H$ .
- a. Trouver la probabilité qu'une femme entre avant un homme. *Indication* : Conditionnez sur le premier instant, ou sur le nombre d'instant sans arrivées.
  - b. Trouver la probabilité que deux femmes entrent avant un homme.
  - c. Quelle est la probabilité qu'au moins deux hommes soient entrés consécutivement (pas forcément aux moments consécutifs), avant que trois femmes ne soient entrées consécutivement (pas forcément aux moments consécutifs). *Indication* : Considérez un processus de Markov sur l'espace des états :  $(H1, H2, H3, \dots) \cup (F1, F2, F3, \dots)$ , qui enregistre la longueur  $k$  du nombre des clients  $k \in \{1, 2, \dots\}$  du même sexe entrés consécutivement jusqu'au temps  $t$ , et leur sexe (H/F) ; formulez des équations d'arrêt pour les états d'arrêt indiqués.
5. a) Une mouche effectue une marche cyclique sur les sommets  $\{1, 2, 3\}$  d'un triangle, avec matrice de transition "circulante"

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où  $a, b, c \geq 0$  et  $a + b + c = 1$ . Il est facile de vérifier que la matrice de transition  $P^n$  est aussi "circulante" (i.e. chaque ligne est déduite de la ligne précédente par une

permutation cyclique de ses éléments vers la droite ) et on dénote par  $(a_n, b_n, c_n)$  les éléments de sa première ligne.

- Quelles sont les valeurs limites de  $(a_n, b_n, c_n)$  quand  $n \rightarrow \infty$  ?
- On cherche une formule explicite, aussi simple que possible, pour la probabilité  $a_n = P^n(1, 1)$  qu'après  $n$  étapes, la mouche soit retournée au sommet 1 d'où elle est partie. Soit  $v_n = (b_n, c_n)$ . Trouvez une récurrence pour le vecteur  $v_n$ .
- Résolvez cette récurrence et trouvez  $a_n$ , au cas  $a = b = c = 1/3$  et au cas  $b = c = 1/2$ .
- Résolvez la récurrence, au cas où la mouche a deux fois plus de chances de sauter dans le sens des aiguilles d'une montre, i.e.  $b = 2/3, c = 1/3$ .
- Généraliser au cas d'une marche cyclique sur les sommets d'un polygone avec  $k$  sommets (utilisant éventuellement votre langage formel de choix, comme `xmaxima,...`). *Ind : Cela nous ramène à étudier, éventuellement l'aide de Maxima, les puissances des matrices circulantes stochastiques :*

$A := \text{matrix}([1-b-c, b, c], [c, 1-c-b, b], [b, c, 1-c-b]);$

Vérifier que la matrice est entrée correctement en calculant  $A1 = \text{subst}(1, b, A); A2 = \text{subst}(0, b, A1); A2^3;$

**Note :** Maxima n'est pas capable maintenant de calculer puissances matricielles symboliques, et elle refuse de faire même les matrices diagonales ; mais elle accepte les produits de Hadmard symboliques, et comme les deux coïncident, elle réussit aussi les produits matricielles symboliques, avec un peu d'aide :

$V : \text{eigenvectors}(A); V1 : V[2]; V2 : V[3]; V3 : V[4]; VD : \text{transpose}(\text{matrix}(V1, V2, V3));$

$M : \text{ratsimp}(\text{invert}(VD).A.VD); An : \text{ratsimp}(VD.M^n.\text{invert}(VD));$

- (\*) Marc et un groupe de  $n - 1$  amis jouent un jeu. Chacun met un euro, et ensuite lance une monnaie biaisée, avec une probabilité de sortir "face" égale à  $p$ . La totalité de l'argent est partagé également entre ceux qui ont obtenu face (s'il n'y a aucune, l'argent est donné à une oeuvre charitable), et les piles perdent leur argent. a) Quelle est l'espérance du capital de Marc, après un tour ? b) (\*) Quelle est l'espérance du capital après un tour pour un joueur choisi aléatoirement ?
- Soit  $X_t$  une chaîne de Markov absorbante, soit  $\partial$  l'ensemble de ses états absorbants, soit  $B, A$  une décomposition de l'ensemble des états transitoires, et soit

$$\mathbf{p}(k, B) = (p_x(k, B), x \notin \partial)$$

où

$$p_x(k, B) := \mathbb{P}_x\{\text{exactement } k \text{ visites en } B \text{ avant l'absorption en } \partial\}, x \notin \partial$$

- Quel type de distribution on trouve pour  $p_x(k, B)$ , quand  $B = \{x\}$  ? (Spécifiez les paramètres). Quel est le résultat pour la chaîne associée à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 1-b & 0 & b & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & x_4 & 1-x_1-x_2-x_4 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } B = \{3\}, \text{ et en particulier pour}$$

$a = b = c = 1/2, x_1 = x_2 = x_4 = 1/4$  ("le papillon").

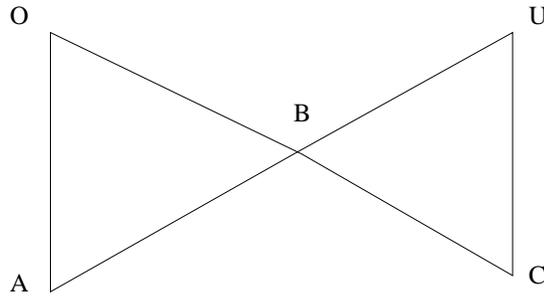


FIG. 1.4 – Marche aléatoire simple sur le graphe papillon

- (b) Pour  $B$  quelconque, en conditionnant sur le premier pas, trouvez une relation entre les variables  $p_x(k, B)$ ,  $x \in A$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , et finalement une récurrence vectorielle  $\mathbf{p}(k) = M\mathbf{p}(k-1)$ , en spécifiant comment obtenir la matrice  $M$  à partir de la matrice  $P$  de transition de la chaîne. Vérifiez votre formule avec le cas  $B = A$ .
  - (c) Retrouvez le résultat pour le "papillon généralisé" ci-dessus, dans le cas qu'on cherche la probabilité  $p_k$  en partant de  $U = 5$  que la marche visite  $O = 1$  exactement  $k$  fois ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) avant le premier retour à  $U$ ) (les autres sommets seront libelés  $A = 2, B = 3, C = 4$ ), **à partir de la formule générale**.
  - (d) Considérez aussi le "papillon généralisé", en prenant  $B = \{1, 2, 3\}$ . Vérifiez pour cet exemple que la somme  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(i, B) = 1, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ .
  - (e) Ecrivez un program dans votre langage de choix qui calcule  $\mathbf{p}(k, B)$  et une approximation  $\mathbf{p}(k, B) \approx c\lambda^k$  pour une chaîne et ensemble  $B$  arbitraires et démontrez sa performance sur les exemples 3.5, 3.6 (pages 23-24) et ensembles  $B$  de votre choix.
8. a) Quelle est la probabilité que la marche aléatoire simple est de retour en 0 après  $2n$  pas? b) Approximer cette quantité par la formule de Stirling  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$ .  
 c) (\*) Démontrez la formule de Stirling.
9. Ruegg, 2.9 :10,5,6,14,13,11.

**Solutions**

1. (a) i. Soit

$$t_i = \mathbb{E}_i T_0 = \mathbb{E}_i[\text{nombre de pas jusqu'au noeud } 0]$$

La symmetrie implique  $t_2 = t_3, t_5 = t_4$ , donc trois équations suffiront (au lieu de 5). En conditionnant sur le premier pas, on trouve que  $t_i$  satisfont :

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 + t_2 \\ t_2 &= 1 + \frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_2 + \frac{1}{4}t_5 \\ t_5 &= 1 + \frac{1}{3}t_5 + \frac{1}{3}t_2 \end{aligned}$$

Ça donne :  $t_5 = \frac{11}{3}, t_2 = \frac{13}{3}, t_1 = \frac{16}{3}$

- 
- ii.  $\mathbb{E}\tilde{T}_0 = 1 + \frac{1}{4}(t_2 + t_3 + t_4 + t_5) = 1 + \frac{12}{3} = 5 (= \frac{1}{\pi_0})$
- iii.  $\pi_i$  sont proportionnels aux degrés  $v_i$  des sommets, i.e.  $\pi_i = \frac{v_i}{\sum_j v_j}$ , donnant  
 $(\pi_1 = 2/(2 + 4 * 3 + 3 * 2) = \frac{1}{10}, \pi_2 = 4/20 = \frac{1}{5}, \pi_0 = \frac{3}{20})$  (en vérifiant ainsi le théorème  $\mathbb{E}\tilde{T}_0 = \frac{1}{\pi_0}$ ).
- iv. Le système d'absorption, tenant compte de  $x_2 = x_3, x_4 = x_5$  est :

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4} \\x_4 &= \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4\end{aligned}$$

Ça donne :  $x_2 = \frac{2}{5}, x_4 = \frac{1}{5}$ .

v.  $p_k = (\frac{2}{5})^k \frac{3}{5}$ .

- (b) i. Après la détérioration, la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Sans les pas sur place, elle serait

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ii. classes récurrentes :  $\{0\}, \{4, 5\}$  ; classe transiente :  $\{1, 2, 3\}$ .
- iii. les distributions stationnaires des classes récurrentes : 1 et  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .
- iv. Le système d'absorption pour les probabilités d'absorption dans la classe 0 est :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\x_2 &= \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4} \\x_3 &= \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

et  $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$ .

La matrice des distributions asymptotique :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. (a) La matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)  $\pi_k = \frac{k}{2(n-1)}\pi_n, \forall k < n$  et la symmetrie  $\pi_k = \pi_{2n-k}$  impliquent  $\pi_n(1 + \frac{(n-1)n}{2(n-1)}) = \pi_n(1 + \frac{n}{2}) = 1$  et  $\pi_n = \frac{2}{2+n}, \pi_k = \frac{k}{(n+2)(n-1)}$

(c)  $E_S[X_n] = n$

(d)  $t_n = \frac{1}{\pi_n} \frac{2+n}{2}$

3.

4. (a) La probabilité  $p_F$  satisfait

$$p_F = \lambda_F + (1 - \lambda_F - \lambda_H)p_F \iff p_F = \frac{\lambda_F}{\lambda_F + \lambda_H}$$

(b)  $p_F^2$

(c) Considerons la chaîne de Markov en temps discret qui enregistre la longueur du nombre des clients du même sexe entrés consecutivement et le type, ayant comme espace des états les suites  $(H1, H2, H3, \dots) \cup (F1, F2, F3, \dots)$ . En prenant en consideration seulement les temps quand la chaîne saute, pn a une marche aléatoire qui "avance" sur les hommes/femmes a.p.  $p_H = 1 - p_F$  et  $p_F$ , et "change de sexe" outrement. Par exemple, si  $\lambda_F = 2\lambda_H$ , les deux probas sont  $p_H = \frac{1}{3}, p_F = \frac{2}{3}$ . En denotant par  $x_i, y_i$  la probabilité de notre evenement en partant d'une suite des  $i$  femmes hommes, il faudra resoudre :

$$\begin{aligned} y_1 &= p_H + p_F x_1 \\ x_1 &= p_H y_1 + p_F x_2 \\ x_2 &= p_H y_1 \end{aligned}$$

Generalisant pour  $m$  hommes et  $n$  femmes et posant  $S_{F,k} = \sum_{i=1}^k p_F^i, S_{H,k} = \sum_{i=1}^k p_H^i$ , nous trouvont

$$y_1 = \frac{p_H^{m-1}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}, x_1 = \frac{p_H^m S_{F,n-2}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

et finalement

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^m (1 + p_F S_{F,n-2})}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}} = \frac{p_H^m S_{F,n-1}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

Pour  $m = 2, n = 3$ , on trouve :

$$y_1 = \frac{p_H}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}, x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$

et

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F + p_F^2)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$

5. a) L'équation de Chapman-Kolmogorov donne immédiatement une formule explicite :  $P^n(1, 1)$ . On note aussi que les marches cycliques ont la matrice de transition  $P$  circulante, et donc nous avons une décomposition spectrale bien connue explicite, qui utilise les racines (complexes) de l'unité. Mais, on peut faire mieux. La matrice  $P^n$  est aussi circulante, et contient donc seulement deux inconnues :  $b_n = P^n(1, 2), c_n = P^n(1, 3)$ . Soit  $b = P(1, 2), c = P(1, 3), a = P(1, 1) = 1 - b - c$  les probabilités après un pas. On trouve la récurrence :

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} - 1/3 \\ c_{n+1} - 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & c - b \\ b - c & a - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n - 1/3 \\ c_n - 1/3 \end{pmatrix}$$

Le cas  $b = c = 1/2$  et  $a = b = c = 1/3$  donnent des récurrences "découplées". Le cas  $b = 2/3, c = 1/3$  est plus difficile. En utilisant l'ordinateur, on remarque que :

$$(b_n - 1/3, c_n - 1/3) = (1/3, 1/3) + 3^{-1-n/2} v_n$$

où  $v_n = v_{n+12}$  est périodique.

6. a)  $X$ , le nombre total des faces a une distribution binomiale  $B(n, p)$ . Il y a deux possibilités : - que Marc tire une pile et perd, dans quel cas son gain sera 0, et qu'il tire une face, dans quel cas le gain sera  $Y = \frac{n}{1+X'}$  où  $X'$  a une distribution binomiale  $B(n, p)$ . Donc, l'espérance du gain est

$$\begin{aligned} Y &= p E \frac{n}{1+X'} = p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} = p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} p^k q^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-1-k} = \sum_{j=1}^n C_n^j p^j q^{n-j} = 1 - q^n \end{aligned}$$

- b) Le gain espéré d'un "joueur aléatoire"  $Y = Y(X)$  est 0 si  $X = 0$ , a.p.  $q^n$ . Au cas contraire, le "joueur aléatoire" est gagnant avec probabilité  $\frac{X}{n}$  et perdant avec probabilité  $1 - \frac{X}{n}$ . Le gain espéré est toujours  $(1 - q^n) E[\frac{X}{n}] = (1 - q^n)$ .

Finalement, cet exercice suggère la question générale du calcul des "sommes binomiales", comme par exemple

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i$$

où  $x = \frac{p}{q}$ . Parfois, ces sommes peuvent être déduites à partir de l'identité  $(1+x)^m = \sum_{i=0}^m C_m^i x^i$  en dérivant ou en intégrant. Mais, le proces d'integration n'abouti pas toujours à des sommes closes. Une somme  $S_n = \sum_1^n f_n$  est une solution d'une relation de recurrence de premier ordre  $S_n - S_{n-1} = f_n$  et donc la question de l'existence des formules closes pour  $f_n$  polynomes ou fonctions rationelles est un cas particulier de la question de l'existence des formules closes pour les recurrences avec coefficients polynomiaux.

Cette question est assez difficile, et le plus efficace est d'utiliser un logiciel symbolique. Ceux ci nous informent s'il y a des formules closes dans la famille relativement simple des solutions "d'Alembertiennes", ou si non.

7. (a) Quand  $|B| = 1$ , on trouve une distribution geometrique  $p_x(k, \{x\}) = \lambda^{k-1}(1-\lambda)$  où :  $1-\lambda = p_x(1, \{x\}) = Q(x, \partial(A) + \sum_{y \in A-B} p(x, y) P_y [T_{\partial(A)} < T_x]) = Q(x, \partial(A) + \sum_{y \in A-B} p(x, y)(1 - P_y [T_{\partial(A)} > T_x]))$ , et  $\lambda = Q_{B,B} + \sum_{y \in A-B} p(x, y) P_y [T_{\partial(A)} > T_x] = Q_{B,B} + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1} Q_{A,B}$ , car pour  $k \geq 2$  on a :

$$p_x(k, \{x\}) = \sum_{y \in A-B} p(x, y) P_y [T_{\partial(A)} > T_x] p_x(k-1, \{x\}) = \lambda p_x(k-1, \{x\})$$

Pour le papillon,  $B = \{3\}$ ,  $\lambda_B = x_1 + x_2 + cx_4 = 5/8$  et pour  $B = \{1\}$ ,  $\lambda_B = 3/8$ .

- (b) Il est convenable de partager  $\mathbf{p}_k = (\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k)$ , où  $\mathbf{b}_k = (p_x(k, B), x \in B)$ ,  $\mathbf{a}_k = (p_x(k, B), x \in A, x \notin B)$ . On peut supposer qu'il y a un seul état absorbant (en "collant ensemble" tous les états absorbants), et soit

$$P = \left( \begin{array}{cc|c} Q_A & Q_{A,B} & \mathbf{q}_A \\ Q_{B,A} & Q_B & \mathbf{q}_B \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

la partition de la matrice de transition contenant les états dans l'ordre  $A-B, B, \partial$ .

On a  $\mathbf{b}_0 = 0$ ,  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{q}_B + Q_{B,A} \mathbf{a}_0$  et

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{q}_A + Q_A \mathbf{a}_0 \implies \mathbf{a}_0 = (I - Q_A)^{-1} \mathbf{q}_A, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{q}_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1} \mathbf{q}_A$$

Pour  $k \geq 2$ ,  $x \in B$ ,  $p_x(k, B) = \sum_{y \in A} P(x, y) p_y(k-1, B)$ , et donc

$$\mathbf{b}_k = Q_B \mathbf{b}_{k-1} + Q_{B,A} \mathbf{a}_{k-1}$$

tant que pour  $x \notin B$ ,  $k \geq 1$ ,  $p_x(k, B) = \sum_{y \in A} P(x, y) p_y(k, B)$  et donc

$$\mathbf{a}_k = Q_{A,B} \mathbf{b}_k + Q_A \mathbf{a}_k \implies \mathbf{a}_k = (I - Q_A)^{-1} Q_{A,B} \mathbf{b}_k$$

Comme

$$\mathbf{b}_1 = (I_B - Q_B) \mathbf{1}_B - Q_{B,A} \mathbf{1}_A + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1} ((I_A - Q_A) \mathbf{1}_A - Q_{A,B} \mathbf{1}_B) = (I_B - M) \mathbf{1}_B$$

on trouve

$$\mathbf{b}_k = (Q_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1} Q_{A,B}) \mathbf{b}_{k-1} \implies \mathbf{b}_k = M^{k-1} ((I_B - M) \mathbf{1}_B)$$

où  $M = Q_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1} Q_{A,B}$  est la matrice de transition de la "chaîne induite" sur  $B$  (où "complement de Shur" de  $A$  en  $Q$ ).

Quand  $B = A$ , on retrouve  $\mathbf{b}_k = Q_B^{k-1} \mathbf{q}_B$ .

- (c) En résolvant le système d'absorption pour  $p_A, p_B, p_C$ , on trouve  $p_A = 3/4, p_B = 1/2, p_C = 1/4$ . 5) Soit  $p_{A,k} = \mathbb{P}_A\{\text{exactement } k \text{ visites en } U \text{ avant le retour en } O\}$ , avec  $p_{B,k}, p_{C,k}$  définies pareillement, et  $\mathbf{p}_k = (p_{A,k}, p_{B,k}, p_{C,k})$ . Ainsi,  $\mathbf{p}_0 = (p_A, p_B, p_C)$  et  $p_0 = \frac{1}{2}(p_{A,0} + p_{B,0}) = \frac{1}{2}(p_A + p_B)$ . Pour  $k \geq 1$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{p}_k + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \\ \iff \mathbf{p}_k &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \\ \iff \mathbf{p}_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \end{aligned}$$

Les vecp à droite sont les colonnes de  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , les valp correspondantes sont :  $0, 0, 5/8$  et le vecp de PF à gauche est :  $(0, 3/5, 3/5)$ .

