

Les Probabilités du Bonheur, et les Applications des
Processus de Markov et de Levy dans les Mathématiques
financières, Files d'attente et Fiabilité : Part I

Florin Avram

1^{er} janvier 2014

Table des matières

1	Introduction aux processus de Markov	5
1.1	Matrices de transition	6
1.2	Probabilités de transition après n étapes	7
1.3	Classification des états	8
1.4	L'évolution avec le temps de la loi de probabilité d'une chaîne	9
1.5	Lois invariantes/stationnaires et lois limites/asymptotiques	10
1.6	Equations de stationnarité/invariance/équilibre global	11
1.7	Un exemple de chaîne reducible, avec plusieurs classes de communication . .	13
1.8	Quelques exemples de modélisation par les chaînes de Markov	17
1.9	Processus de Markov en temps continu(*)	18
2	Chaînes de Markov : approfondissement	20
2.1	La périodicité	20
2.2	Où on revoit les probabilités de premier passage intervenant dans le compor- tement limite des chaînes	22
2.2.1	Le cas purement absorbant : les probabilités d'absorbtion	23
2.2.2	La distribution limite dans le cas faiblement ergodique	23
2.2.3	Echauffement pour le cas general	24
3	L'approche algébrique aux chaînes de Markov	28
3.1	Démonstration algébrique du théorème ergodique, par la décomposition spec- trale	28
3.2	Le calcul de la limite des matrices des transitions à la longue	29
3.2.1	La structure probabiliste de la matrice de distributions à la longue . .	31
3.2.2	Le calcul de la distribution limite dans le cas général	32
3.2.3	Le théorème de Perron-Frobenius	34
4	Problèmes de Dirichlet/premier passage/absorbtion pour les chaînes de Markov	36
4.1	Les chaînes de Markov absorbantes	38
4.2	Les problèmes de Dirichlet/premier passage	38
4.3	La loi multivariée du temps de premier passage, et de la position finale . . .	39
4.4	Les espérances des lois de type phase	40
4.5	Exemples des distributions de type phase	42
4.6	Les probabilités d'absorbtion	42
4.7	L'opérateur associé à une chaîne de Markov	44
4.8	Classification des quelques problèmes linéaires concernant les temps de pre- mier passage pour les chaînes et processus de Markov	44

4.9	Conclusions	46
5	Marches aléatoires sur des réseaux électriques	49
5.1	Distributions stationnaires : équations d'équilibre local	49
5.2	Probabilités du bonheur/fonctions harmoniques	51
5.3	<u>Les espérances des temps d'atteinte</u> , et les problèmes de Dirichlet nonhomogènes	52
5.4	Temps espérés de retour	54
5.5	Fonction de Green : le bilan de la vie	55
5.6	Les fonctions harmoniques des marches aléatoires sur un réseau (*)	59
5.7	Exercices	60
5.8	Exercices d'entraînement	64
5.9	Solutions	67
5.10	Problèmes d'entraînement	71
6	Exercices de révision	73
7	Le processus de Poisson	81
7.1	La distribution de Poisson	81
7.2	Processus de comptage et renouvellement en temps continu	81
7.3	Le processus de Poisson unidimensionnel	82
7.4	La propriété de Markov du processus de Poisson	84
7.5	Le générateur des transitions du processus de Poisson	85
7.6	Le processus de Poisson comme limite des processus de Bernoulli	86
7.7	Le processus de Poisson multidimensionnel (*)	86
7.8	Exercices	87
8	Les processus markoviens de saut, en temps continu	91
8.1	La propriété de Markov	91
8.2	Les semigroupes de Markov homogènes	92
8.3	La dérivée du semi-groupe en 0 (matrice génératrice) engendre le semi-groupe	92
8.4	Le calcul de l'exponentielle des matrices : developpement limités, la résolvante, et la décomposition spectrale	94
8.5	Le calcul de l'exponentielle des semigroupes : les équations de Kolmogorov .	95
8.6	Ou sautera la sauterelle ?	96
8.7	Résolution des équations Chapman-Kolmogorov pour le processus de Markov à deux états	97
8.8	Résolution des équations de Chapman-Kolmogorov par la méthode de différences finies de Newton (Putzer) (*)	98
8.9	Résolution des équations de Chapman-Kolmogorov pour le processus de Poisson ; le calcul de l'exponentielle des matrices triangulaires	99
9	Les processus de naissance et de mort et les files d'attente	101
9.1	<u>Les files d'attente</u>	102
9.2	<u>Distribution stationnaire</u> et comportement asymptotique	103
9.3	Mesures de performance des files d'attente	105
9.4	Problèmes de premier passage pour la file M/M/1	107
9.5	Les formules d'Erlang A,B,C (*)	110