Dés lors,  $\mathbf{p}_k = (5/8)^{k-1}(p_B + p_C) \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$  et  $p_k = (5/8)^{k-1}(p_B + p_C)3/10$

## 1.8 Fiabilité pour les processus semi-markoviens de sauts

Un processus markovien de renouvellement est défini par une suite des paires des variables

$$\{(X_n, T_n), \quad X_n \in E = \{1, 2, \dots\}, \quad T_n \in \mathbb{R}_+, \quad n \geq 0\}$$

representant respectivement les positions d'un processus de sauts sur un ensemble fini ou dénombrable  $E$ , et les temps de transition. Les distributions jointes de  $X_n$  et des temps de transition entre les sauts sont définies par des "noyaux"

$$\mathbf{A}_n(t) = \{K_{i,j,n}(t) = \mathbb{P}[X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t | X_n = i], \quad i, j \in E, \quad n \geq 0\}$$

tq les matrices  $\mathbf{P}_n := \mathbf{A}_n(\infty)$  sont stochastiques, et les fonctions  $F_{i,j,n}(t) = A_{i,j,n}(t)/A_{i,j,n}(\infty)$  sont nondecroissantes, continues à droite.

Nous traiterons seulement le cas homogène, défini par un seul noyau

$$\mathbf{A}(t) = \{A_{i,j}(dt) = \mathbb{P}[X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t | X_n = i], \quad i, j \in E\}, \quad \forall n \geq 0.$$

Soit  $\mathbf{A}^*(z)$  la matrice des **transformées de Laplace/transmittances**.

Le noyau factorise donc en deux composants

$$\{A_{i,j}(t) = P_{i,j}F_{i,j}(t), \quad i, j \in E\},$$

qui representent respectivement les distributions de la chaîne  $X_n$  des sauts, et les distributions des temps de transition entre les sauts  $T_n$ .

**Définition 1.8.1** *Un processus markovien de renouvellement homogène de transmittances  $Q^*(z)$  est un processus défini par une matrice des distributions*

$$K_{i,j}(t) = P_{i,j}F_{i,j}(t),$$

où  $\mathbf{P} = \mathbf{K}(\infty)$  est la matrice de transition d'une chaîne de Markov, et  $F_{i,j}(t)$  sont des distributions (des temps de transition entre les sauts).

Soit  $N_t$  les processus de comptage associé (comptant le nb. des sauts jusqu'au temps  $t$ ).  
Le processus en temps continu

$$Z_t = X_{N_t}$$

est appelé processus semi-markovien.

Rq : La modélisation semi-markovienne offre une flexibilité considérable. En séparant les probabilités de transition  $p_{i,j}$  de la chaîne sous-jacente des distributions  $F_{i,j}(t)$  des temps de transition, elle permet que ceci soient arbitraires et dépendant aussi des points d'arrivée des sauts (pendant que dans la modélisation markovienne  $1 - F_{i,j}(t) = e^{g_{i,j}t}, \forall j \in E$ ).

**Exercice 1.8.1** a) *Spécifiez les chaînes "discretisées" obtenues en regardant la file d'attente M/G/1 aux temps des départs et la file G/M/1 aux temps d'arrivée sont des chaînes de Markov en temps discret, en donnant leur matrices de transition.*

b) *Quelles sont les matrices de transition des discretisés des files M/G/1/K et G/M/1/K ?*

**Sol b) :** Pour la file M/G/1/K, posons  $p_k = \mathbb{P}\{k \text{ arrivés pendant un service}\}$  et  $P_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$  pour le premier cas.

$$G = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & \cdots & P_{K+1} \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & \cdots & P_{K+1} \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & P_K \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & P_{K-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & p_1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_0 & P_1 \end{pmatrix}$$

Pour la file G/M/1/K, posons  $p_k = \mathbb{P}\{k \text{ services entre deux arrivés}\}$  pour le deuxième cas et  $P_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$  pour le premier cas...

**Exercice 1.8.2** *Essayez les exercices les plus simples des chapitres antérieurs, en supposant des temps des sauts non-exponentielles.*

# Chapitre 2

## Processus de Levy : marches aléatoires en temps continu

**Motivation :** Les processus de Levy sont la généralisation des marches aléatoires discrètes au cas des temps et espace d'états continus.

addlev

### 2.1 Définition et propriétés de linéarité de processus de Levy

On denotera par

$$X_{[s,t]} := X_t - X_s$$

l'increment d'un processus  $X$  sur un intervalle  $[s, t]$ .

Les marches aléatoires discrètes  $X_n, n \in \mathbb{N}$  et certaines processus en temps continu  $X_t, t \in \mathbb{R}_+$  que nous verrons plus tard (le processus de Poisson composé, le mouvement Brownien, ...) partagent la propriété d'avoir des increments independants  $X_{[s,t]}$  sur d'intervalles disjoints, et avec une distribution qui depend seulement de la longueur  $t - s$  de l'intervalle (et pas du point initiale  $s$ ).

Ces propriétés fournissent la définition des processus de Levy :

**Définition 2.1.1** *Un processus  $X_t$  s'appelle processus i.s.i. (à increments stationnaires et independants) si :*

- L'increment  $X_{[t,s]} := X_t - X_s$  sur un intervalle  $[s, t]$  est independant des increments sur d'autres intervalles  $[s', t']$  disjoints de  $[s, t]$ .
- La distribution du increment  $X_{[s,s+t]} = X_{s+t} - X_s$  est identique à la distribution du increment initiale  $X_{[0,t]} = X_t - X_0$ , pour chaque  $s \in \mathbb{R}_+$ .

*En temps discret, les processus i.s.i. s'appellent marches aleatoires et en temps continu, processus de Levy.*

**Note :** Nous utiliserons les deux termes commes synonymes.

**Exercice 2.1.1** *Verifier que le mouvement lineaire  $X_t = pt$  et le processus de Poisson composé satisfont ces propriétés.*

Les exercices suivants montrent que les propriétés ci-dessus impliquent que l'espérance, la variance, et la fonction génératrice des cumulants des processus de Levy sont des fonctions additives en temps.

**Exercice 1.1** Montrez que si  $Y_t$  est un processus de Levy, alors :

a)  $m(t) := \mathbb{E}Y_t$  satisfait  $m(t+s) = m(t) + m(s)$

b)  $v(t) := \text{Var } Y_t$  satisfait  $v(t+s) = v(t) + v(s)$

c) Etablissez la linearité de ces fonctions :  $m(t) = t\mathbb{E}Y_1, v(t) = t\text{Var } Y_1$ , pour des temps  $t$  rationnels.

En généralisant :

**Théorème 2.1.1** Pour chaque  $t, s \in \mathbb{R}_+$  :

a) l'esperance d'une marche aleatoire/processus de Levy  $X_t$  avec  $X_0 = 0$   $m(t) = \mathbb{E}X_t$  satisfait :

$$m(t+s) = m(t) + m(s), m(t) = tm(1)$$

b) la variance  $v(t) = \mathbb{E}(X_t - e_t)^2$  satisfait :

$$v(t+s) = v(t) + v(s), v(t) = tv(1)$$

c) La fonction génératrice des moments d'un processus de Levy  $X_t$  avec  $X_0 = 0$   $M(t) = M_\theta(t) := \mathbb{E}e^{\theta X_t}$  satisfait :

$$M(t+s) = M(t) M(s)$$

pour chaque  $t, s$  où elle est bien définie.

d) Déduisez qu'elle doit être de la forme :  $M(t) = e^{t\kappa(\theta)}$  pour une certaine fonction  $\kappa(\theta)$  (appelée exposant de Levy, où fonction génératrice des cumulants).

**Note** : La fonction génératrice des cumulants caracterise uniquement un processus de Levy.

### Solution 1.1

**Solution 1.2** a) (b)) We decompose  $Y(t+s) = Y(s) + (Y(t+s) - Y(s))$  and taking expectations (variances) we find that both fonctions satisfy the property  $f(t+s) = f(t) + f(s)$  which implies linéarité.

c) The independence and stationarity of increments of a processus de Levy imply that  $M(t) = \mathbb{E}e^{\theta Y_t}$  satisfies the identity  $M(t+s) = M(t) M(s)$ . Taking logarithms we find that  $f(t) = \text{Log}M(t)$  satisfies the identity  $f(t+s) = f(t) + f(s)$ .

Finalement, pour conclure la linearité, on s'appuie sur :

**Lemma 2.1.1** Si une fonction continue (en fait, mesurable suffit)  $f(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait pour chaque  $s, t$ , l'identité :

$$f(t+s) = f(t) + f(s)$$

alors  $f(t)$  est une fonction linéaire, i.e.

$$f(t) = f(1)t.$$

## 2.2 Exemples de processus de Levy

Nous avons deja vu le processus de Poisson, et le processus de Poisson composé  $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i$ , où  $Z_i$  sont des variables aléatoires i.i.d.(independentes et idéntiquement distribuées) et  $N_t$  est un processus de Poisson, independant de  $Z_i$ . Un autre exemple est le processus de réserves classique (d'une compagnie d'assurance).

**Définition 2.2.1** *Le processus de risque classique de Cramér Lundberg est un processus de la forme*

$$X_t = X_0 + c t - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \quad (2.1) \quad \boxed{\text{rc}}$$

où  $C_i$  sont des variables aléatoires *i.i.d.* **nonnegatives**, et  $N_t$  est un processus de Poisson independant de  $C_i$ .

Rq : Ce processus vit naturellement en temps continu (du à la tendance lineaire), sauf s'il est observé que pour  $t \in \mathbb{N}$  et si  $p$  est un entier.

Finalement, un des exemples les plus importants est celui du mouvement Brownien, qui est "la limite des marches aléatoires "infinitesimales" à petits pas en espace et en temps", ce qui résulte dans un processus de Markov en temps continu et à espace d'états continu. Comme l'étude de ce processus comporte beaucoup des points fins (par exemple, l'existence, la continuité et differentiability des chemins, etc...), on va se contenter ici de decouvrir son générateur, defini par une certaine limite des générateurs des marches aléatoires "infinitesimales".

Les processus de Levy fournissent un cadre unificateur pour les exemples precedents.

## limbr 2.3 Marches aléatoires "infinitesimales" et le mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est un processus très important en applications (par exemple mathématiques financières ), mais il est aussi le plus difficile à étudier (voir notes de Chang, par exemple). Nous allons donner quelques idées principales, l'approche étant l'approximation de ce processus par marches aléatoires discrètes (judicieusement choisies).

Un résultat important, mais difficile à démontrer, est :

**Théorème 2.3.1** *Un processus de Levy a des chemins continus ssi sa fonction génératrice des cumulants est quadratique :*

$$\kappa(\theta) = c\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2$$

**Définition 2.3.1** *a) Le processus de Levy  $B(t)$  avec fonction génératrice des cumulants quadratique de la forme :*

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2$$

*s'appelle mouvement Brownien standard.*

*b) Le processus de Levy  $B_{c,\sigma^2}(t)$  avec fonction génératrice des cumulants quadratique de la forme :*

$$\kappa(\theta) = c\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2$$

*s'appelle mouvement Brownien à tendance  $c$  et variance  $\sigma^2$ .*

**Marches aléatoires "infinitesimales" et mouvement Brownien.** Soit  $X_t = X_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$  une marche aléatoire "infinitesimale" sur  $\mathbb{R}$ , i.e. une marche avec  $(Z_n)$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi  $P[Z_n = D] = p$  et  $P[Z_n = -D] = q = 1 - p$ , ou  $p, q = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{c}{\sigma} \sqrt{h})$ ,  $D = \sigma = \sqrt{h}$ ,  $h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  et  $n h = t$ .

1. Montrez que la fonction génératrice de moments de  $X_t$ , donné par  $\mathbb{E}e^{\theta X_t}$ , converge vers  $e^{t\kappa(\theta)}$  où  $\kappa(\theta) = c\theta + \frac{\sigma^2\theta^2}{2}$ , et donc elle exhibe la linéarité en  $t$  caractéristique aux processus de Levy.
2. Montrez qu'il existe un processus de Levy Gaussien  $B_t =$  (appelé mouvement Brownien standard) avec  $\kappa(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$ , en spécifiant sa densité.
3. Montrez encore qu'il existe un processus de Levy Gaussien  $B_{c,\sigma^2}(t)$  (appelé mouvement Brownien de tendance  $c$  et variabilité  $\sigma$ ) avec  $\kappa(\theta) = c\theta + \frac{\sigma^2\theta^2}{2}$ .
4. Montrez que l'espérance et la variance de la marche aléatoire infinitésimale  $X_t$  approchent ceux d'un mouvement Brownien  $B_{c,\sigma^2}(t)$  de tendance  $c$  et variabilité  $\sigma$  ( $B_{c,\sigma^2}(t) = x_0 + \sigma W_t + ct$ , où  $W_t$  est le mouvement Brownien standard.)

**Exercice 2.3.1** Calculer  $EX_t^\alpha$ ,  $\alpha = 2, 4$  pour le mouvement Brownien et pour le processus de Poisson composé.

## 2.4 La formule de Black-Scholes pour les options d'achat

Le **mouvement Brownien exponentiel** est le premier modèle à ramener des résultats intéressants dans les mathématiques financières .

1. Calculez l'espérance du mouvement Brownien exponentiel  $S_t = s_0 e^{B_{c,\sigma^2}(t)}$ .
2. Donnez une formule pour sa distribution cumulative, en termes de la = distribution cumulative  $\Phi(x)$  d'une variable normale standardisée.
3. Calculez le "mode" de  $S_t$  (le point où la densité prend sa valeur maximale).
4. Calculez la "mediane" de  $S_t$ .
5. Supposant  $r = 0$ , est-ce que un actif évoluant comme un mouvement Brownien exponentiel  $S_t = s_0 e^{B_{c,\sigma^2}(t)}$  sera un bon investissement si  $-\frac{\sigma^2}{2} < c < 0$ ?
6. a) Calculez l'espérance actualisée d'une option d'achat  $\mathbb{E}e^{-rT}(S_T - K)_+$  epour un actif  $S_T$  évoluant comme un mouvement Brownien exponentiel  $S_t = s_0 e^{B_{c,\sigma^2}(t)}$ .  
 b) Supposant que  $c = r - \frac{\sigma^2}{2}$  ("neutralité du risque"), deduisez la formule de Black Scholes :

$$c(T, s_0, K, \sigma, r) = S_0 \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K_T}\right) + \frac{V_T}{2}}{\sqrt{V_T}}\right) - K_T \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K_T}\right) - \frac{V_T}{2}}{\sqrt{V_T}}\right)$$

**Solution :**

1.  $\mathbb{E}S_0 e^{(g t + \sigma B(t))} = \mathbb{E}S_0 e^{g t} e^{\sigma \sqrt{t} N} = S_0 e^{g t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} = S_0 e^{(g + \frac{1}{2}\sigma^2)t}$
2.  $\mathbb{P}\{S_t \leq x\} = \mathbb{P}\{S_0 \exp(g t + \sigma B_t) \leq x\} = \mathbb{P}\{+\sigma \sqrt{t} N \leq \ln\left(\frac{x}{S_0}\right) - g t\} = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{S_0}\right) - g t}{\sigma \sqrt{t}}\right)$
3. The density  $p(x, t)$  is proportional to  $\frac{e^{-\frac{(\ln(x) - gt)^2}{2\sigma^2 t}}}{x}$  (called lognormal density). Letting  $E(x)$  denote the exponential (so that  $p(x, t) = \frac{E(x)}{x}$ ) and setting the derivative to 0 we get  $E(x)\left(-\frac{(\ln(x) - gt)}{\sigma^2 t} \frac{1}{x} - 1\right) = 0$  and we find that the mode is  $e^{(g - \sigma^2)t}$ .
4. We have to find  $m$  so that  $\mathbb{P}\{S_t \leq m\} = \mathbb{P}\{e^{gt + \sigma B_t} \leq m\} = \mathbb{P}\{gt + \sigma B_t \leq \ln(m)\} = \mathbb{P}\{\sigma B_t \leq \ln(m) - gt\} = \frac{1}{2}$ . Since  $\sigma B_t$  is a symmetric normal variable, its median is 0 and the last equation can only be satisfied if  $\ln(m) - gt = 0$  and  $m = e^{gt}$ .

# Chapitre 3

## Processus de naissance-et-de-mort et applications aux files d'attente

Les processus Markoviens de saut les plus simples sont les processus "de naissance et mort" qui se deplace sur  $\mathbb{N}$  toujours aux voisins, "sans sauter position". Traditionnellement, on denote les taux d'aller a droite par  $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$ , et les taux d'aller a gauche par  $\mu_i, i \in (\mathbb{N} - \{0\})$  (comme le processus est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on a forcément  $\mu_0 = 0$ ). On appelle les  $\lambda_i$  taux de naissance (ou de croissance) et les  $\mu_i$  taux de mort (ou de décroissance).

**Définition 3.0.1** On appelle processus de naissance et mort une chaîne de Markov homogène à temps continu  $(X_t)_{t \geq 0}$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \forall h > 0,$$

$$P_{ij}(h) = P([X_{t+h} = j] \text{ mid } [X_t = i]) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h) & \text{si } j = i + 1 \\ \mu_i h + o(h) & \text{si } j = i - 1 \\ 1 - (\lambda_i + \mu_i) h + o(h) & \text{si } j = i \\ o(h) & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, le générateur d'un processus de naissance et mort de taux de naissance  $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$  et de taux de mort  $\mu_i, i \in \mathbb{N}$  est donné par une **matrice tridiagonale** :

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots \\ & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

- Si tous les  $\lambda_i$  sont nuls, on parle de processus de mort.
- Si tous les  $\mu_i$  sont nuls, on parle de processus de naissance.

*Exemple* : processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  ( $\forall i \in \mathbb{N}, \lambda_i = \lambda$ ).

**Proposition 1** Un processus de naissance et mort de taux de naissance  $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$  et de taux de mort  $\mu_i, i \in \mathbb{N}$  est irréductible si, et seulement si :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \lambda_i \neq 0 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}^*, \mu_i \neq 0.$$

Démonstration : si  $\forall i \in \mathbb{N}, \lambda_i \neq 0$  et  $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mu_i \neq 0$  alors toutes les transitions sont possibles. Par contre, si l'un des réels  $\lambda_{i_0}$  ou  $\mu_{i_0}$  est nul, une des transitions devient impossible, et on voit que la reunion des classes de communication contenant des elements a gauche de  $i_0$  et celle contenant des elements a droite de  $i_0$  ne peuvent pas communiquer. Alors, l'ensemble des classes de communication a au moins deux elements.

Remarques :

- Il est souvent plus convenable d'utiliser la "forme operateurielle" du générateur :

$$(Gv)(x) = \lambda_i(v(x+1) - v(x)) + \mu_i(v(x-1) - v(x))$$

- Deux domaines où on utilise les processus de naissance et mort sont les **files d'attente** et les **modèles de population**, qui modélisent l'effectif  $X_t$  d'une population à l'instant  $t$ . Par exemple, pour modéliser une croissance/décroissance linéaires avec (ou sans) immigration et avec (ou sans) émigration, on utilisera :
  - $\forall i \in \mathbb{N}, \lambda_i = \lambda i + a$  avec  $\lambda > 0$  et  $a > 0$  (processus avec immigration) ou  $a = 0$  (processus sans immigration)
  - $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mu_i = \mu i + b$  avec  $\mu > 0$  et  $b > 0$  (processus avec émigration) ou  $b = 0$  (processus sans émigration).

### 3.1 Les files d'attente Markoviennes

Le problème est le suivant : des "clients" arrivent en suivant une certaine loi de probabilité pour obtenir un "service" dont la durée est elle-même modélisée par une autre loi de probabilité. La file dispose d'un nombre  $1 \leq s \leq \infty$  des "serveurs" et de  $K$  places supplémentaires d'attente (ainsi, la capacité totale du système est  $s + K$ ).

Dans cette application, la modélisation stochastique est plus aisée en temps continu. Soit  $N_t \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$  le nombre total des clients dans le système (en attente ou en service) à l'instant  $t$ . Pour une file d'attente, les seules transitions possibles de  $N_t$  sont l'ajout/départ d'un client.

**Notation de Kendall.** Kendall appelle un processus  $N_t \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$  "file M/M/s/K" si  $N_t$  est un processus de naissance et mort, et

- il y a  $s$  serveurs
- la taille de la salle d'attente est de  $K$  places.
- les temps  $A_i$  entre les arrivées des clients et les temps de service  $B_i$  suivent des lois exponentielles (traditionnellement, le taux d'arrivée/départ sont notés par  $\lambda, \mu$ ) et sont indépendantes, le M étant une abréviation de Markovien. Si les temps d'arrivée sont simplement indépendantes, on remplace le M par G (général), et s'ils sont de type phase, on remplace le M par Ph(ase).

La file d'attente M/M/1 a, en plus par rapport au processus de Poisson, aussi des "morts", le taux desquelles est traditionnellement noté par  $\mu$ . Ainsi, elle est caractérisée par les taux infinitésimaux  $g_{i,i+1} = \lambda, g_{i,i-1} = \mu, g_0 = \lambda, g_i = \lambda + \mu$  et sa matrice génératrice est :

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}$$

**Autres exemples :**

- 1) Pour la file M/M/1/K on a  $\lambda_i = \lambda, i = 0, 1, \dots, K, \lambda_{K+1} = 0$ .
- 2) Pour la file M/M/s/K, on a  $\mu_i = i\mu, i = 1, \dots, s, \lambda_i = \lambda, i = 0, 1, \dots, s + K - 1, \lambda_{s+K} = 0$

**Rémarque :** Dans tous ces cas, le générateur est donné par une **matrice tridiagonale "presque" Toeplitz**, i.e. avec diagonales constantes, au moins à une certaine distance des frontières.

**Notes :** 1) Pour analyser un processus des sauts en temps continu, il est naturel d'étudier la **chaîne sous-jacente/discretisée**  $\hat{X}_n$  obtenue en regardant seulement dans les moments des transitions (ce processus est parfois markovien, même quand le processus initial ne l'est pas). Pour la file M/M/1, la chaîne discretisée a une structure très simple :

**Exercice 3.1.1** Montrez que pour la file M/M/1 :

a)  $\mathbb{P}\{\tilde{X}_{n+1} = j | \tilde{X}_n = i\}$ , quand  $i \geq 1$  est donné par  $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$  et  $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$  si  $j = i \pm 1$  et par 0 autrement, et  $\mathbb{P}\{\tilde{X}_{n+1} = j | \tilde{X}_n = 0\}$  est 1 si  $j = 1$  et 0 autrement (plus tard nous allons généraliser cet exercice et donner une formule (??) pour la chaîne discretisée d'un processus des sauts en temps continu arbitraire.

b) Le temps d'attente entre les transitions est exponentiel à paramètre  $\lambda + \mu$  conditionnellement sur  $\tilde{X}_n = i$  quand  $i \geq 1$ , est exponentiel à paramètre  $\lambda$  conditionnellement sur  $\tilde{X}_n = 0$ .

En conclusion, la "chaîne discretisée" de la file M/M/1 a comme matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mu}{\mu+\lambda} & 0 & \frac{\lambda}{\mu+\lambda} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\mu}{\mu+\lambda} & 0 & \frac{\lambda}{\mu+\lambda} & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

ce qui vérifie la formule générale (??) ci-dessus.

## 3.2 Distribution stationnaire et comportement asymptotique

L'étude de files d'attente a commencé par le calcul d'Erlang (1921) de la probabilité de perte de la file M/M/s/0. En terminologie moderne, ça revient au calcul de la probabilité stationnaire  $\pi(s)$  de cette file.

La distribution stationnaire est une des caractéristiques les plus faciles à calculer des processus de Markov.

**Définition 3.2.1** On dit qu'un vecteur  $\pi = (\pi_i)_{i \in I}$  est une distribution stationnaire si, et seulement si

(1)  $\pi$  est un vecteur de probabilité, c'est-à-dire :

$$\forall i \in I, \pi_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i \in I} \pi_i = 1$$

(2)  $\forall t \geq 0, \pi = \pi P_t$ .

**Proposition 2** Soit  $P_t = e^{tG}$  un semigroupe de Markov. Alors, pour tout  $t \geq 0$ , il y a équivalence entre :

(1)  $\forall t \geq 0, \pi = \pi P_t$  ( $\pi$  vecteur propre de  $P_t$  à gauche pour la valeur propre 1)

(2)  $\pi G = 0$  ( $\pi$  vecteur propre de  $G$  à gauche pour la valeur propre 0).

Démonstration :  $\pi G = 0 \Rightarrow \forall n \geq 1, \pi G^n = 0$  donc  $\forall t \geq 0 \pi \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} G^n = 0$  d'où :  
 $\pi e^{tG} = \pi P_t = \pi$

Réciproquement, supposons que  $\forall t \geq 0, \pi P_t = \pi$ . On a alors :  $\forall t \geq 0, \pi P_t = \pi e^{tG} = \pi$ .  
 En dérivant par rapport à  $t$ , on obtient :  $\pi G e^{tG} = 0$  et en prenant  $t = 0$ , on en déduit que  
 $\pi G = 0$  d'où  $\pi G = 0$ .

**Notes :** Les équations de stationarité dans la forme

$$\sum_{j \neq i} \pi_j G_{j,i} = \pi_i g_i = \pi_i \sum_{j \neq i} G_{i,j} \quad (3.1) \quad \boxed{\text{f1}}$$

ont l'interprétation d'une égalité entre le "flux entrant" en  $i$  et le "flux sortant" de  $i$ , où "flux" designe le taux de passage en/de  $i$ .

2) Parfois, un système plus simple "d'équilibre partiel/local/ réversible"

$$\pi_i G_{i,j} = \pi_j G_{j,i}$$

est satisfait. Il est facile de vérifier que ce système implique (3.1) et donc l'équilibre global  $\pi G = 0$ .

Par contre, le système d'équilibre local est beaucoup plus simple à résoudre (quand il admet des solutions). Pour les processus de naissance et mort par exemple, le calcul de la distribution stationnaire se réduit toujours aux équations d'équilibre local :

$$\pi_n \lambda_n = \pi_{n+1} \mu_{n+1} \iff \pi_{n+1} = \pi_n \rho_{n+1} \iff \pi_n = \pi_0 \prod_{i=1}^n \rho_i$$

**Exercice 3.2.1** Calculez la distribution stationnaire du nombre de clients dans les files suivantes.

a)  $M/M/1$  ( $R : \pi_n = (1 - \rho)\rho^n, \rho < 1$ )

b)  $M/M/\infty$  ( $R : \pi_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}, \rho > 0$ )

c) Recalculez les réponses par la méthode des fonctions génératrices. ( $R : \pi(z) = \pi_0 \frac{\mu(z^{-1}-1)}{\mu(z^{-1}-1)\lambda(z-1)} = \pi_0 \frac{\mu}{\mu-\lambda z} = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$ , car  $\pi(1) = 1$ ).

d\*) Calculez la distribution stationnaire des files  $G/M/1$  et  $M/G/1$  en temps discret, par la méthode des fonctions génératrices.

**Notes :** 1) La file  $M/M/1$  est "stable" (i.e. a une distribution stationnaire de masse finie) ssi  $\rho < 1 \iff EZ_i = \lambda - \mu < 0$ .

Cette condition est déjà évidente pour la chaîne en temps discret  $X_n = \sum_1^n Z_i$ , où  $Z_i = \pm 1$  avec probabilités  $\lambda, \mu$  tq  $\lambda + \mu = 1$ , et avec l'increment  $Z_i$  "censuré", i.e. obligé d'être 0 au lieu de  $-1$ , quand  $X_n = 0$ . Le manque d'ergodicité est assurée si  $\lambda > \mu$ , par la loi des grandes nb.

2) En généralisant, une marche  $X_n = \sum Z_i$  en temps discret contrainte de rester en  $\mathbb{N}$  sera stable ssi  $EZ_i = \sum k p_k < 0$ , et la condition analogue  $\sum k \lambda_k < 0$  assure la stabilité en temps continu.

3) La file  $M/M/\infty$  est toujours stable.

**Théorème 3.2.1** (admis) Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une chaîne de Markov à temps continu, homogène, de semi-groupe mélangeant<sup>2</sup> (ça implique la nonperiodicité et irréductibilité)  $(P_t)_{t \geq 0}$ .

(1) Si  $\pi$  est une distribution stationnaire alors (le cas érgodique) on a :

$$\forall i, j \in I, \lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$$

(2) S'il n'existe pas de distribution stationnaire alors :  $\forall i, j \in I, \lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ij}(t) = 0$

**Remarques :** 1) Pour un espace d'états fini, l'existence des solutions du système linéaire  $\pi G = 0$ , ou  $\pi$  est un vecteur des probabilités, est toujours garantie par le théorème de Perron-Frobenius.

2) Le deuxième cas ci-dessus (qui n'apparaissait pas pour les espace d'états finis) arrive toujours si  $EZ_i > 0$  en temps discret et  $\mathbb{E}_0 \tilde{X}_t > 0$  en temps continu, par la loi des grands nombres. Ce cas implique une "fuite" du processus vers l'infini.

Reciproquement, pour un espace d'états infini, l'existence des solutions nonnullles (cas 1. ci-dessus) est assurée si le système "ne s'enfuit pas vers  $\infty$ ".

### 3.3 Mesures de performance des files d'attente

Quelques variables aléatoires intéressantes pour les files d'attente qu'on veut étudier sont :

- La longueur  $Q_t$  de la file d'attente (des "clients" qui n'ont pas encore commencé leur service) à l'instant  $t$  et le nombre total  $N_t$  des clients dans le système (en attente ou en service) à l'instant  $t$ . Ces deux sont des processus de naissance et mort.
- La longueur  $W$  du temps d'attente dans la file (avant de commencer le service).
- La longueur totale  $T$  du temps dans le système (attente dans la file + service).

Pour ces quantités et aussi d'autres, on s'intéresse en :

1. la distribution stationnaire, trouvé par "les équations d'équilibre"  $\pi G = 0$ .
2. les distribution "transientes" au temps  $t$ , en sachant l'état initial trouvé par "les équations de semigroupe", et
3. en la distribution cumulative de diverses "coûts" jusqu'aux temps d'arrêt  $T$  importants, comme celui de premier passage par 0, défini par  $T_0 = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq 0\}$ . Par exemple, on s'intéresse en le "**coût totale de vidage**"  $c(x) = \mathbb{E}_x \int_0^{T_0} X_s ds$ , et en le **coût de vidage discompté**  $c_\delta(x) = \mathbb{E}_x \int_0^T e^{-\delta s} X_s ds$ . Ces quantités sont trouvé par "les équations de Dirichlet/Feynman-Kac".

Comme le deuxième objectif est le plus difficile, permettant principalement seulement des approches numériques, ces sont le premier et troisième types des problèmes qui constituent l'objet d'étude principal de la théorie des files d'attente.

**Exercice 3.3.1** Calculez la fonction de distribution complémentaire  $\bar{F}(x)$  (probabilité que la variable soit plus grande que  $x$ ) stationnaire du temps total de service et du temps d'attente dans la file, ainsi que sa transformé de Laplace et le delai moyen dans les files :

a)  $M/M/1$  ( $\bar{F}(x) = e^{(\lambda-\mu)x}$ ,  $\bar{F}_q(x) = \rho e^{(\lambda-\mu)x}$ ,  $\mathbb{E}W = \frac{1}{\mu-\lambda}$ ,  $\mathbb{E}W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$ )

b)  $M/M/c$  ( $\bar{F}_q(x) = \pi_c \frac{1}{1-\rho/c} e^{(\lambda-c\mu)x}$ )

<sup>2</sup>Un processus de Markov homogène en temps continu est dit mélangeant si, et seulement si :

$$\exists t > 0 \text{ tel que } p_{ij}(t) > 0, \forall i, j \in I$$

**Solution :** a)

$$\begin{aligned}\bar{F}_q(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \bar{E}_k^{(\mu)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k e^{-\mu x} \sum_{0 \leq i \leq k-1} \frac{(\mu x)^i}{i!} \\ &= e^{-\mu x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^i}{i!} \sum_{k \geq i+1} \pi_k = \rho e^{-\mu x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!} = \rho e^{(\lambda - \mu)x}\end{aligned}$$

b) Soit  $\mu_c := c\mu, \rho_c := \frac{\lambda}{\mu c}$ .

$$\begin{aligned}\bar{F}_q(x) &= \sum_{l=c}^{\infty} \pi_l \bar{E}_{l-c+1}^{(\mu_c)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{c+k} e^{-\mu_c x} \sum_{0 \leq i \leq k} \frac{(\mu_c x)^i}{i!} \\ &= e^{-\mu_c x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu_c x)^i}{i!} \sum_{k \geq i} \pi_c \rho_c^k = \pi_c \frac{1}{1 - \rho_c} e^{-\mu_c x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!} = \pi_c \frac{1}{1 - \rho/c} e^{(\lambda - \mu_c)x}\end{aligned}$$

**Notes :** Ces calculs sont basés sur la disponibilité des distributions jointes  $P_S[N(t) = k, W_q \in [x, x + dx]] = \lambda(1 - \rho)e^{-\mu x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}$ .

2) Clairement, les attentes dans la file M/M/c sont distribuées effectivement comme dans une file M/M/1 avec paramètre  $\mu_c$ , qui est active seulement une proportion  $\pi_c$  de temps.

3) On peut vérifier dans ces exemples les égalités  $\bar{N} = \lambda \bar{W}, \bar{N}_q = \lambda \bar{W}_q, E[\text{nb. des serveurs utilisés}] = \lambda E[S] = \rho$ , tous des cas particuliers de la loi de Little (qui est valable aussi pour les files avec clients refusés, juste en remplaçant  $\lambda$  par  $\lambda_{\text{accepté}}$ ).

Pour systematiser l'évaluation de la performance des files, Mandelbaum et Zeltyn ont proposé quatre paramètres de service :

- la fraction des clients "bien servis"  $P\{W \leq T; Sr\}$  ;
- la fraction des clients "servis, avec potentiel d'améliorement"  $P\{W > T; Sr\}$  ;
- la fraction des clients "antagonisés"  $P\{W > \epsilon; Ab\}$  ;
- la fraction des clients "avec niveau de service inconnu"  $P\{W \leq \epsilon; Ab\}$ .

### 3.4 Problèmes de Dirichlet/première passage

Les problèmes de Dirichlet/première passage sont parmi les problèmes les plus faciles à résoudre pour les processus de Markov.

**Exemple 3.4.1** Soit  $N_s$  le nombre de personnes en attente dans une file M/M/1/, soit  $T = T_0$  le temps de vidage de la file (appelé aussi **période occupée/busy period** si  $N_0 = 1$ ) et  $T = \min[T_0, T_K]$  (où  $K$  peut-être la taille d'une salle d'attente).

1. Calculez la **distribution d'arrêt**  $p(x) = P_x[N(T) = K], q(x) = P_x[N(T) = 0]$ .  
Indication : On peut conditionner après un petit interval  $dt$ , ou après le temps de la première transition.
2. "**Temps de vidage**". Montrez que si  $K = \infty$  et  $\lambda < \mu$ , alors le **temps de vidage espéré**  $t(x) = \mathbb{E}_x T_0$  est de la forme  $t(x) = \tau x$  ; déterminez  $\tau$ . Donnez l'interprétation probabiliste de  $\tau$ .

3. Montrez que la **transformée de Laplace du temps de vidage**  $d(x) = \mathbb{E}_x e^{-\delta T_0}$ ,  $\delta > 0$  est de la forme  $d(x) = z^x$ ; déterminez  $z$ . Donnez l'interprétation probabiliste de  $z$ .

Calculez aussi la transformée de Laplace du "temps de repos" - "idle-time".

**Solution :**

(d)  $p_x = P_x[X(T) = K]$  satisfait :

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}p)_x &= 0 \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ p_K &= 1 \\ p_0 &= 0 \end{aligned}$$

Comme c'est une equation homogène, et les racines de l'equation auxiliaire sont  $\frac{\mu}{\lambda}$  and 1, on obtient  $p_x = A_1 + A_2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^x = \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^x}{1 - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^K}$ .

2.  $t_x = E_x[T]$  (temps d'arrêt espéré) satisfait une equation nonhomogène

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}t)_x + 1 &= 0 \\ t_0 &= 0 \\ t_x &\quad \text{accroit non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Comme c'est une equation nonhomogène, on obtient  $t_x = p_x + \tilde{t}_x$ , ou  $\tilde{t}_x = cx$ . La solution particulière est  $\tilde{t}_x = \frac{x}{\mu - \lambda}$ , la condition a  $\infty$  annule le terme  $A_2(\mu/\lambda)^x$  et la condition initiale annule  $A_1$ , et alors la solution de l'equation nonhomogene est  $t(x) = \frac{x}{\mu - \lambda}$ .

3.  $d(x) = \mathbb{E}_x e^{-\delta T}$  satisfait :

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}d)(x) - \delta d(x) &= 0 \\ d(0) &= 0 \\ d(\infty) &\leq 1 \end{aligned}$$

Comme c'est une equation homogène, et l'equation auxiliaire

$$\lambda a^2 - (\lambda + \mu + \delta)a + \mu = 0 \iff \mu(a^{-1} - 1) + \lambda(a - 1) = (1 - a)\frac{\mu - a\lambda}{a} = \delta$$

a exactement une racine  $z$  qui n'est pas plus grande que 1, on obtient  $p_x = z^x$ . Par exemple, avec  $\delta = 0$  on obtient  $z = 1$ .

$\tau, z$  sont l'esperance et la transformé de Laplace d'une periode de decroisement par 1 de la file ("busy period"). On peut aussi interpreter  $z$  comme la valeur actualisée (par rapport au taux  $\delta$  d'une unite monetaire qu'on recevra apres que la file decroise par 1.

**Remarque :** La distribution de la periode de decroisement par 1 de la file ("busy period") est importante justement a cause des structures additive/multiplicative signalé ci-dessus.

Soit  $\tau$  le temps de sortie d'un processus de Markov de son domaine  $\mathcal{E}$ , soit  $c(x)$  défini sur le domaine et  $b(x)$  défini sur le domaine complémentaire  $\partial$ , et soit

$$f(x) = E_x \left[ \int_0^\tau c(X(t)) dt + b(X_\tau) \right]$$

**Exercice 3.4.1** Montrez, en conditionnant sur la position au moment  $t + h$ , pour  $h$  très petit, que  $f(x)$  satisfait les équations de Dirichlet :

$$\begin{aligned} (Gf)(x) + c(x) &= 0 & \text{si } x \in \text{int}(\mathcal{E}) \\ f(x) &= b(x) & \text{si } x \in \partial \end{aligned}$$

**Rémarque :** Le problème de Dirichlet pour une chaîne discrète est obtenu en remplaçant le générateur  $G$  par son analogue discret  $\frac{P-I}{1} = P - I$ , où  $P$  est la matrice de transition de la chaîne discrète (la démonstration directe de ce cas est pareille, est plus facile que celle du cas continu).

**Théorème 3.4.1** Etant donné un processus de Markov en temps continu  $X_u$  avec domaine  $\mathcal{E}$  et générateur  $G$ , l'espérance du gain actualisé

$$f(x) = E_x \left[ e^{-\int_0^\tau r(X_u) du} b(X_\tau) + \int_0^\tau e^{-\int_0^t r(X_u) du} c(X(t)) dt \right]$$

satisfait :

$$(Gf)(x) - r(x)f(x) + c(x) = 0$$

avec  $f = b$  sur la frontière.