9.6	Chaînes et processus a espace d'états infini	113
9.7	Récurrence des chaînes à espace d'états denombrable	113
9.8	Réseaux de Jackson	114
9.9	Les probabilités transitoires des processus de naissance et mort (*)	115
9.10	Problèmes de Dirichlet/première passage en temps continu et la formule de Feynman-Kac	117
10	Les lois de type exponentielle de matrice et de type phase	120
10.1	Aperçu historique	120
10.2	Processus de Markov avec un état absorbant	123
10.3	Sous-classes importantes des distributions exponentielle de matrice (*)	127
10.4	La positivité des combinaisons linéaires d'exponentielles	128
10.5	Une relation entre les distributions de type phase en temps discret et en temps continu	131
10.6	Exercices	132
10.7	Contrôle continu Processus de Markov 2013	145
11	Les processus semi-markoviens de sauts	147
11.1	Un exemple de modélisation Markovienne	147
11.2	Mise en scène	147
11.3	Transformés de Laplace des temps de premier passage pour les processus semi-markoviennes (*)	148
12	Qu'est ce qu'il y aura dans l'examen ?	150
12.1	Examen d'entraînement 1.	150
12.2	Examen d'entraînement 2	152
12.3	Examen d'entraînement 3	156
12.4	Examen d'entraînement 4	160
12.5	Examen d'entraînement 5	162
13	Programmation	167
13.1	Scilab	167
13.2	Programmation symbolique en Scilab	168
13.3	Traitement du signal et lois de type phase en Scilab	169
13.4	Matlab	171
13.5	Regression et estimation des densités non-paramétrique	171
13.6	BUTools	173
13.7	Projets	175
13.8	Initiation Matlab et Chebfun	179

Chapitre 1

Introduction aux processus de Markov

s:Mark

Exercice 1.1 a) Démontrer la "loi d'évolution"

$$P[X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_2} = e_{i_2}, \dots, X_{t_k} = e_{i_k}] = P[X_{t_1} = e_{i_1}] P[X_{t_2} = e_{i_2} | X_{t_1} = e_{i_1}] \\ P[X_{t_k} = e_{i_k} | X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_2} = e_{i_2}, \dots, X_{t_{k-1}} = e_{i_{k-1}}]$$

b) Démontrer la "loi d'évolution conditionnée"

$$P[X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_2} = e_{i_2}, \dots, X_{t_k} = e_{i_k} | \mathcal{F}] = P[X_{t_1} = e_{i_1} | \mathcal{F}] P[X_{t_2} = e_{i_2} | X_{t_1} = e_{i_1}, \mathcal{F}] \\ P[X_{t_k} = e_{i_k} | X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_2} = e_{i_2}, \dots, X_{t_{k-1}} = e_{i_{k-1}}, \mathcal{F}]$$

Cet exercice nous montre que les lois jointes ont une structure assez compliquée, en général. La situation devienne plus simple pour les processus de Markov.

Définition 1.1 -Propriété de Markov Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$, avec t unidimensionnel a la propriété de Markov si, et seulement si ses probabilités conditionnelles ne dépend pas du passé que par le passé immédiat, c.-à-d.

$$P[X_t \in A | X_{t_0} = e_{i_0}, \dots, X_{t_k} = e_{i_k}] = P[X_t \in A | X_{t_k} = e_{i_k}]$$

$\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < t$, $t_i \in \mathbb{R}$, et $\forall e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_i \in \mathcal{E}$. Un processus ayant la propriété de Markov s'appelle processus de Markov.