**Note :** Ces problèmes ont aussi des versions à durée finie  $T$ , où on s'intéresse en :

$$f(x, T) = E_x \left[ e^{-\int_0^{\min[\tau, T]} r(X_u) du} b(X_{\min[\tau, T]}) + \int_0^{\min[\tau, T]} e^{-\int_0^t r(X_u) du} c(X(t)) dt \right]$$

Cette fois-ci, le gain espéré  $f$  dépend aussi du temps qui reste  $T$ , et on arrive à la solution d'une EDP à conditions initiales et de frontière :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} f + (Gf)(x) - r(x)f(x) + c(x) &= 0 & \text{si } x \in \text{int}(\mathcal{E}) \\ f(x) &= b(x) & \text{si } x \in \partial \text{ ou } T = 0 \end{aligned}$$

### 3.5 Quelques mesures de performance pour la file M/M/1

---

ex:MM1

**Exemple 3.5.1** Quelques mesures de performance intéressantes pour la file M/M/1.

1. "Coût de congestion stationnaire" de la file M/M/1. Calculez le coût de congestion moyen stationnaire  $\gamma = \mathbb{E}_{ss} X_t$  de la file M/M/1.
2. "Coût de vidage espéré" la file M/M/1. Obtenez et résolvez l'équation de récurrence pour le coût de vidage  $c(x) = \mathbb{E}_x \int_0^T X_s ds$ , où  $T = T_0$ . Montrez que

$$c(x) = t(x) \left( \frac{x+1}{2} + \gamma \right)$$

où  $\gamma = \mathbb{E}_{ss} X_t$  est le coût moyen stationnaire de la file M/M/1. Donnez une interprétation probabiliste de la partie  $w(x) = t(x) \frac{x+1}{2} = c(x) - \gamma t(x)$ .

3. Obtenez et résolvez l'équation de récurrence pour le **coût de vidage discompté**

$$c_\delta(x) = \mathbb{E}_x \int_0^T e^{-\delta s} X_s ds$$

Trouvez aussi la limite  $b(x)$  ("biais") de la dernière fonction quand  $\delta \rightarrow 0$ . Est-ce que la limite commute avec l'espérance ?

4. Calculez pour la file  $M/M/1$  le "coût relatif" au coût stationnaire  $c_r(x)$ , i.e. la solution de l'équation de Poisson

$$\mathcal{G}c_r(x) + (x - \gamma) = 0 \quad \forall x, \quad c_r(0) = 0, \quad c_r(x) \text{ ("tempérée à } \infty \text{")}$$

et comparez avec la limite précédente  $b(x)$ .

5. Calculez la **mesure d'occupation**

$$m_x(k) = \mathbb{E}_x \int_0^{T_0} 1_{\{X_t=k\}} dt$$

Indication : Obtenez d'abord la fonction génératrice  $M(x) = \sum_k z^k m_x(k) = \mathbb{E}_x \int_0^{T_0} z^{X_t} dt$ .

6. Calculez la **mesure d'occupation relative**  $m_{r,x}(k)$ , en commençant par la solution de l'équation de Poisson

$$\mathcal{G}M_r(x) + (z^x - \mathbb{E}_{SS} z^{X_t}) = 0 \quad \forall x, \quad M_r(0) = 0, \quad M_r(x) \text{ ("tempérée à } \infty \text{")}$$

et comparez avec le résultat précédent.

7. Calculez, en conditionnant après un petit interval  $dt$ , ou après le temps de la première arrivée en 0, le "coût total discompté"  $v_\delta(x) = \mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\delta s} X_s ds$ , et la limite  $\lim_{\delta \rightarrow 0} v_\delta(x)$ .

**Solution :** Soit  $(\mathcal{G}p)_x = \lambda(p_{x+1} - p_x) + \mu(p_{x-1} - p_x)$  En conditionnant après un petit interval  $dt$ , on trouve :

1. En utilisant  $\gamma = \sum_i i(1 - \rho)\rho^i$  où  $\rho = \lambda/\mu$ , on trouve :

$$\gamma = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

2. Pour  $c(x) = E_x[\int_0^T X(t)dt]$  (coût totale de stockage) on trouve

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}c)(x) + x &= 0 \\ c(0) &= 0 \\ c(x) &\text{ accroît non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{G}x = \lambda - \mu$  et  $\mathcal{G}x^2 = 2x(\lambda - \mu) + \lambda + \mu$ , on trouve par la méthode des coefficients indéterminés que la solution est  $c(x) = \frac{x^2}{2(\mu - \lambda)} + \frac{x(\mu + \lambda)}{2(\mu - \lambda)^2}$

On trouve que  $c(x) = c_r(x) + \gamma t(x)$ . **Interpretation :** La première partie,  $c_r(x) = t(x)(\frac{x+1}{2})$  est la solution "fluide", qui utilise précisément la moyenne arithmétique des valeurs  $(x, x-1, \dots, 1)$ , comme si avant le vidage on aurait visité seulement ces valeurs, pour des durées de temps égaux. La deuxième partie suggère un "remplacement de la valeur moyenne à long terme 0 ("vue de loin") dans la solution fluide par la valeur moyenne réelle à long terme  $\gamma$ .

3. Pour  $c_\delta(x) = \mathbb{E}_x \int_0^T e^{-\delta s} X_s ds$  on trouve

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}c)(x) - \delta c + x &= 0 \\ c(0) &= 0 \\ c(x) &\text{ accroît non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

avec la solution  $c_\delta(x) = \frac{x}{\delta} + \frac{\lambda - \mu}{\delta^2}(1 - z^x)$ , ou  $z = \mathbb{E}_1 e^{-\delta T_0}$ .

Pour la limite, on utilise  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1-z}{\delta} = \frac{1}{\mu - \lambda}$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1-z^i}{\delta} = \frac{i}{\mu - \lambda}$ . Alors

$$\begin{aligned} b(x) = \lim c_\delta(x) &= \frac{x + (\lambda - \mu) \frac{1-z}{\delta} \frac{1-z^x}{1-z}}{\delta} \\ &\approx \frac{\sum_{i=0}^{x-1} (1 - z^i)}{\delta} = \frac{x(x-1)}{2(\mu - \lambda)} \end{aligned}$$

4. Pour  $v_\delta(x) = \mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\delta s} X_s ds$  on trouve

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}v)(x) - \delta v(x) + x &= 0 \\ v(0) &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} v(1) \\ v(x) &\text{ accroît non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Tenant compte de  $v_\delta(x) = c_\delta(x) + z^x v(0)$ , on trouve que  $v(0) = \frac{\lambda(1-z)}{\delta^2}$  et finalement

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{x}{\delta} + \frac{\lambda - \mu}{\delta^2} + z^x \frac{\mu - \lambda z}{\delta^2} = \frac{x}{\delta} + \frac{\lambda - \mu}{\delta^2} + \frac{z^{(x+1)}}{\delta(1-z)} \\ &= \frac{x}{\delta} + \frac{\lambda - \mu}{\delta^2} + z^x \frac{\mu - \lambda z}{\delta^2} = \delta^{-1} \left( \sum_{i=1}^x (1 - z^i) - 1 \right) + \frac{\lambda - \mu}{\delta^2} + \frac{1}{\delta(1-z)} \\ &= \delta^{-1} \left( \sum_{i=1}^x (1 - z^i) \right) + \frac{\lambda - \mu}{\delta^2} + \frac{\delta z}{\delta^2(1-z)} \\ &= w(x) ??? \end{aligned}$$

5. Comme en 1a), en utilisant aussi l'équation "de continuation" en 0  $\lambda c_r(1) = \gamma$ , on trouve  $c_r(x) = \frac{x(x+1)}{2(\mu-\lambda)}$ . Ainsi,  $\boxed{c_r(x) = b(x+1)}$  et on trouve aussi  $\boxed{c_r(x) = c(x) - \gamma t(x)}$

(on peut calculer  $\gamma$  plus directement, en partant de propriétés de  $c_r(x)$ , comme le minimum a  $x = -1/2$  ???)

6. Pour  $M(x) = \mathbb{E}_x \int_0^T z^{X_s} ds, z \leq 1$  on trouve :

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}M)(x) + z^x &= 0 \\ M(0) &= 0 \\ M(x) &\text{ accroît non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{G}z^x = z^x(\lambda(z-1) + \mu(z^{-1}-1)) := z^x \kappa(z)$  où  $\kappa(z) := (\lambda(z-1) + \mu(z^{-1}-1)) = (\mu z^{-1} - \lambda)(1-z) = z^{-1}(\mu - \lambda z)(1-z)$ , on trouve que :

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{1-z^x}{\kappa(z)} = \frac{z-z^{x+1}}{(\mu-\lambda z)(1-z)} = \frac{z-z^{x+1}}{\mu-\lambda} \left( \frac{1}{1-z} - \frac{\lambda}{\mu-\lambda z} \right) \\ &= \frac{z-z^{x+1}}{\mu-\lambda} \left( \frac{1}{1-z} - \frac{\rho}{1-\rho z} \right) = \frac{z-z^{x+1}}{\mu-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} z^k (1-\rho^{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^x z^k \frac{1-\rho^k}{\mu-\lambda} + \sum_{k=x+1}^{\infty} z^k \frac{\rho^{k-x} - \rho^k}{\mu-\lambda} \end{aligned}$$

En conclusion, en inversant la transformé on voit que la mesure d'occupation est croissante et approximativement uniforme  $m_x(k) \approx \frac{1-\rho^k}{\mu-\lambda}$  sur  $\{1, x\}$ , et la différence entre une géométrique déplacé en  $x+1$  et une géométrique (donc approximativement 0) sur  $\{x+1, \infty\}$ . On a obtenu donc ici et un raffinement exact de l'approximation fluide !

**Exercice 3.5.1** *Repetez les questions de l'exemple 3.5.1 pour la file M/M/∞.*

**Exercice 3.5.2** *Repetez les questions de l'exemple 3.5.1 pour une file Brownien  $B_{\mu, \sigma^2}(t)$  (directement, ou en choisissant des parametres  $\lambda, \mu \rightarrow \frac{1}{2}$  tel que la file M/M/1 approxime un mouvement Brownien).*

**Exercice 3.5.3** *Repetez les questions de l'exemple 3.5.1 pour un réseaux des deux files M/M/1 en tandem.*

#### Le temps d'attente offert

On peut obtenir une formule générale pour le "temps d'attente offert (travail qui reste) stationnaire"  $W(t)$  dans la file M/G/1 ( $W(t)$  est un processus de Levy réfléchi). On obtient la fameuse formule de Benes-Pollaczek-Khinchin, que nous verrons aussi dans le contexte de l'actuariat.

## 3.6 Les formules d'Erlang A,B,C (\*)

Le premier resultat resultat d'interet pratique dans la theorie des files d'attente est due a **Erlang** (1921), qui a calcule la probabilité de perte (que les nouveaux arrivés ne trouvent pas de place) pour la file M/M/s/0.

**Exercice 3.6.1** *Calculez la distribution stationnaire du nombre de clients dans les files suivantes. En particulier, obtenez la probabilité  $\alpha := P[W_q > 0]$  qu'une nouvelle arrivée doit attendre (i.e. que le système n'a pas des serveurs libres), comme fonction de "l'intensité du trafic offert"  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ . Trouvez aussi le nombre moyen de clients en attente et dans la file.*

- M/M/s/0
- M/M/s
- M/M/s/K

**Solutions :** a) M/M/c/0.

$$B(c, \rho) := \pi_c = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{n=0}^c \frac{\rho^n}{n!}}$$

Cette "probabilité de perte" obtenue par Erlang(1921), est appelée la formule Erlang-B.

b) M/M/c.

$$\pi_n = \begin{cases} \pi_c \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c}, & n \geq c \\ \pi_0 \frac{\rho^n}{n!}, & n \leq c, \end{cases}$$

où  $\pi_0^{-1} = \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{1}{1-\rho/c} \sim e^\rho$  pour grand  $c$ , et "l'intensité du trafic offert per serveur" satisfait  $\rho_c := \frac{\rho}{c} \leq 1$ .

Pour  $n \leq c, c \rightarrow \infty, \pi_n \sim e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}$ , i.e. le nb. des clients=nb. des serveurs utilisés est approximativement Poisson!

$$\alpha = C(c, \rho) := \frac{\frac{\rho^c}{c!} \frac{1}{1-\rho/c}}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{1}{1-\rho/c}} = \frac{\frac{\rho^c}{(c-1)!} \frac{1}{c-\rho}}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{(c-1)!} \frac{1}{c-\rho}} = \frac{1}{1 + (1 - \rho/c)B(c-1, \rho)^{-1}}$$

La "probabilité d'attendre"  $\alpha$  est appelée la formule Erlang-C, et elle sert de "base" dans d'autres formules. Par exemple,

$$\begin{aligned} EN_q &= C(c, \rho) \frac{\rho}{c - \rho} \\ EN &= \rho + C(c, \rho) \frac{\rho}{c - \rho} \end{aligned}$$

et le temps moyen d'attente est  $EW_q = C(c, \rho) \frac{\mu^{-1}}{c-\rho}$  (par la formule de Little).

**Exercice 3.6.2** a) Quelles sont les limites  $\lim_{\rho \rightarrow 0} B(c, \rho), \lim_{\rho \rightarrow \infty} B(c, \rho)$  quand  $c$  est fixe ?  
 b) Déterminez la limite de  $B(c, \rho = \psi c)$  quand  $c \rightarrow \infty$  et  $\psi$  est fixe, dans les cas  $\psi < 1 (c > \rho), \psi > 1 (c < \rho)$ .  
 c) Déterminez la limite de  $B(c, \rho)$  et l'approximation asymptotique de  $\alpha = P[W > 0]$  quand  $\rho = c - \beta\sqrt{c}$ , avec  $\beta$  fixe.

**Sol :** b) Par l'approximation normale,

$$B(c, \rho) = \frac{P[P_\rho = c]}{P[P_\rho \leq c]} \sim \frac{P\left[N \in \left[\frac{c-.5-\rho}{\sqrt{\rho}}, \frac{c+.5-\rho}{\sqrt{\rho}}\right]\right]}{P\left[N \leq \frac{c+.5-\rho}{\sqrt{\rho}}\right]} = \frac{\phi\left(\frac{c-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)}{\sqrt{\rho}\Phi\left(\frac{c-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)}$$

Pour  $\frac{c-\rho}{\sqrt{\rho}} = \beta, \psi < 1, \psi > 1$ , on trouve respectivement

$$B(c, \rho) \sim \begin{cases} \frac{\phi(\beta)}{\sqrt{\rho}\Phi(\beta)} \\ \frac{\phi(\infty)}{\sqrt{\rho}\Phi(\infty)} = \frac{0}{\infty \times 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\phi(x)}{-x\Phi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x\Phi(x)} = 1 \end{cases} .$$

c) par l'approximation normale,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{1 + (1 - \rho/c)B(c-1, \rho)^{-1}} \\ &\sim \frac{1}{1 + \frac{\beta \Phi(\beta)\sqrt{c}}{\sqrt{c} \phi(\beta)}} = \frac{1}{1 + \beta \frac{\Phi(\beta)}{\phi(\beta)}} \end{aligned}$$

**Exercice 3.6.3** Montrez que  $B(c, \rho)^{-1} = \rho^{-c-1} e^{\rho} \bar{\gamma}(s+1, \rho)$  où  $\bar{\gamma}(s+1, \rho) = \int_{\rho}^{\infty} u^s e^{-u} du$ . Reobtenez la limite de  $B(c, \rho)$  quand  $c \rightarrow \infty$  et  $\rho = c - \beta\sqrt{c}$  avec  $\beta$  fixe, par la méthode d'approximation de Laplace.

La question cruciale pour une file est le choix du nb des serveurs  $c$  qui seront affectés. Pour stabilité, dans l'absence des abandons, il est nécessaire que  $\rho \leq c$ . Pour  $\beta, \epsilon = 1 - \psi$  fixes, les "staffing rules"

$$c = \begin{cases} \rho + c\epsilon \\ \rho - c\epsilon (\text{possible dans la presence des abandons}) \\ \rho + \sqrt{\rho}\beta \end{cases} \quad (3.3)$$

sont appelés respectivement "QD" (Quality Driven), "ED" (Efficiency Driven) et "QED" (Quality and Efficiency Driven).

Dans le premier regime, le nb. des serveurs utilisés  $S$  est asymptotiquement Poisson avec moyenne  $\rho$  (avec une proportion  $1 - \frac{\rho}{c} = \beta$  des serveurs nonutilisés); dans le dernier, la file est bien approximé par une diffusion affine OU en mode nonsaturé et, par une diffusion avec tendance constante en mode saturé (essentiellement, on remplace la distribution Poisson par son approximation normale). Cela nous permet dans ce regime de quantifier approximativement la relation entre le "staffing" paramètre  $\beta$  est la probabilité d'avoir à attendre

$$\alpha = P_S[W > 0] = P[S \geq c] = P\left[\frac{S - \rho}{\rho} \geq \beta\right] = \bar{\Phi}(\beta),$$

dans l'absence des abandons. Cette relation a été peaufiné à (3.2) par Halfin et Whitt (1981). Recemment, Garnett & al (2002) ont fourni une généralisation (3.4) tenant compte des abandons.

**Exercice 3.6.4** Calculez la distribution stationnaire du nombre de clients dans la file avec abandon exponentiel Erlang  $A$  (ou  $M/M/c/+M$ ).

**Solution :** Soit  $\mu_c = c\mu$ . En utilisant les taux de depart  $\mu_{c+j} = \mu_c + j\theta, j = 1, 2, \dots$ , on obtient

$$\pi_{c+k} = \pi_c \prod_{i=1}^k \frac{\lambda}{\mu_c + j\theta} = \pi_0 \frac{\rho^c}{c!} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda}{\mu_c + j\theta}$$

avec la constante de normalization

$$\pi_0^{-1} = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda/\theta}{\mu_c/\theta + j} = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^c}{c!} {}_1F_1\left(\left(\begin{matrix} 1 \\ \mu_c/\theta + 1 \end{matrix}\right), \frac{\lambda}{\theta}\right)$$

étant une serie hypergeometrique.

Pour le calcul, on peut profiter de l'identité

$${}_1F_1\left(\left(\begin{matrix} 1 \\ a+1 \end{matrix}\right), x\right) = ae^x x^{-a} \gamma(a, x)$$

où  $\gamma(a, x)$  est la fonction  $\gamma$  incomplète.

**Note :** La relation asymptotique en regime QED obtenue par Garnett et al, et généralisée plus tard pour la file M/M/c+G par Mandelbaum et Zeltyn est :

$$\alpha = \left[ 1 + \sqrt{\theta/\mu} \frac{h(\beta/\sqrt{\theta/\mu})}{h(-\beta)} \right]^{-1} \quad (3.4) \quad \boxed{\text{Gar}}$$

Comme la formule exacte est déjà assez compliquée pour la file M/M/c+M, il devient intéressant d'utiliser l'approximation de diffusion pour la file M/M/c+G, et d'utiliser la distribution stationnaire de la limite (Garnett). Mais, la méthode d'approximation de Laplace reste compétitive (Mandelbaum et Zeltyn).

**Exercice 3.6.5** Calculez la distribution stationnaire du nombre de clients dans une file avec service "bulk" de maximum  $b$  clients.

**Exercice 3.6.6** a) Formulez les équations d'équilibre pour la distribution stationnaire du nombre de clients en attente dans une file  $M(\lambda_1)/M(\lambda_{-1})/1$ , où il y a aussi des arrivées des couples, avec taux  $\lambda_2$ .

b) Donner la condition de stabilité.

c) (\*) Résolvez les équations d'équilibre.

Rappelons que la distribution stationnaire du nombre de clients dans la file avec abandon exponentiel Erlang A (ou M/M/c/+M) est :

$$\pi_{c+k} = \pi_c \prod_{i=1}^k \frac{\lambda}{\mu_c + j\theta} = \pi_0 \frac{\rho^c}{c!} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda}{\mu_c + j\theta}, \quad k = 1, \dots,$$

avec la constante de normalization

$$\pi_0^{-1} = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda/\theta}{\mu_c/\theta + j} = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^c}{c!} {}_1F_1 \left( \binom{1}{\mu_c/\theta + 1}, \frac{\lambda}{\theta} \right)$$

où

$${}_1F_1 \left( \binom{1}{a+1}, x \right) = ae^x x^{-a} \gamma(a, x)$$

Les probabilités d'être servi  $P_j(S_r)$  satisfont des équations harmoniques faciles à résoudre :

$$P_j[Sr] = \frac{\mu_c + j\theta}{\mu_c + (j+1)\theta}, \quad P_{j-1}[Sr] = \dots = \frac{\mu_c}{\mu_c + (j+1)\theta}, \quad j \geq 1.$$

Les probabilités d'abandon sont  $P_j(Ab) = 1 - P_j(S_r) = \frac{(j+1)\theta}{\mu_c + (j+1)\theta}, j \geq 0$ .

Par contre, la fonction de distribution complémentaire  $\bar{F}(x)$  stationnaire du temps d'attente  $V$  est plus difficile. En regime "saturé", nous avons toujours une file avec taux de service  $\mu_c := c\mu$ , mais la distribution des temps  $T_{k,k-1}$  auxquelles le nombre des clients initiaux a changé à  $k-1$  est maintenant exponentielle avec paramètre  $\mu_c + k\theta$ . En denotant toujours par  $\bar{E}_k$  la distribution complémentaire du temps de vidage conditionné par  $k$  clients en attente, nous avons toujours :

$$\bar{F}_q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{c+k} \bar{E}_k(x)$$

## 3.7 Exercices

1. Soit  $X_t$  une file  $M(\lambda)/M(\mu)/1$ .
  - a) Donnez la matrice génératrice pour le processus  $X_t$ .
  - b) Indiquer les valeurs des probabilités  $p$  et  $q$  pour que le nombre des clients augmente/diminue, au moments du premier saut à partir d'un état  $n \geq 0$ .
  - c) Calculez la distribution stationnaire de  $X_t$ .
  - d) Calculez en utilisant un système de conditionnement l'espérance en sortant de 0 du temps  $\tilde{T}_0$  jusqu'au premier retour en 0.

2. Supposons que le nombre de clients  $X_s$  en attente dans une file  $M(\lambda)/M(\mu)/1$  a atteint à un temps fixé 0 sa distribution stationnaire, i.e.  $\mathbb{P}[X_0 = k] = \rho^k(1 - \rho)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , où  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ .

Un client qui arrive au temps 0 restera dans le système pour un temps total (attente + service)  $T = \sum_{i=1}^{X_0+1} S_i$ , où  $S_i, i = 1, \dots, X_0 + 1$  sont les temps de services du client et de ceux qu'il trouve en attente dans la file.

- a) Calculez la transformée de Laplace, l'espérance et la distribution du temps  $T$  dans le système du client qui arrive au temps 0.
  - b) (\*) Il s'avère que les clients en attente dans le tampon au temps 0 ont été infestés chacun par des extraterrestres, de telle manière que chacun donnera naissance tout au long de son attente à des nouveaux extraterrestres, après des temps exponentiels de taux  $\lambda$ . Soit  $B_i(t)$  le nombre d'extraterrestres produits par le client  $i$ . Quel est l'espérance du nombre total  $Z(t) = \sum_{i=1}^{X_0} B_i(t)$  des extraterrestres produits du temps 0 au temps  $t$  par les clients infestés?
3. Pour  $X_s$  un processus Poisson à taux  $\lambda$ , conditionné sur  $X_0 = x$ , et  $T$  le temps de la première arrivée, calculez la transformée de Laplace  $\hat{f}_T[\delta] = \mathbb{E}e^{-\delta T}$ ,  $\delta \geq 0$  et le coût total de stockage discompté

$$v_\delta(x) = \mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\delta s} X_s ds$$

*Indication : Utilisez la décomposition  $X_s = x + Y_s$ , ou  $Y_s$  est un processus Poisson conditionné sur  $Y_0 = 0$ . Soit  $T^{(0)}$  le moment du premier saut. Alors,  $Y_{T^{(0)}+s} = 1 + Y_s$ .*

4. Calculez la la distribution stationnaire du nombre de clients dans la file  $M/M/s$  ( $\pi_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}$ ,  $n = 0, \dots, s$ ;  $\pi_{n+k} = \pi_n (\frac{\rho}{s})^k$ ,  $k = 0, \dots$ ,  $\pi(s) = \frac{Po(\rho, s-1)}{Po(\rho, s-1) + e^{-\rho} \frac{\rho^s}{s!(1-\rho/s)}}$ )
5. Soit  $X$  le nombre de clients dans une file  $M/M/1$ , et soit  $X_q$  le nombre de clients qui attendent d'être servis. Calculez  $\mathbb{E}X$ ,  $\mathbb{E}X_q$ ,  $\text{Var } X$  et  $\text{Var } X_q$ .
6. Trouvez la distribution stationnaire du temps d'attente  $W$  dans les file  $M/M/s$ ,  $M/M/\infty$ , et leurs transformées de Laplace.
7. Trouvez la fonction génératrice des moments du temps de séjour total d'un client dans une file  $M(\lambda)/M(\mu)/1$ , en supposant que la file est en regime stationnaire. *Indication : Utilisez la distribution stationnaire de la file  $M(\lambda)/M(\mu)/1$ , et la question précédente.*
8. Est-ce-que l'espérance stationnaire du séjour totale d'un client dans une file  $M(\lambda)/M(2\mu)/1$  est plus grande que celle d'un client dans une file  $M(\lambda)/M(\mu)/2$ ? Justifiez votre réponse.

9. Calculez la distribution stationnaire de la file M/Ph/ $\infty$ .
10. Calculez la distribution stationnaire de la file M/Ph/1, et la probabilité  $\pi(s)$  que les nouveaux arrivés ne doivent pas attendre.
11. (\*\*\*) Calculez pour la file M/Ph/s la probabilité  $\pi(s)$  que les nouveaux arrivés ne doivent pas attendre.
12. Trouvez les fonction génératrices et transformées de Laplace de  $N, Q, T, W$  pour la file M/G/1 (la formule de Pollaczek-Khyncin).
13. Calculez la transformée de Laplace de la période occupée d'une file M/Ph/1. Vérifiez cette formule avec le cas M/M/1.
14. Montrez que la transformée de Laplace de la période occupée d'une file M/G/1 satisfait **l'équation de Kendall** :

$$z[s] = \hat{b}[s + \lambda - \lambda z[s]] \quad (3.5)$$

15. Est ce que la file "B(atch)"M/Ph/ $\infty$  a une distribution de forme produit ?

**Solutions :**

1. c) On trouve  $\pi_i = \rho\pi_{i-1}, i = 1, 2, \dots$ , et donc  $\pi_i = \rho^i\pi_0$  avec  $\rho = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ . Remarquez l'identité  $t_0 = \pi_0^{-1}/P_0[X_1 \neq 0]$ , valable pour toutes les chaînes ergodiques.
2. a)  $S_i, i = 1, \dots, X_0 + 1$  sont des variables exponentielles de paramètre  $\mu$ . On trouve

$$\mathbb{E}e^{-sT} = \mathbb{E}e^{-s\sum_{i=1}^{X_0+1} S_i} = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^{k-1} \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^k = (1-\rho)\frac{\mu}{\mu+s}\varphi\mu + s\mu(1-\rho) + s = \frac{(1-\rho)\mu}{\mu(1-\rho) + s}$$

et donc  $T$  est exponentielle avec paramètre  $\mu(1-\rho)$ . b)  $\mathbb{E}\sum_{i=1}^{X_0} B_i(t) = \mathbb{E}B_1(t) \mathbb{E}X_0 = \lambda t \varphi\rho 1 - \rho$

3. Le temps de la première arrivée étant exponentiel,  $\mathbb{E}e^{-\delta T} = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}$ . Conditionnant sur le temps de la première arrivée, on trouve d'abord  $v(0) = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}(\frac{1}{\delta} + v(0))$  et alors :  $v(0) = \frac{\lambda}{\delta^2}$ . En suite,  $v(x) = \frac{\delta}{\lambda+\delta}\frac{1}{\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta}v(x+1), \dots$
4. (a)
- (b)
- (c) On trouve  $\pi_2 = \rho\pi_1, \pi'_2 = \rho'\pi'_1$ . Soit  $k = \pi_0 + \pi_1 + \pi'_1$ . Eliminant  $\pi_2, \pi'_2$ , on arrive à :

$$\begin{aligned} \lambda p k &= (\lambda + \mu)\pi_1 \\ \lambda p' k &= (\lambda + \mu')\pi'_1 \\ k + \rho\pi_1 + \rho'\pi'_1 &= 1 \end{aligned}$$

et donc  $\pi_1 = \varphi k p \rho 1 + \rho, \pi'_1 = \varphi k p' \rho' 1 + \rho', \pi_0 = \varphi k p 1 + \rho + \varphi k p' 1 + \rho'$  avec  $k = (1 + \varphi p \rho^2 1 + \rho + \varphi p' (\rho')^2 1 + \rho')^{-1}$ .

### 3.8 Les probabilités transitoires des processus de naissance et mort

Le calcul de la distribution stationnaire des processus de naissance et mort de générateur

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & \vdots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \mu_2 & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

est très simple, en utilisant le système d'équilibre local :

$$\pi_n \lambda_n = \pi_{n+1} \mu_{n+1} \iff \pi_{n+1} = \pi_n \rho_{n+1} \iff \pi_n = \pi_0 \prod_{i=1}^n \rho_i$$

Par contre, les probabilités transitoires sont déjà assez compliquées à obtenir analytiquement même dans le cas le plus simple de la file M/M/1 (la marche aléatoire simple en temps continu sur  $\mathbb{N}$ ), pour la quelle ils impliquent des fonctions de Bessel.

On peut quand même obtenir facilement les transformées de Laplace des probabilités transitoires. Illustrons maintenant le calcul des transformées de Laplace, à partir des équations de Chapman-Kolmogorov.

Soit  $p_j(t) := P_{0,j}(t)$  les probabilités transitoires en partant de l'état initial  $i = 0$ , et soit  $p_j := p_j^*(s)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  leurs transformées de Laplace.

Les équations de Kolmogorov  $P' = PG$  pour la première ligne sont

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), & p_0(0) &= 1 \\ p_j'(t) &= \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t), & p_j(0) &= 0, j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Les transformées de Laplace  $p_j^*(s)$  satisfont une récurrence **de deuxième ordre** :

$$\begin{aligned} \lambda_{j-1} p_{j-1}^* - (s + \lambda_j + \mu_j) p_j^* + \mu_{j+1} p_{j+1}^* &= 0, & j &= 1, 2, \dots \\ \mu_1 p_1^* - p_0^* (s + \lambda_0) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

**La résolution des récurrences de deuxième ordre** (même avec coefficients non-constants) est toujours possible en itérant. On reorganise la récurrence comme : "désiré" + "reporté" = "connu", en l'occurrence :

$$p_j^* (s + \lambda_j + \mu_j - \mu_{j+1} \frac{p_{j+1}^*}{p_j^*}) = \lambda_{j-1} p_{j-1}^* \iff \frac{p_j^*}{p_{j-1}^*} = \frac{\lambda_{j-1}}{s + \lambda_j + \mu_j - \mu_{j+1} \frac{p_{j+1}^*}{p_j^*}}$$

On arrive ainsi au système :

$$\begin{aligned} p_0^* &= \frac{1}{s + \lambda_0 - \mu_1 \frac{p_1^*}{p_0^*}} \\ \frac{p_j^*}{p_{j-1}^*} &= \frac{\lambda_{j-1}}{s + \lambda_j + \mu_j - \mu_{j+1} \frac{p_{j+1}^*}{p_j^*}}, & j &= 1, \dots, \end{aligned}$$

En itérant ces récurrences, et en posant  $\sigma_j = \lambda_j + \mu_j, j = 0, \dots, \gamma_j = \lambda_{j-1}\mu_j, j = 1, \dots, \gamma_0 = 1$ , on obtient une **fraction continue** pour la transformée de la probabilité de retour en 0 :

$$\begin{aligned}
 p_0^*(s) &= \frac{1}{s + \sigma_0 - \frac{\gamma_1}{s + \sigma_1 - \frac{\gamma_2}{s + \sigma_2 - \frac{\mu_3 p_3^*}{p_2^*}}}} = \oplus_{j=0}^{\infty} \frac{\gamma_j}{s + \sigma_j} \quad (3.6) \quad \boxed{\text{fcb}} \\
 &= \frac{1}{s + \lambda_0 - \frac{1}{\lambda_0^{-1}(1 + (s + \lambda_1)/\mu_1) - \frac{1}{\lambda_0\mu_1\lambda_1^{-1}(1 + (s + \lambda_2)/\mu_2) - \dots}}}
 \end{aligned}$$

où  $\oplus$  denote fraction continue. En tronquant la fraction continue au niveau  $n$ , et en écrivant ceci comme une fraction, on arrive au approximant de Padé.

Ou, au lieu de tronquer la fraction continue au niveau  $n$ , assurons le fait que 0 soit un pole de  $p_0^*(s)$  (ce qui est nécessaire, car  $\lim_{s \rightarrow 0} s p_0^*(s) = \pi_0$ ), en choisissant  $\frac{p_{n+1}^*}{p_n^*}$  comme l'unique constante  $\gamma_n$  qui rend  $s$  une racine du denominateur. Un calcul simple montre que cette constante doit être  $\rho_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}$ , tel que le dernier denominateur inclu soit  $s + \mu_n$ . Les fractions ainsi obtenues seront de la forme

$$\frac{A_n}{s} + \frac{a_{n-1}(s)}{b_n(s)} \quad (3.7) \quad \boxed{\text{res}}$$

où  $A_n = (1 + \rho_1 + \rho_1\rho_2 + \dots \prod_{i=1}^n \rho_i)^{-1}$  sont des approximations de la probabilité stationnaire  $\pi_0$  et les transformées inverses de  $\frac{a_{n-1}(s)}{b_n(s)}$  approximent la partie transitoire.

**Exemple 3.8.1** Pour le cas de la file  $M/M/1$  avec coefficients constants  $\lambda_i = \lambda, \forall i \geq 0, \mu_i = \mu, \forall i \geq 1$ , on a  $\mu p_1^* - p_0^*(s + \lambda) + 1 = 0$ , la normalisation

$$\sum_n p_n^*(s) = 1/s$$

et la récurrence pour  $j \geq 1$  est :

$$\mu p_{j+1}^* - (s + \lambda + \mu) p_j^* + \lambda p_{j-1}^* = 0.$$

Comme une des racines de  $\mu\alpha^2 - (\mu + \lambda + s)\alpha + \lambda = 0$  est toujours plus grande que 1, on conclut que

$$p_n^*(s) = p_0^*(s)\alpha_1(s)\alpha(s)^{n-1}$$

où  $\alpha_1(s) = \frac{p_1^*(s)}{p_0^*(s)}$ , et  $\alpha(s)$  est l'unique racine de  $\mu\alpha^2 - (\mu + \lambda + s)\alpha + \lambda = 0$  qui est plus petite que 1 pour chaque  $s \geq 0$  (et qui coincide avec la transformée de Laplace  $V^*(s)$  de la "période occupée" multipliée par  $\mu\lambda^{-1}$ ). Finalement, tenant compte de la normalisation et de la première équation, on trouve :  $\alpha_1 = \frac{\lambda(1-\alpha)}{s+\mu(1-\alpha)} = \alpha$ , et

$$p_n^*(s) = \frac{(1-\alpha)\alpha(s)^n}{s}, \quad p_0^*(s) = \frac{1-\alpha(s)}{s} = \frac{\alpha}{\lambda - \mu\alpha} = \mu^{-1} \frac{V^*}{1 - V^*}$$



# Chapitre 4

## The Cramér-Lundberg and Levy risk models

### 4.1 Introduction

The problem of approximating the distribution of sums of independent random variables and the related "gambler's ruin" problem, first studied by Bernoulli, DeMoivre, Fermat, Huyghens, Laplace, Lagrange, Pascal, etc., are masterpieces of applied probability. The second problem, also known as "first passage problem", is central to numerous applications in actuarial science, telecommunications, mathematical finance, etc., and has stimulated many illustrious mathematicians, among which are Thiele (differential equation, interpolation formula), Gram (Gram-Charlier expansion), Lundberg, Cantelli, Cramér, Erlang, de Finetti, Segerdahl, Wald and Thorin.

For extensive references, see e.g. Borovkov (1976), Prabhu (1997), Rolski et al. (1999), and Asmussen (2000), (2003).

**The Cramer-Lundberg risk model.** The "bird's eye's view" of the "actuarial ruin problem" is captured by the so called "Cramér Lundberg risk model" <sup>CLmod</sup> (7) :

$$X(t) = u + c t - C(t) := u + c t - \sum_{i=1}^{N(t)} C_i \quad \text{where :} \quad (4.1) \quad \boxed{\text{CLmod}}$$

- $X(0) = u$  denotes the initial reserves of the risk process
- $c$  is the premium rate per unit of time.
- The IID nonnegative RVs  $C_i$  with CDF  $B(u)$  model the "claims",  $N(t)$  is an independent Poisson process with intensity  $\lambda > 0$  counting the number of claims, and the compound Poisson process  $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$  models the "cumulative claims".

**Remarque 4.1.1** *The case of practical interest is when the net profit rate  $p = c - \mathbb{E}C(1)$  is positive. The relative profit with respect to the expenses*

$$\theta = \frac{c - \mathbb{E}C(1)}{\mathbb{E}C(1)} = \frac{p}{\mathbb{E}C(1)}$$

*is called relative safety loading. The premium rate may be decomposed as*

$$c = \mathbb{E}C(1) + p = (1 + \theta) \mathbb{E}C(1).$$

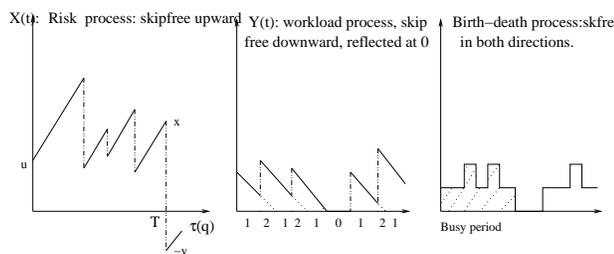


FIG. 4.1 – Skip-free (spectrally one sided) processes

**Remarque 4.1.2** *A different perspective is obtained studying instead the "aggregate loss random variable"*

$$Y(t) = u - X(t) = C(t) - c t$$

*representing the excess of claims over the profit. Note that the process  $Y(-t)$  obtained by reversing also the time has the same finite dimensional distributions as  $X(t)$ .*

*The spectrally positive process  $Y(t)$  is also of interest in queueing theory, where it is used to model the M/G/1 queue workload <sup>§</sup>.*

**Remarque 4.1.3** *The processes  $X(t), Y(t)$  are particular examples of spectrally negative and spectrally positive Levy processes. Many results about the Cramér Lundberg process, when expressed in terms of the "Laplace exponent/symbol"*

$$\kappa(s) = \log \mathbb{E}_0 e^{sX(1)},$$

*continue to be valid under this greater generality.*

**Remarque 4.1.4** *A natural discrete space analogue is to assume  $u \in \mathbb{N}$ , and to replace the premium and claims with a combined random walk with an "upwards skip-free" distribution  $p_k$ ,  $k \in \{1, 0, -1, -2, \dots\}$ .*

## 4.2 The ruin problem

Let  $T$  be the first passage time of a stochastic process  $X$  below 0 :

$$T := \inf\{t \geq 0 : X(t) < 0\} = \inf\{t \geq 0 : Y(t) > u\} = \tau_Y(u).$$

The objects of interest in ruin theory are the "finite-time" and "ultimate" ruin probabilities

$$\begin{aligned} \Psi(t, u) &= P_u[T \leq t] = P[\tau_Y(u) \leq t], \\ \psi(u) &= P_u[T < \infty], \end{aligned}$$

and the related "survival" and "late ruin" probabilities

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(t, u) &= P_u[T > t] = 1 - \Psi(t, u) \\ \tilde{\Psi}(t, u) &= P_u[t \leq T < \infty] = \psi(u) - \Psi(t, u). \end{aligned}$$

<sup>§</sup>In this case, one is interested in the reflected process  $Y(t) - \inf_{s \leq t} Y(s)$  describing the buffer content. The stationary distribution of the M/G/1 workload coincides with the eventual ruin probability.