Interprétation de la propriété de Markov : si on considère que le processus est indicé par le temps, cette propriété traduit le fait que le présent ne dépend du passé qu'à travers le passé immédiat. Une des famille des processus le plus utilisés en applications sont les chaînes de Markov discrètes, observés en temps discret : $n = 0, 1, 2, \dots$, et avec un nombre fini, disons J d'états possibles. On a alors J lois de transition, qu'on arrange dans une matrice P stochastique (ayant la somme de chaque ligne 1).

Exercice 1.2 Le temps au pays d'Oz. Soit X_n une chaîne supposée (à tort) Markovienne sur les états { pluie, nuageux, soleil}, avec matrice des transitions

$$P = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/2 & 1/8 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Calculer :

1. La probabilité de pluie demain, en sachant qu'il est nuageux aujourd'hui
2. La probabilité de pluie demain et soleil le lendemain, en sachant qu'il est nuageux aujourd'hui
3. La probabilité de soleil le lendemain, en sachant qu'il est nuageux aujourd'hui.

Remarque 1.1 La distribution de X_1 conditionné par (en partant de) $X_0 = i$, est donné par la ligne i de la matrice P . Par conséquent, la réponse à la première question est $1/6$.

La réponse à la deuxième question est $1/6 \times 1/8$ (par la loi d'évolution conditionnée). La troisième question concerne une transition après deux pas (sans s'intéresser à la situation après un pas). Cette question nous suggère l'importance d'étudier les probabilités de transition entre deux moments arbitraires.

1.1 Matrices de transition

Définition 1.2 Matrices de transition Pour tous $0 \leq s \leq t$, pour tous i, j dans I , et pour chaque processus stochastique, on définit les probabilités de transition par :

$$p_{ij}(s, t) = P([X_t = e_j] \mid [X_s = e_i]).$$

Définition 1.3 Homogénéité des transitions Un processus est dit homogène si, et seulement si :

$$\forall i, j \in I, \forall 0 \leq s \leq t, p_{ij}(s, t) = p_{ij}(0, t - s).$$

On note alors $p_{ij}(s, t) = \underline{p_{ij}(t - s)}$, et la matrice $p_{ij}(t)$ est appelée matrice de transition après temps t .

Hypothèse de travail : **(H1) On ne considérera ici surtout des processus homogènes.**

L'exemple le plus simple des processus de Markov est fourni par les chaînes de Markov homogènes en temps discret et à espace d'états fini ou dénombrable. Dans ce cas, il suffit de connaître les matrices de transition $P^{(n)}$ après temps $n \in \mathbb{N}$. La matrice de transition après un pas $P = (p_{ij})_{i, j \in I}$ est la plus importante caractéristique d'une chaîne homogène. Cette matrice P est stochastique, c'est-à-dire : 1) $\forall i, j \in I, p_{ij} \geq 0$ et 2) $\forall i \in I, \sum_{j \in I} p_{ij} = 1$; la somme des termes de chaque ligne égale à 1. En notation vectorielle, on a $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ denote un vecteur avec toutes les composantes 1. 3) Il sera aussi utile d'étudier les matrices sous-stochastiques, satisfaisant $\forall i \in I, \sum_{j \in I} p_{ij} \leq 1$, avec au moins une inégalité étant stricte.

Remarque 1.2 La propriété $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$ des matrices stochastiques équivaut au fait que 1 est une valeur propre, avec vecteur propre à droite $\mathbf{1}$.

Exercice 1.3 Montrez que si λ est une valeur propre d'une matrice stochastique P , alors forcément $|\lambda| \leq 1$.

Ind : Pour fixer les idées, considérez d'abord le cas où $n = \dim(P) = 2$. En suite, normaliser le vecteur propre v de λ tq son élément de valeur absolue maximale soit 1, et utiliser l'équation $Pv = \lambda v$ correspondant à ce vecteur.