The ultimate survival and ruin probabilities are respectively the cumulative and complementary cumulative distributions of the maximal deficit  $\bar{Y} = \sup_{0 \leq s < \infty} Y(s)$  :

$$\bar{\psi}(u) = P[\bar{Y} \leq u], \quad \psi(u) = P[\bar{Y} > u]$$

The finite-time ruin probabilities are very seldom available analytically ; one natural way to approximate them is by computing and inverting their Laplace transform  $\int_0^\infty e^{-qt} \Psi(dt, u)$ , which may be also viewed cf. (??) as the probability of passage of the process "killed" after an independent exponential random variable  $\mathcal{E}_q$  of rate  $q$ . Putting

$$\bar{Y}(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} Y(s), \quad \bar{Y}_q = \sup_{0 \leq s \leq \mathcal{E}_q} Y(s),$$

we may define the killed survival and ruin probabilities as the cumulative and complementary cumulative distributions of these random variables :

$$\begin{aligned} \psi_q(u) &:= P[\bar{Y}_q > u] = P_u[T \leq \mathcal{E}_q] \\ &= \int_0^\infty q e^{-qt} P_u[T \leq t] dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-qt} \Psi(dt, u) = E_u e^{-qT} \end{aligned}$$

(Note the various equivalent probabilistic interpretations).

**Remarque 4.2.1** *Throughout, perpetual/killed versions will be indicated by suppressing the variable  $t$ /adding a subscript  $q$ .*

### 4.3 The Lévy exponent/symbol and its inverses

Let  $X$  denote a Lévy process, i.e. a process having independent, stationary increments, let  $\mathbb{E}_x, x \in \mathbb{R}$  denote the family of associated measures, and let  $\mathbb{E}$  denote the measure starting from 0. The property of i.s.i. implies the multiplicativity in time of the moment generating function of a Lévy process  $X$  :

$$\mathbb{E} e^{\theta X(s+t)} = \mathbb{E} e^{\theta X(s)} \mathbb{E} e^{\theta X(t)}$$

for all  $\theta$  in some open domain

$$\mathcal{D}om = \{\theta \in \mathbb{C} : \kappa(\theta) < \infty\} = (\underline{\theta} + i\mathbb{R}, \bar{\theta} + i\mathbb{R}),$$

which includes the imaginary axis. The law of  $X$  is determined by the **Laplace exponent/cumulant generating function/symbol/kernel**  $\kappa(\theta)$  :

$$\kappa(\theta) := \log(\mathbb{E}[e^{\theta X(1)}])$$

and the map  $\theta \mapsto \kappa(\theta)$  restricted to the interval  $\mathcal{D}om_{\mathbb{R}} := (\underline{\theta}, \bar{\theta})$  is a convex differentiable function. By  $[\kappa'_+(\theta)]\kappa'(\theta)$  we denote the [right-]derivative of  $\kappa$  at  $\theta$ .

**Note :** For Cramer Lundberg processes, the symbol is given by

$$\kappa(s) = cs(1 - \rho b_e^*(s)),$$

where  $b_e(x) := \frac{\bar{B}(x)}{m_1}$ ,  $b_e^*(s)$  denote the stationary excess claim distribution and its Laplace transform, and  $\rho = \frac{\mathbb{E}C(1)}{c}$  (this is sometimes called "geometric compounding parameter", due to its role in the Benes-Pollaczek-Khinchine decomposition -see [7]- of ruin probabilities as geometric sums).

Related important functions are the roots of the Cramér-Lundberg equation :

$$\kappa(\theta) - q = 0 \iff \mathbb{E} e^{\theta X(1)} = e^q \quad (4.2) \quad \boxed{\text{CLEq}}$$

and the two inverse functions of  $\kappa(\theta)$

$$\theta_{\pm} = \overleftarrow{\kappa}_{\pm}(q), q \in \kappa[\text{Dom}_{\mathbb{R}}],$$

i.e. the largest and smallest solutions of the CL equation for  $q \in \mathbb{R}$  belonging to the analyticity band around the origin.

**Example 4.3.1** *The cumulant exponent of the Cramér-Lundberg model  $Y(t) = Y(0) + \sigma_0 W(t) + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$  perturbed by Brownian motion  $\sigma W(t)$  is :*

$$\kappa(\theta) = \frac{\sigma^2 \theta^2}{2} + c\theta + \lambda(b^*[\theta] - 1) = \theta \left( \frac{\sigma^2 \theta}{2} + c - \lambda \bar{B}^*(\theta) \right),$$

*reflecting the Levy-Khinchine decomposition into diffusion, drift and jump part.*

*With  $\sigma = 1$  and no jumps, the Cramér-Lundberg equation is quadratic, with roots :*

$$\overleftarrow{\kappa}_{\pm}(q) = -c \pm \sqrt{c^2 + 2q}$$

Finally, note the fundamental relation between the operator and symbol

$$\mathcal{G}e^{su} = \kappa(s)e^{su}$$

(which may be interpreted formally as  $\mathcal{G} = \kappa(D)$ , where  $D$  is the first derivative).

## 4.4 Backward Kolmogorov (generator) equations

Under the markovian model (4.1), the ruin and survival probabilities satisfy "morally" Kolmogorov equations :

$$\mathcal{G} \Psi(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x), \quad \Psi(t, x) = 1_{\{x < 0\}}, \quad \Psi(t, \infty) = 0 \quad (4.3) \quad \boxed{\text{CK}}$$

$$\mathcal{G} \bar{\Psi}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Psi}(t, x), \quad \bar{\Psi}(t, x) = 0, x < 0, \quad \bar{\Psi}(t, \infty) = 1 \quad (4.4)$$

where  $\mathcal{G} g(x) = c \frac{\partial}{\partial x} g(x) + \lambda \int_0^{\infty} g(x - z) F_C(dz) - \lambda g(x)$  § .

§These equations, valid formally for any Markov process, may be obtained by using a "dictionary" associating Markov processes to their generator operators. The Kolmogorov equations are easiest to establish for discrete time random walks, when they reduce to recurrences. The continuous time case (while just a limit of the discrete one) involves further technical issues like establishing conditions to ensure the existence of solutions in a classical sense rather than in the sense of generalized functions – see below. Note also that the generator of a Levy process, which is a integro-differential operator, maybe be viewed formally as  $G = \kappa(D)$ , where  $D$  is the first derivative, where  $\kappa$  is the "symbol" of the operator and where this expression is to be interpreted in the sense of pseudo-differential operators.

The Kolmogorov partial integro-differential equations above are seldom tractable analytically.

Slightly easier to solve (and derive) is the perpetual version :

$$\mathcal{G} \psi(x) = 0, \quad \psi(t, x) = 1_{\{x < 0\}}, \quad \psi(t, \infty) = 0 \quad (4.5) \quad \boxed{\text{harmr}}$$

Putting  $\tilde{\mathcal{G}}h(x) = ch'(x) + \lambda(\int_0^x h(x-z)f_C(z)dz - h(x))$  and taking into account the respective boundary conditions, the IDE equations may also be written as :

$$\tilde{\mathcal{G}}\psi(x) + \lambda\bar{F}_C(x) = 0 \quad \tilde{\mathcal{G}}\bar{\psi}(x) = 0 \quad (4.6) \quad \boxed{\text{shar}}$$

Furthermore, we see by taking Laplace transform of the time dependent equation that the killed ruin probabilities are a (positive decreasing) solution of the **Feynman-Kac/Sturm-Liouville** equation

$$\mathcal{G}_q\psi_q(x) := \mathcal{G}\psi_q(x) - q\psi_q(x) = 0. \quad (4.7) \quad \boxed{\text{SL}}$$

This equation may be solved by a second Laplace transform in  $x$ , and the answer may be expressed in terms of the "symbol" of the risk model.

**Note :** The killed ruin probability is a particular case of Gerber-Shiu (expected discounted) penalty  $\psi_q^{(g)}(u) = E_u e^{-qt} g(Z(\tau))$  satisfying the Sturm-Liouville equation (??) with boundary values  $\psi_q^{(g)}(u) = g(u), u < 0$ . For regularity conditions ensuring the existence of solutions of (??) in the classical sense, as well as for methods of solution in the case of phase-type jumps, see <sup>CLS</sup>(?).

## 4.5 The Pollaczek-Khinchine Laplace transform formula

The integro-differential equation (4.6) may be solved applying the Laplace transform. We find :

$$\psi(s) = \frac{c\psi(0) - \lambda\bar{F}^*(s)}{cs - \lambda s\bar{F}^*(s)} = \frac{c\psi(0) - \lambda\bar{F}^*(s)}{\kappa(s)}$$

Note that  $\lim_{s \rightarrow 0} \psi^*(s) = \int_0^\infty \psi(u)du$ . Since  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$ , it is plausible and indeed true under weak conditions that  $\psi^*(0)$  is well defined, i.e. that the apparent singularity at 0 of  $\psi^*(s)$  must "simplify". Assuming this for the moment, this yields the ruin probability starting from 0 as

$$\psi(0) = \frac{\lambda \int_0^\infty F(x)dx}{c} := \rho,$$

and it turns out that this is indeed true whenever

$$m_1 := \int_0^\infty F(x)dx = \int_0^\infty xf(x)dx < \infty.$$

**Proposition 3** *For Cramér Lundberg processes, the ruin probability starting from 0 is*

$$\psi(0) := \rho = \lim_{s \rightarrow \infty} s\psi^*(s) = \frac{\mathbb{E}C(1)}{c},$$

( $\rho$  is sometimes called "geometric compounding parameter" (due to its role in the Benes-Pollaczek-Khinchin decomposition of ruin probabilities as geometric sums—see [\(7?\)](#)) and [\(100\)](#))

$$\bar{\psi}(0) = P_0[\bar{Y} = 0] = 1 - \rho = \frac{\kappa'(0)}{c}.$$

In conclusion

$$\begin{aligned} \psi^*(s) &= \int_0^\infty e^{-su} \psi(u) du = \frac{\lambda m_1 - \lambda \bar{F}^*(s)}{\kappa(s)} = \frac{1}{s} - \frac{\kappa'(0)}{\kappa(s)} = \frac{1}{s} - \frac{\rho}{\kappa(s)}, \\ \iff \bar{\psi}^*(s) &= \int_0^\infty e^{-su} \bar{\psi}(u) du = \frac{\kappa'(0)}{\kappa(s)} = \frac{1 - \rho}{s(1 - \rho b_e^*(s))} \end{aligned} \quad (4.8) \quad \boxed{\text{PK}}$$

Note also that  $\bar{\psi}^*(s) = \int_0^\infty e^{-su} P[\bar{Y} \leq u] du = s \int_0^\infty e^{-su} f_{\bar{Y}}(u) du = \frac{1 - \rho}{s(1 - \rho b_e^*(s))}$ . Finally, we obtain the famous Pollaczek-Khinchine formula for the Laplace transform of the density of the supremum of a **spectrally positive Levy process** :

$$\phi(s) = \int_0^\infty e^{-su} f_{\bar{Y}}(u) du = \frac{1 - \rho}{1 - \rho b_e^*(s)}, \quad (4.9) \quad \boxed{\text{PKf}}$$

where  $\phi(s)$  is defined by  $\bar{\psi}^*(s) = \frac{\phi(s)}{s} \iff \psi^*(s) = \frac{1 - \phi(s)}{s}$  § .

In conclusion, a careful treatment of the singularity at 0 finds simultaneously the Laplace transform and the "auxiliary boundary unknown"  $\psi(0)$ .

## 4.6 Exponential claims

**Exemple 4.6.1** With exponential claim sizes of intensity  $\mu$ , the ultimate ruin probability is :

$$\psi(x) = \rho e^{-\gamma x}. \quad (4.10) \quad \boxed{\text{expruin}}$$

Here  $-\gamma = -\mu + \lambda/c > 0$  is the unique negative root of the Cramér Lundberg equation :

$$\kappa(s) = 0, \quad (4.11) \quad \boxed{\text{CL}}$$

with  $\kappa(s) = \log(\mathbb{E}_0 e^{sX(1)}) = cs - \lambda s/(\mu + s)$  being the "cumulant generating function/Laplace exponent/symbol" of the process  $X(t)$  –see below, and

$$\rho = -\frac{\kappa'(0)}{\kappa'(-\gamma)} = \frac{\lambda}{\mu c} < 1. \quad (4.12) \quad \boxed{\text{CLct}}$$

It turns out that whenever a negative solution  $-\gamma$  of (4.24) exists, the expression  $-\frac{\kappa'(0)}{\kappa'(-\gamma)} e^{-\gamma x}$  is asymptotic to  $\psi(x)$  ! This is the famous Cramér Lundberg approximation.

The ruin probability killed at rate  $q$  is also exponential :

$$\psi_q(x) = \left(1 + \frac{s_-}{\mu}\right) e^{xs_-} = \frac{\lambda/c}{\mu + s_+} e^{xs_-},$$

the exponent being the unique negative root of the Cramér Lundberg equation :

$$\kappa(s) = q, \quad (4.13) \quad \boxed{\text{CLq}}$$

which reduces here to the quadratic equation  $cs^2 + s(c\mu - \lambda - q) - q\mu = 0$ .

§in fact,  $\phi(s)$  has a probabilistic interpretation, being one of the two factors of the celebrated Wiener-Hopf decomposition –see [\(7?\)](#), and  $\phi(s) = \mathbb{E}[e^{-s\bar{Y}}] = P[\bar{Y} = 0] + \int_0^\infty e^{-su} f_{\bar{Y}}(u) du = s\bar{\psi}^*(s) = \frac{\kappa'(0)s}{\kappa(s)}$

Solving the IDE (??) in this case may be achieved either by either

- Inverting the Laplace transform (4.15) by partial fractions :

$$\begin{aligned} \psi^*(s) &= \int_0^\infty e^{-su} \psi(u) du = \frac{c\psi(0) - \lambda \frac{1}{s+\mu}}{s(c - \frac{\lambda}{s+\mu})} = \frac{s\psi(0) + \psi(0)\mu - \lambda/c}{s(s + \mu - \lambda/c)} \\ &= \frac{A}{s + \mu - \lambda/c} + \frac{B}{s} \iff \psi(x) = Ae^{-x(\mu - \lambda/c)} + B \end{aligned}$$

Note that the net profit condition  $\mu - \lambda/c > 0$  and  $\psi(\infty) = 0$  imply  $B = 0$ . Thus,  $s$  must simplify in the fraction above and therefore the relation

$$\psi(0) = \frac{\lambda\mu^{-1}}{c} = \frac{\lambda EC_1}{c}$$

must hold. This relation turns out to be true for the Cramer Lundberg model with arbitrary claims distribution having finite mean!

Letting  $l = c - \lambda EC_1$  denote the "loading per time unit", we conclude that  $\psi(0)$  and  $\bar{\psi}(0)$  are proportional respectively to the expected payments and loading per time unit.

- Solving the Sturm-Liouville IDE equation (4.7) by reducing it to a ODE with constant coefficients and then looking for combinations of exponentials (or "looking directly")
- by probabilistic approaches like the general "ladder decomposition" for the Cramer Lundberg process due to Dubordieu(1952)-Benes(1957)-Kendall(1957) (4.21) or martingale stopping -see below.

**Notes :** 1) Replacing the initial risk process (4.1) by one with exponential claims and identical first three moments, and applying the simple exponential claims formula (4.10) yields the "simple DeVyllder approximation" in terms of the first three moments of the claims distribution. This was slightly extended by Ramsay (Ram92) using mixed exponential claims of order two; the result however is not that simple anymore, due to the complicated moment matching and of the dependence of the Cramer-Lundberg roots  $r_i$  on the moments.

2) For Gamma claims with shape parameter  $\alpha < 1$ , the ultimate and killed ruin probabilities are also explicit (due to Thorin), though rather complicated – see Grandell & Segerdahl (GS) (?).

**Exemple 4.6.2** *Let us estimate now the eventual ruin probabilities by a Bayesian approach, assuming an exponential distribution with uncertain parameter  $\mu$ , which has a prior Gamma distribution  $\Gamma_{\alpha,\beta}(d\mu)$ .*

*After  $n$  observations  $\vec{C} = (C_1, \dots, C_n)$ , the posterior density of  $\mu$ ,  $f(\mu|\vec{c})$  is*

$$\Gamma_{\alpha+n,\beta+S_n}(d\mu),$$

*where  $S_n = \sum_{i=1}^n c_i$ , and the Bayes estimates of  $\mu$  and  $m = \mu^{-1}$  are :*

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_n &= \int \mu f(\mu|\vec{C}) d\mu = \frac{n + \alpha}{S_n + \beta}, \\ \hat{m}_n &= \int \mu^{-1} f(\mu|\vec{C}) d\mu = \frac{S_n + \beta}{\alpha + n - 1}. \end{aligned}$$

The unconditional distribution of a claim  $C_1$  is Pareto, with cdf :

$$\bar{F}_{\alpha,\beta}(x) = \int_0^\infty e^{-\mu x} \frac{(\beta\mu)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta\mu} \beta d\mu = (1+x/\beta)^{-\alpha}, \alpha, \beta > 0,$$

with mean  $\frac{\beta}{\alpha-1}$ , and the unconditional density of  $n$  claims  $C_1, \dots, C_n$  is

$$f(\vec{c}) = f_{\vec{c}}(\vec{c}) = \frac{(\alpha)_n}{\beta^n (1 + S_n/\beta)^{n+\alpha}} = \frac{(\alpha)_n \beta^\alpha}{(\beta + S_n)^{n+\alpha}},$$

where  $(\alpha)_n$  is the Pochhammer symbol. It follows that the posterior distribution of one additional observation is

$$\begin{aligned} f(x|\vec{c}) &= \frac{f(x, \vec{c})}{f(\vec{c})} = \frac{(\alpha)_{n+1} (\beta + S_n)^{n+\alpha}}{(\alpha)_n (\beta + S_n + x)^{n+\alpha+1}} \\ &= \frac{(\alpha + n)}{(\beta + S_n)(1 + x/(\beta + S_n))^{n+\alpha+1}}, \end{aligned}$$

i.e. Pareto with parameters  $\alpha + n, \beta + S_n$ . It is easy to check that assuming an exponential density with known rate  $\mu_0$ , the heavy tailed Pareto posterior distributions will converge to the true exponential density when  $n \rightarrow \infty$ .

Finally, from (4.10), putting  $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{c}$ , the "Bayes Pareto predictive ruin probability" is

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_n(u) &= \int_0^\infty \frac{\tilde{\lambda}}{\mu} e^{-(\mu-\tilde{\lambda})u} \frac{((\beta + S_n)\mu)^{(\alpha+n)-1}}{\Gamma(\alpha + n)} e^{-(\beta+S_n)\mu} (\beta + S_n) d\mu \\ &= \frac{\tilde{\lambda} e^{\tilde{\lambda}u}}{\Gamma(\alpha + n)} \frac{(\beta + S_n)^{(\alpha+n)}}{(u + \beta + S_n)^{(\alpha+n-1)}} \Gamma(\alpha + n - 1) \\ &= \tilde{\lambda} e^{\tilde{\lambda}u} \frac{\beta + S_n}{\alpha + n - 1} \frac{1}{(1 + \frac{u}{\beta+S_n})^{(\alpha+n-1)}} \\ &\approx \frac{\lambda(S_n + \beta)}{c(\alpha + n - 1)} e^{u(\frac{\lambda}{c} - \frac{\alpha+n-1}{S_n+\beta})} = \frac{\lambda \hat{m}_n}{c} e^{u(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\hat{m}_n})}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Bayruin

Note that on the other hand, the Pareto ruin probability is considerably more complicated (which may serve as argument for the Bayesian point of view of replacing a fixed model by a dynamically evolving one).

Extending this approach to more complicated claims distributions would be quite useful. For example, the Gamma prior is also a conjugate prior for the Gamma and Pareto distribution. However, for these distributions **we do not have exact formulas** for ruin probabilities (with the exception of the Gamma with integer order, which has rational Laplace transform— see below).

**Remarque 4.6.1** The Sparre-Andersen model raises simultaneously the statistical challenge of estimating the distribution of a sequence of catastrophes, and the probabilistic challenge of computing the distribution of first-passage times. In practice, one may meet situations where there is also a stochastic evolution without isolated jumps, between the catastrophes. For that component, one may use a Levy model with infinite mass, a continuous diffusion model, or a mixture of both. Choosing one of these alternatives is a dilemma facing the modeller.

In conclusion, to estimate ruin probabilities, one needs to estimate the distribution of the claims and interarrival times (and of eventual evolutions between jumps), and then, using these as input, compute the ruin probabilities for the estimated model, by solving Kolmogorov's equations.

## 4.7 Rational symbols

The final result of the analytic approach is to yield Laplace transforms ; for example, the Laplace transform of the perpetual survival probability is given by the famous Pollaczek-Khinchin formula :

$$\bar{\psi}^*(s) = \int_0^\infty e^{-su} \bar{\psi}(u) du = \int_0^\infty e^{-su} P[\bar{Y} \leq u] du = \frac{\kappa'(0)}{\kappa(s)} \quad (4.15) \quad \boxed{\text{PK1}}$$

where  $\kappa(s)$  is the "symbol" of the process.

From the Pollaczek-Khinchine formula(4.15), it may be seen that if the claims have a rational Laplace transform

$$\bar{B}^*(s) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} a_k s^k}{s^K + \sum_{k=0}^{K-1} b_k s^k}, \quad (4.16) \quad \boxed{\text{Lappar}}$$

then the same will be true of the Laplace transform of  $\bar{Y}$  and of the ultimate ruin probability. In this case, the Laplace transform may be inverted explicitly, either by a) the matrix-exponential formalism, or by b) splitting into partial fractions, yielding mixtures of exponentials involving the roots of the Cramer-Lundberg equation <sup>§</sup>.

**Exemple 4.7.1 The matrix exponential formalism.** *For light tailed claims with rational Laplace transform (4.16), the distribution may also be expressed in "matrix exponential" form*

$$\bar{B}(x) = \beta e^{Bx} \mathbf{1}, \quad \iff \bar{B}^*(s) = \beta (s\mathbf{I} - B)^{-1} \mathbf{1} \quad (4.17) \quad \boxed{\text{matexp}}$$

with  $B$  a matrix of order  $K$  –see for example <sup>AsmBla</sup>(?).

This representation renders Laplace inversion unnecessary, and the ruin probability is "explicit" (see <sup>Asm</sup>(?)) :

$$\psi(u) = \boldsymbol{\eta} e^{Qu} \mathbf{1}, \quad \text{where } Q = B + (-B)\mathbf{1}\boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta} = \beta(-B)^{-1}. \quad (4.18) \quad \boxed{\text{phaseruin}}$$

Note though that the matrix exponential representation is overparameterized ( $K^2$  parameters instead of the  $2K$  parameters of the Laplace transform). Since the claims distribution is never certain, and the statistical estimation of matrix-exponential or phase-type representations is a notoriously difficult problem, the formula (4.18) is not necessarily the best way to approach the problem.

**Exemple 4.7.2** *Suppose the claims are mixtures of distinct exponentials with positive or negative weights*

$$\bar{B}(x) = \sum_{i=1}^I \beta_i e^{-b_i x}, \quad \sum_i \beta_i = 1, \quad b(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

(with mean  $m_1 = \sum_{i=1}^I \beta_i b_i^{-1}$ ).

Let us apply the Pollaczek-Khinchin formula, exploiting the fact that for Cramér Lundberg processes, the symbol  $\kappa(s) = \log(\mathbb{E}_0 e^{-sX(1)})$  may be written as  $\kappa(s) = s(c - \lambda \bar{B}^*(s))$ .

---

<sup>§</sup>For non-rational symbols, the task of Laplace inversion is more challenging ; for example, the case of lognormal claims is not so straightforward.

Let  $b_e(x) = \bar{B}(x)/m_1 = \sum_{i=1}^I \tilde{\beta}_i e^{-b_i x}$ , where  $\tilde{\beta}_i = \beta_i/m_1$ , denote the "stationary excess density/integrated tail/ladder distribution", and let  $b_e^*(s)$  denote it's Laplace transform.

Let  $l(s) = \frac{\kappa(s)}{s} = c - \lambda \bar{B}^*(s)$ , (this is the reciprocal of the Wiener-Hopf factor  $\phi^-(s)$ ) and let  $-r_i, r_i > 0, i = 1, \dots, I$  denote the non-zero (negative) roots of the "simplified Cramér Lundberg" equation :

$$0 = l(s) \iff \frac{c}{\lambda} = \bar{B}^*(s) \iff b_e^*(s) = \rho^{-1} = 1 + \theta \iff c - \lambda \sum_{i=1}^I \beta_i \frac{1}{b_i + s} = 0$$

Decomposing in simple fractions the Pollaczek-Khinchine formula (4.8) it follows that :

$$\psi^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{l(0)}{sl(s)} = \frac{1}{s} - \left( \sum_{i=1}^I \frac{C_i}{s + r_i} + \frac{1}{s} \right) = \sum_{i=1}^I \frac{C_i}{r_i + s}$$

and therefore

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^I C_i e^{-r_i x} \quad \text{where } C_i = -\frac{\kappa'(0)}{\kappa'(-r_i)} \quad (4.19) \quad \boxed{\text{CLconst}}$$

Therefore,

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^I C_i e^{-r_i x} \quad (4.20) \quad \boxed{\text{Ch}}$$

and thus finding the ruin probability reduces to solving the "simplified Cramér Lundberg" equation (??), simple fractions decomposition and applying the explicit formula (4.20). Of course, the first task can only be achieved analytically in particular cases <sup>§</sup>.

**Example 4.7.3** Let  $c = 1, \lambda = 2$ , and  $\bar{B}^*(s) = \frac{1}{4} \frac{1}{2+s} + \frac{3}{4} \frac{1}{4+s}$ . The "simplified symbol" is :

$$l(s) = 1 - 2 \left( \frac{1}{4} \frac{1}{2+s} + \frac{3}{4} \frac{1}{4+s} \right) = \frac{4(1+s)(3+s)}{3(s+2)(s+4)} \implies r_1 = 1, r_2 = 3$$

and the coefficients  $C_i$  (obtained for example by partial fractions of  $\psi^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{3(s+2)(s+4)}{8s(1+s)(3+s)}$ , or by (4.19)) are :  $C_1 = 9/16, C_2 = 1/16$ .

Alternatively, the Cauchy matrix is  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2-1} & \frac{1}{2-3} \\ \frac{1}{4-1} & \frac{1}{4-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$  and the coefficients  $C_i$  may be obtained from the system

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

<sup>§</sup>To get examples of this situation, consider the case when  $b_i$  and the roots  $r_i$  are integers (for example, chose  $r_i$  arbitrary under the necessary constraints  $0 < r_1 < b_1 < r_2 \dots < b_I$ ).

Form next the "Cauchy matrix"  $C_A$  denote with elements  $\frac{1}{b_i - r_k}, i, k = 1, \dots, I$ , which intervenes naturally, since the Cramér Lundberg equation may also be written in system form  $\beta C_A = \frac{c}{\lambda} \mathbf{1}$  where  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_I)$ . Note now that 1) the vector  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_I)$  satisfies the linear system  $C_A \mathbf{C} = \mathbf{b}^{(-1)}$  where  $\mathbf{b}^{(-1)} := (b_1^{-1}, \dots, b_I^{-1})$ , and thus is completely determined once  $b_i$  and  $r_i$  have been chosen.

2) Furthermore, we may determine  $\psi(0) = \sum_i C_i$  and the safety loading  $\theta$ . The equation  $c = \lambda m_1(1 + \theta)$  fixes then the quotient  $c/\lambda$ .

3) Finally,  $\beta$  may be computed from (??).

Note, by the Pollaczek-Khinchine formula (4.9), that the ultimate ruin probabilities are independent of  $c$ , once  $\rho$  is fixed (since they are completely determined by  $\phi(s)$ ). The classical Cramer Lundberg model is thus overparameterized as far as ultimate ruin probabilities are concerned, and by scaling time we may normalize any nonzero parameter like  $c$  or  $\lambda$  to be 1.

**Exercice 4.7.1** Soit  $Y(t)$  un processus de Cramér-Lundberg  $Y(t) = u + ct - C(t)$ ,  $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ , où  $N(t)$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda = 1$ , et les sinistres  $Z_i$  ont une distribution hyperexponentielle  $\bar{F}(x) = \frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{5}{6}e^{-6x}$ .

a) Calculez l'espérance des sinistres  $m_1 = \mathbb{E}Z_1$  et le taux de profit  $p = c - \lambda m_1$ , si le taux de cotisation est  $c = 3m_1/2$ .

b) Calculez la probabilité de ruine  $\psi(u)$ , à partir de la formule de Pollaczek-Khinchin pour sa transformée de Laplace

$$\psi^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{p}{\kappa(s)},$$

où le symbole/exposant de Lévy est  $\kappa(s) = s(c - \lambda \bar{F}^*(s))$ . **R** :  $\frac{5}{9}e^{-x} + \frac{1}{9}e^{-4x}$

**Exercice 4.7.2** Calculez la probabilité de ruine  $\psi(u)$  pour un processus de Cramér-Lundberg  $Y(t) = u + ct - C(t)$ ,  $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ , où  $N(t)$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda = 1$ ,  $c = 8/5m_1$ , et les sinistres  $Z_i$  ont une distribution hyperexponentielle  $\bar{F}(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{3}{4}e^{-4x}$ .

**Exercice 4.7.3** Calculez la probabilité de ruine  $\psi(u)$  pour un processus de Cramér-Lundberg  $Y(t) = u + ct - C(t)$ ,  $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ , où  $N(t)$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda = 1$ ,  $c = 10/7m_1$ , et les sinistres  $Z_i$  ont une distribution hyperexponentielle  $\bar{F}(x) = \frac{1}{9}e^{-2x} + \frac{8}{9}e^{-5x}$ .

**Exercice 4.7.4** Calculez la probabilité de ruine  $\psi(u)$  pour un processus de Cramér-Lundberg  $Y(t) = u + ct - C(t)$ ,  $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ , où  $N(t)$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda = 1$ ,  $c = 4/3m_1$ , et les sinistres  $Z_i$  ont une distribution hyperexponentielle  $\bar{F}(x) = \frac{1}{16}e^{-2x} + \frac{15}{16}e^{-6x}$ .

**Exercice 4.7.5** Calculez la probabilité de ruine  $\psi(u)$  pour un processus de Cramér-Lundberg  $Y(t) = u + ct - C(t)$ ,  $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ , où  $N(t)$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda = 1$ ,  $c = 5/3m_1$ , et les sinistres  $Z_i$  ont une distribution hyperexponentielle  $\bar{F}(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-5x}$ .

**Remarque 4.7.1** The formula (4.15) may be expanded in a geometric series, leading finally to the "Benés ladder decomposition formula" :

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \psi(0))\psi(0)^n b_e(x)^{*n} \quad (4.21) \quad \boxed{\text{BPK}}$$

with

$$\psi(0) = \frac{\lambda \mathbb{E}C_1}{c} = (1 + \theta)^{-1} := \rho$$

(the idea behind this is that the appearance of each new ladder is equivalent to the event of ruin starting from 0).

---

**Notes :** 1) This was first derived via the inversion of the Pollaczek-Khinchin formula (4.15) (by expanding it into a geometric series).

2) The Cramer-Lundberg equation may be written in this case as

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{i!} s^i = \theta \quad (4.22) \quad \boxed{\text{serCL}}$$

where  $\mu_i$  are the moments of the "stationary excess/normalized ladder" density  $b_e(x)$  :

$$\tilde{m}_i = \frac{m_{i+1}}{(i+1)m_1} \quad (4.23) \quad \boxed{\text{mts}}$$

A more complicated geometric series expansions is valid for the "perturbed" Cramér Lundberg processes.

3) The relation between ruin and the density of the minimum is clear at the level of partial fractions, the relations :

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^I C_i e^{-r_i x} \iff f_{\bar{Y}}(y) = \bar{\Psi}(0) \delta_0(y) + \sum_{i=1}^I C_i r_i e^{-r_i x}$$

## 4.8 Examen d'entraînement 1

1. Calculer les probabilités de ruine  $p_x, x \in \mathbb{N}$ , pour une marche sur les nombres naturels, avec la distribution de chaque pas donnée par :  $\{p_1 = \frac{6}{7}, p_{-1} = 0, p_{-2} = \frac{1}{7}\}$ . Vérifier la positivité du résultat.
2. Soit  $X_t$  une chaîne de Markov représentant le nombre de clients en attente dans un arrêt de bus, dans lequel à chaque instant  $t = 1, 2, \dots$  (en temps discret!) une seule personne arrive (ou pas) avec probabilité  $p < 1$ , et en suite le bus arrive (ou pas) avec probabilité  $q < 1$ , et prend tous les voyageurs (le dernier arrivé inclu).
  - a) Dessinez le graph de transitions de ce processus, en indiquant les probabilités  $\lambda$  et  $\mu$  pour que le nombre de voyageurs augmente et diminue respectivement, ainsi que la probabilité  $z$  pour que ce nombre reste inchangé. Donnez la matrice des probabilités de transition pour la chaîne  $X_t$ .
  - b) Calculez la distribution stationnaire de  $X_t$ .
  - c) Calculez, en utilisant un système de conditionnement, l'espérance en sortant de 0 du nombre des pas  $\tilde{T}_0$  jusqu'au premier retour en 0.
  - d) Reprenez les questions précédentes pour une file d'attente  $M(\lambda)/M(\mu)/1$ , dans laquelle le serveur **sert chaque fois simultanément tous les clients** qu'il trouve en attente dans le tampon (arrivés dans la file après le début de son dernier service). Plus précisément, donnez la matrice génératrice pour le processus  $X_t$ . Indiquer les valeurs des probabilités  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\mu}$  pour que le nombre de clients augmente/diminue, au moment du premier saut à partir d'un état  $n \geq 0$ . Reprenez ensuite les questions b), c).
3. On lance une pièce de monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à  $q$  et celle de sortir pile égale à  $p = 1 - q$ , jusqu'à ce qu'on obtient une suite pile-face-pile (arrivées consécutivement). Trouvez l'espérance  $n$  du nombre de pas  $N$  jusqu'à l'arrêt, (ou le nombre de jets, en incluant le dernier). *Indication* : On peut utiliser un processus de Markov qui retient l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu (et qui contient dans ce cas quatre états).
4. Soit  $X = (X_t; t \geq 0)$  un processus de Markov en temps continu sur l'ensemble  $\mathbb{N}$ , avec générateur infinitésimal  $Gf(x) = \mu_1(f(x+1) - f(x)) + \mu_{-1}(f(x-1) - f(x)) + \mu_{-2}(f(x-2) - f(x)), x \geq 2$  avec  $\mu_1 = 1/2, \mu_{-1} = 1/8, \mu_{-2} = 3/8$ , et avec les passages impossibles en 1 et 0 étant anulés (i.e.  $Gf(1) = \mu_1(f(2) - f(1)) + \mu_{-1}(f(0) - f(1))$  et  $Gf(0) = \mu_1(f(1) - f(0))$ ). Résolvez les équation de récurrence  $Gc(x) + h(x) = 0, x \geq 1, c(0) = 0$  satisfaites par le temps de vidage  $T = T_0 = \inf\{t : X(t) \leq 0\}$  et le coût de vidage  $c(x) = \mathbb{E}_x \int_0^T X_s ds$ , obtenues respectivement pour  $h(x) = 1$  et  $h(x) = x$ . Montrez que

$$c(x) = t(x) \left( \frac{x+1}{2} + \gamma \right)$$

ou  $\gamma = \mathbb{E}_{ss} X_t$  est le coût moyen stationnaire de ce processus. Donnez une explication probabiliste de la partie  $w(x) = t(x) \frac{x+1}{2} = c(x) - \gamma t(x)$ .

5. On lance une monnaie biaisée jusqu'à la première fois quand une pile arrive après un nombre impaire de faces. Trouvez l'espérance  $n$  du nombre de pas de ce jeu, tenant compte aussi de la dernière pile.

**Solutions :**

1. Les probabilités de ruine satisfont  $p_x = \frac{6}{7}p_{x+1} + \frac{1}{7}p_{x-2}, x \in \mathbb{N}$ . Elles sont des combinaisons de puissances  $\rho_x$ , avec  $\rho$  une racine de

$$\frac{6}{7}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{7} = (\rho - 1)\left(\frac{6}{7}\rho^2 - \frac{1}{7}\rho - \frac{1}{7}\right) = \frac{6}{7}(\rho - 1)(\rho - 1/2)(\rho + 1/3)$$

$p_x = A_1(\frac{1}{2})^x + A_2(\frac{-1}{3})^x$  satisfait  $p_0 = p_{-1} = 1$  ssi  $A_1 = 4/5, A_2 = 1/5$ .

2. a) Soit  $\lambda = p(1-q), \mu = q$ . On a  $z_0 = 1 - \lambda$ , et  $\forall n \geq 1, z_n = z = 1 - \lambda - \mu = (1-p)(1-q)$ . Le graph de communication est :

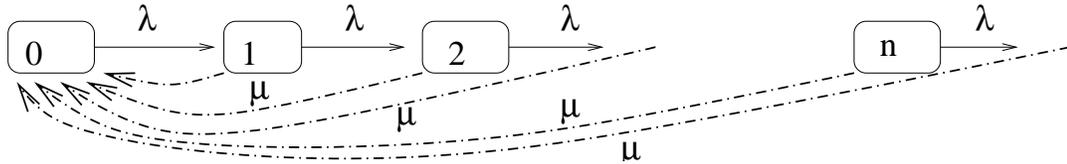


FIG. 4.2 – Exe 2 : Le serveur sert tous les clients

b) On trouve  $\pi_i = \lambda\pi_{i-1} + z\pi_i \iff \pi_i = \tilde{\lambda}\pi_{i-1}, i = 1, 3, \dots$ , avec  $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ , et donc  $\pi_i = \tilde{\lambda}^i\pi_0$ , où la constante de normalisation est  $\pi_0 = 1 - \tilde{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ .

c)  $t_0 = t^{(0)} + t_1$  où  $t^{(0)} = \lambda^{-1}$  et  $t_1 = t_2 = \dots = \mu^{-1}$ . Remarquez l'identité  $t_0 = \pi_0^{-1}/P_0[X_1 \neq 0]$ , valable pour toutes les chaînes ergodiques.

d)

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \\ \mu & 0 & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

3. Considerons le processus de Markov sur des états spécifiant les deux derniers résultats possibles :  $\{PF\}, \{*P\}, \{P^cF\}, \emptyset$ . Les deux inconnues  $x_1 = x_{\{*P\}}, x_2 = x_{\{P^cF\}}$  satisfont :

$$x_1 = 1 + px_1 + q * 0, x_2 = 1 + px_1 + q * x_2 \iff x_1 = q^{-1}, x_2 = x_1 + p^{-1} = q^{-1} + p^{-1}$$

4. Pour  $c(x) = E_x[\int_0^T X(t)dt]$  (coût totale de stockage) on trouve

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}c)(x) + x &= 0 \\ c(0) &= 0 \\ c(x) &\text{ accroit non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{G}x = \lambda - \mu$  et  $\mathcal{G}x^2 = 2x(\lambda - \mu) + \lambda + \mu$ , on trouve par la méthode des coefficients indéterminés que la solution est  $c(x) = \frac{x^2}{2(\mu - \lambda)} + \frac{x(\mu + \lambda)}{2(\mu - \lambda)^2}$

On trouve que  $c(x) = c_r(x) + \gamma t(x)$ . **Interpretation :** La première partie,  $c_r(x) = t(x)(\frac{x+1}{2})$  est la solution "fluide", qui utilise précisément la moyenne arithmétique des valeurs  $(x, x-1, \dots, 1)$ , comme si avant le vidage on aurait visité seulement ces valeurs, pour des durées de temps égaux. La deuxième partie suggère un "remplacement de la valeur moyenne à long terme 0 ("vue de loin") dans la solution fluide par la valeur moyenne réelle à long terme  $\gamma$ .

5. Considerons le processus de Markov sur les états :  $\{FiP\}, \{P\}, \{Fi\}, \{Fp\}$ , où le dernier état inclu le cas  $\emptyset$ . Soit  $N$  le nombre de pas jusqu'à la première fois quand une pile arrive après un nombre impaire de faces, et  $x_i, i = 1, 2, 3$  son espérance, à partir des états transitoires :  $x_1 = x_{\{P\}}, x_2 = x_{\{Fi\}}, x_3 = x_{\{Fp\}}$ . Les trois inconnues satisfont :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + px_1 + q * x_2, x_2 = 1 + q * x_3, x_3 = 1 + px_1 + q * x_2 \implies \\ x_3 &= x_1, qx_1 = 1 + qx_2 = 1 + q(1 + qx_1) \implies x_1 = \frac{1 + q}{q(1 - q)} \end{aligned}$$

**Note :** Le conditionnement sur le premier pas ne marche pas. Examinons l'espace d'états :

$$E = \{P, FP, FFP, FFFP, FFFFP, \dots\}$$

en essayant de trouver une decomposition en cas (ou un temps d'arrêt  $T$ ) qui permet une approche recursive.

Dans le premier, troisième, ...cas, on recommence. Dans le deuxième, quatrième, ..., on conclut  $N = 2, 4, \dots$ . Le temps d'arrêt permettant une solution est donc le temps  $T$  de la première pile. En conditionnant sur  $T$ , on trouve :

$$\begin{aligned} n &= E[N] = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-1} p(2k) + \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} p((2k + 1) + n) \\ &= \frac{2pq}{(1 - q^2)^2} + \frac{p(1 + q^2)}{(1 - q^2)^2} + n \frac{1}{1 + q} = \frac{p}{(1 - q)^2} + n \frac{1}{1 + q} \end{aligned}$$

où on a utilisé  $\sum_{k=1}^{\infty} 2kq^{2k-1} = (\frac{1}{1-q^2})' = \frac{2q}{(1-q^2)^2}$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1)q^{2k} = \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{2q}{(1-q^2)^2} = \frac{(1+q^2)}{(1-q^2)^2}$ . On retrouve finalement :  $n = \frac{1+q}{q(1-q)}$

6. Nous devons résoudre

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}c)(x) + h(x) &= 0 \\ c(0) &= 0 \\ c(x) &\text{ accroit non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{G}f(x) &= 1/2(f(x + 1) - f(x)) + 1/8(f(x - 1) - f(x)) + 3/8(f(x - 2) - f(x)), x \geq 2 \\ \mathcal{G}f(1) &= \mu_1(f(2) - f(1)) + \mu_{-1}(f(0) - f(1)) \end{aligned}$$

## 4.9 Examen d'entraînement 2

1. Un scribe doit copier  $n$  pages d'un manuscrit. Comme il est fatigué, il comet un certain nombre d'erreurs partout dans le manuscrit, distribuées suivant une distribution de Poisson  $Po(\lambda)$ . Les erreurs peuvent se trouver sur n'importe quelle page, avec des probabilités égales.
  - (a) Quelle est la distribution du nombre  $N_1$  des erreurs sur la première page ?
  - (b) Quelle est la probabilité que la première page ne contient pas des erreurs ?
  - (c) Quelle est l'espérance du nombre de pages contenant des erreurs ?

2. Soit  $Y(t)$  un processus de Cramér-Lundberg

$$Y(t) = u + ct - C(t), \quad C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i, \quad (4.24) \quad \boxed{\text{CL}}$$

où  $N(t)$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda = 1$ , et les sinistres  $C_i$  ont une distribution hyperexponentielle  $\bar{F}_C(x) = \frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{5}{6}e^{-6x}$ .

a) Calculez l'espérance des sinistres  $m_1 = \mathbb{E}C_1$  et le taux de profit  $p = c - \lambda m_1$ , si le taux de cotisation est  $c = 3m_1/2$ .

b) Calculez la probabilité de ruine  $\psi(u)$ , à partir de la formule de Pollaczek-Khinchin pour sa transformée de Laplace

$$\psi^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{p}{\kappa(s)},$$

où l'exposant de Lévy est  $\kappa(s) = s(c - \lambda \bar{F}_C^*(s))$ .

3. On lance une pièce de monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à  $q$  et celle de sortir pile égale à  $p = 1 - q$ , jusqu'à ce qu'on obtient une suite pile-face-pile (arrivées consécutivement). Trouvez l'espérance  $n$  du nombre de jets  $N$  jusqu'à l'arrêt, en incluant le dernier.

4. Soit  $X_t$  un processus Markovien en temps continu, représentant le nombre de clients dans une file d'attente avec deux serveurs  $A, B$ , ayant des taux de service  $\mu_1 = 3$  et  $\mu_2 = 2$ , respectivement, et une salle d'attente infinie. Les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux  $\lambda = 4$ ; si un seul client est présent, il est servi par le serveur le plus efficace.

a) Dessinez le graph de transitions du processus  $X_t$ , et donnez la matrice génératrice des probabilités de transition, et la matrice des probabilités de transition de la chaîne discrétisée associée aux temps de saut.

b) Calculez la distribution stationnaire de  $X_t$ .

c) Quelle est la proportion du temps pendant le quel le serveur  $B$  est occupé ?

d) Quelle est la proportion du temps pendant le quel le serveur  $A$  est occupé ?

e) En sachant qu'au temps 0 les deux serveurs sont occupés et qu'il n'y a personne qui attend dans la file, quelle est la probabilité que le premier client qui arrive doit attendre ?

5. Soit  $X = (X_t; t \geq 0)$  un processus de Markov en temps continu sur l'ensemble  $\mathbb{N}$ , avec générateur infinitésimal  $Gf(x) = \mu_{-1}(f(x-1) - f(x)) + \mu_2(f(x+2) - f(x))$ ,  $x \geq 1$  avec  $\mu_{-1} = 6/7, \mu_2 = 1/7$ , et avec  $Gf(0) = \mu_2(f(2) - f(0))$ .

a) Calculez la distribution stationnaire de  $X_t$ .

b) Calculez l'espérance  $t(x) = \mathbb{E}_x T$ , où  $T = T_0 = \inf\{t : X(t) \leq 0\}$  est le temps de vidage, ainsi que le coût de vidage  $c(x) = \mathbb{E}_x \int_0^T X_s ds$ , en résolvant les équations de récurrence  $Gc(x) + h(x) = 0, x \geq 1, c(0) = 0$  où  $h(x) = 1$  et  $h(x) = x$ , respectivement.

6. Soit  $X = (X_t; t \geq 0)$  un processus de Markov en temps continu sur l'ensemble  $S = \{1, 2, 3\}$ . Supposons que la matrice infinitésimale (de taux de transitions) de  $X$  est donnée par

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

(a) Quelles sont les probabilités de transition de la chaîne discrétisée associée aux temps de saut ?

(b) Quelle est la loi conditionnelle de  $T_3 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 3\}$ , en sachant que  $X_0 = 3$  ?

(c) Posant  $T^{(3)} = \inf\{t > T_3 : X_t = 3\}$ , donnez un système des équations pour  $x_1 = \mathbb{E}[T^{(3)} | X_0 = 1]$  et  $x_2 = \mathbb{E}[T^{(3)} | X_0 = 2]$ . Résolvez les équations.

(d) Calculez, pour le processus absorbé en 3,  $P_{i,j}(t) = \mathbb{P}[t \leq T^{(3)}, X(t) = j | X_0 = i], i = 1, 2$ .

- (e) Calculez  $\bar{P}_1(t) = \mathbb{P}[T^{(3)} \geq t | X_0 = 1]$  et  $\bar{P}_2(t) = \mathbb{P}[T^{(3)} \geq t | X_0 = 2]$  à partir directement des équations de Chapman-Kolmogorov, et comparez les réponses avec ceux de la question précédente. Vérifiez aussi que  $x_i = \int_0^\infty \bar{P}_i(t) dt, i = 1, 2$ .
7. Des femmes et des hommes arrivent dans un magasin, après des temps fixes, unitaires. Chaque instant, une femme arrive avec probabilité  $\lambda_F$ , ou un homme arrive avec probabilité  $\lambda_H$ , ou il n'y a pas d'arrivée, avec probabilité  $\lambda_0 = 1 - \lambda_F - \lambda_H$ .
- (a) Trouver la probabilité  $p_F$  qu'une femme entre avant un homme. *Indication* : Conditionnez sur le premier instant, ou sur le nombre d'instant sans arrivées.
- (b) Trouver la probabilité que deux femme entrent consecutivement (i.e. avec aucun homme entre eux, mais pas forcément aux moments consecutifs) avant qu'un homme entre.
- (c) Trouver la probabilité qu'au moins deux hommes soient entrés consecutivement (i.e. avec aucune femme entre eux, mais pas forcément aux moments consecutifs), avant que trois femmes ne soient entrées consecutivement. *Indication* : Considérez un processus de Markov sur l'espace des états :  $(H1, H2, H3, \dots) \cup (F1, F2, F3, \dots)$ , qui enregistre au temps  $t$  la longueur  $k$  de la dernière série des clients  $k \in \{1, 2, \dots\}$  du même sexe entrés consecutivement, et leur sexe (H/F); formulez des equations d'arrêt pour les états d'arrêt indiqués.
- (d) Quelle est la probabilité qu'au moins  $m$  hommes soient entrés consecutivement, avant que  $n$  femmes ne soient entrées consecutivement ?

**Solutions :**

1. a) Les nombres des erreurs  $N_i$  sur chaque page  $i$  sont des variable de Poisson "coloriée" avec probabilité  $1/n$ , et donc  $N_i$  sont des variables de Poisson de taux  $\lambda/n$  (independantes). La probabilité que  $N_i \geq 1$  est  $1 - e^{-\lambda/n}$ .
- b) En decomposant la variable  $N$  comme somme des indicatrices, l'espérance de  $N = \sum_{i=1}^n N_i$  est  $n(1 - e^{-\lambda/n})$  (en fait,  $N$  a une distribution binomiale, car  $N_i$  sont independants, par le théorème de coloriage des variables Poisson).
2. a) L'espérance des sinistres est  $m_1 = \frac{1}{6 \times 2} + \frac{5}{6 \times 6} = \frac{2}{9}$  et le taux de profit  $p = \frac{1}{9}$ .
- b) La transformée de Laplace est  $\psi^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{1/9}{s(3/9 - \frac{1}{6(s+2)} - \frac{5}{6(s+6)})} = \frac{5}{9(s+1)} + \frac{1}{9(s+4)}$  et la probabilité de ruine est  $\psi(u) = \frac{5}{9}e^{-u} + \frac{1}{9}e^{-4u}$ .
3. Considerons le processus de Markov sur les états suivants, qui specifient une decomposition des trois derniers résultats possibles :  $A = \{PF P\}, PF = \{PF\}, F = \{P^c F\}, P = \{(PF)^c P\}$ , et soit  $x_{PF}, x_F, x_P, x_A = 0$  le nombre esperé des pas jusqu'à l'arrêt, conditionné par ces états initiaux. La réponse est  $n = 1 + px_P + qx_F$ .

Rq : La somme des probas de tous les états est :  $ppq + pq + q^2 + p(1 - pq) = p + q = 1$ , donc il s'agit vraiment d'une decomposition de l'espace des états.

Les trois inconnues satisfont :

$$x_P = 1 + p * x_P + q * x_{PF} \iff x_P = q^{-1} + x_{PF},$$

$$x_F = 1 + p * x_P + q * x_F \iff x_F = p^{-1} + x_P = p^{-1} + q^{-1} + x_{PF},$$

$$x_{PF} = 1 + q * x_F \iff x_{PF} = 1 + q * p^{-1} + 1 + qx_{PF} \iff x_{PF} = 2/p + q/p^2$$

$$x_{PF} = \frac{1+p}{p^2}, \quad x_P = \frac{1+p}{p^2} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p^2q}, \quad x_F = p^{-2} + q^{-1} + 2p^{-1} = p^{-2} + (pq)^{-1} + p^{-1}$$

$$n = \frac{1 + pq}{p^2q}$$

4. b) La distribution stationnaire est  $\pi_{n+1} = \pi_0 \rho_0 \rho^n$ , avec  $\rho_0 = \frac{4}{3}, \rho = \frac{4}{4}$ , et  $\pi_0 = \frac{3}{23}$ .
- c,d)  $P[X_t \geq 1] = \frac{20}{23}, P[X_t \geq 2] = \frac{16}{23}$ .
- e)  $\frac{4}{9}$ .

5. a) La distribution stationnaire est  $\pi_n = A_1(\frac{1}{2})^n + A_1(\frac{-1}{3})^n$ , et  $\pi_{-1} = 0 \implies A_2 = \frac{2}{3}A_1$ .  
 b) Nous devons résoudre

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}c)(x) + h(x) &= 0 \\ c(0) &= 0 \\ c(x) &\text{ accroit non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

où

$$Gf(x) = 6/7(f(x-1) - f(x)) + 1/7(f(x+2) - f(x)), x \geq 1$$

- b) On décompose  $c(x) = c_h(x) + p(x)$  où  $c_h(x) = A + A_1r_1^x + A_2r_2^x$ , avec  $A_1 = A_2 = 0$  (car  $|r_i| > 1$ ), et  $p(x) = Bx$  pour la première question, et  $p(x) = x(Bx + B_1)$  pour la deuxième. Comme  $\mathcal{G}x = -\frac{4}{7}$  et  $\mathcal{G}x^2 = -\frac{8}{7}x^2 + \frac{10}{7}$ , on trouve par la méthode des coefficients indéterminés que les solutions sont  $t(x) = \frac{7}{4}x$ ,  $c(x) = \frac{7}{8}x^2 + xx\frac{35}{16}$ .

6. (a) Les probabilités de transition au moment du premier saut sont :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/7 & 6/7 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) La loi conditionnelle de  $T_3 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 3\}$ , en sachant que  $X_0 = 3$ , est la loi exponentielle à paramètre 7 (et moyenne 1/7).  
 (c) En conditionnant sur le premier saut, nous trouvons :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_2 \\ x_2 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De lors,  $x_1 = x_2 = 1$ .

- (d) Soit

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

le générateur du processus observé seulement en 1, 2. Diagonalisons  $\tilde{G} = L^{-1}Diag(\lambda_i)L$ , où les lignes de la matrice  $L$  sont les vecteurs propres à gauche. Ici, les valeurs propres, données par  $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 1)(\lambda + 4) = 0$  sont  $-1$  et  $-4$  et la matrice des vecteurs propres à droite est  $R = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Finalement,

$$\tilde{P}(t) = RDiag(e^{\lambda_i t})R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}}{3} + \frac{2e^{-4t}}{3} & \frac{2e^{-t}}{3} - \frac{2e^{-4t}}{3} \\ \frac{e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4t}}{3} & \frac{2e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4t}}{3} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} = \tilde{P}(t)\mathbf{1} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

- (e) Les probabilités demandées satisfont  $\bar{P}_i(t) = 1 - P_{i,3}(t)$ ,  $i = 1, 3$ , où  $P_{i,3}(t)$  sont les probabilités de transition du processus absorbé avec générateur

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posons  $p_i(t) = \bar{P}_{i,3}(t) = 1 - P_{i,3}(t)$  pour les probabilités de non-absorption dans la colonne fixe 3. On a  $p_1(0) = p_2(0) = 1$  Comme  $P_{3,3}(t) = 1$ , l'équation Chapman-Kolmogorov  $P' = GP$  donne pour la troisième colonne :

$$\begin{aligned}(1 - p_1(t))' &= -3(1 - p_1(t)) + 2(1 - p_2(t)) + 1 \\ (1 - p_2(t))' &= (1 - p_1(t)) + -2(1 - p_2(t)) + 1\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}p_1(t)' &= -3p_1(t) + 2p_2(t), p_1(0) = 1 \\ p_2(t)' &= p_1(t) - 2p_2(t), p_2(0) = 1\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = e^{t\tilde{G}} \mathbf{1}$$

où  $\tilde{G}$  denote le générateur avec la colonne et ligne d'absorption 3 enlevée. Finalement,  $x_1 = x_2 = 1$ .

7. (a) La probabilité  $p_F$  satisfait

$$p_F = \lambda_F + (1 - \lambda_F - \lambda_H)p_F \iff p_F = \frac{\lambda_F}{\lambda_F + \lambda_H}$$

- (b)  $p_F^2$

- (c) Considerons la chaîne de Markov en temps discret qui enregistre la longueur du nombre des clients du même sexe entrés consecutivement et le type, ayant comme espace des états les suites  $(H1, H2, H3, \dots) \cup (F1, F2, F3, \dots)$ . En prenant en consideration seulement les temps quand la chaîne saute, pn a une marche aléatoire qui "avance" sur les hommes/femmes a.p.  $p_H = 1 - p_F$  et  $p_F$ , et "change de sexe" outrement. Par exemple, si  $\lambda_F = 2\lambda_H$ , les deux probas sont  $p_H = \frac{1}{3}, p_F = \frac{2}{3}$ . En denotant par  $x_i, y_i$  la probabilité de notre evenement en partant d'une suite des  $i$  femmes hommes, il faudra resoudre :

$$\begin{aligned}y_1 &= p_H + p_F x_1 \\ x_1 &= p_H y_1 + p_F x_2 \\ x_2 &= p_H y_1\end{aligned}$$

Generalisant pour  $m$  hommes et  $n$  femmes et posant  $S_{F,k} = \sum_{i=1}^k p_F^i, S_{H,k} = \sum_{i=1}^k p_H^i$ , nous trouvont

$$y_1 = \frac{p_H^{m-1}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}, x_1 = \frac{p_H^m S_{F,n-2}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

et finalement

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^m (1 + p_F S_{F,n-2})}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}} = \frac{p_H^m S_{F,n-1}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

Pour  $m = 2, n = 3$ , on trouve :

$$y_1 = \frac{p_H}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}, x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$

et

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F + p_F^2)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$