Remarque 1.3 Même qu'on utilise parfois le terme "matrice" si l'espace d'états E est infini, la théorie dans ce cas est plus compliquée.

Exercice 1.4 Démontrer la "loi d'évolution" pour les chaînes de Markov homogènes

$$P[X_1 = e_{i_1}, X_2 = e_{i_2}, \dots, X_k = e_{i_k} | X_0 = e_{i_0}] = P(i_0, i_1)P(i_1, i_2) \dots, P(i_{k-1}, i_k),$$

En revenant à notre Exercice 1.2, conditionnons sur toutes les cas possibles après un jour. On trouve :

$$P^{(2)}(N, S) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & \frac{1}{6} \\ * & * & \frac{1}{3} \\ * & * & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{3}{4} = \frac{7}{16} = P^2(N, S)$$

En conclusion, la réponse à la question sur la transition après deux pas se trouve dans la matrice

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{43}{192} & \frac{15}{32} & \frac{59}{192} \\ \frac{7}{48} & \frac{12}{16} & \frac{16}{48} \\ \frac{1}{24} & \frac{5}{16} & \frac{31}{48} \end{pmatrix}$$

Plus généralement, la distribution de X_n en partant de $X_0 = i$ est donné par la ligne i de la matrice P^n . Par exemple

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 0.0982749 & 0.3665 & 0.535225 \\ 0.09786 & 0.366124 & 0.536016 \\ 0.0972273 & 0.365551 & 0.537221 \end{pmatrix}, \quad P^{11} = \begin{pmatrix} 0.0979365 & 0.366194 & 0.53587 \\ 0.0977182 & 0.365996 & 0.536286 \\ 0.0973855 & 0.365695 & 0.53692 \end{pmatrix}$$

Clairement, y a convergence vers une matrice avec lignes égales (on démontrera ça plus tard en utilisant la décomposition spectrale de P).

1.2 Probabilités de transition après n étapes

Définition 1.4 Pour tout n de \mathbb{N} , la matrice des probabilités de transition en n étapes, est définie par $P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in I}$ où $p_{ij}^{(n)} = P([X_n = e_j] | [X_0 = e_i])$.

L'exercice 1.2 illustre le résultat le plus important de la théorie des chaînes de Markov :

Théorème 1.1 Les matrices de transition en n étapes ont une structure de semi-groupe, c.-à-d.

$$\boxed{P^{(m+n)} = P^{(m)} P^{(n)}} \tag{1.1}$$

Démonstration

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P et de loi initiale $\mu(0)$, à valeurs dans $(E = \{e_i; i \in I\}, \mathcal{P}(E))$. En conditionnant sur la position k après m pas, on a :

$$\forall i, j \in I, \forall m, n \in \mathbb{N}, p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

QED

Corollaire 1.1 La matrice des probabilités de transition en n étapes (sans s'intéresser dans l'évolution intermédiaire) est simplement la puissance n de la matrice de transition P :

$\boxed{P^{(n)} = P^n}$, c.-à-d. le semi-groupe des matrices de transition est "généralisé" par la matrice P de transition après temps 1.

Ce corollaire très important s'appelle l'**équation de Chapman-Kolmogorov**. Démonstration : on montre ça par récurrence sur n , en partant de $P^{(1)} = P$, et en tenant compte que $P^{(n+1)} = P^{(n)}P$ (par l'équation de semigroupe (1.1)) QED Par conséquent, la matrice P spécifie entièrement toutes les probabilités de transition d'une chaîne de Markov.

1.3 Classification des états

Nous verrons ici qu'une chaîne de Markov a deux types d'états :

1. transitoires/transients, qui sont visités un nombre fini des fois
2. récurrents ("éternels") qui sont visités un nombre infini des fois.

Définition 1.5 Soient e_i et e_j deux éléments de E . On dit que e_i conduit à e_j (on note $e_i \rightarrow e_j$) ssi il existe $n > 0$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$ et on dit que e_i et e_j communiquent (et on note $e_i \leftrightarrow e_j$) si e_i conduit à e_j et e_j conduit à e_i .

Rémarque : la relation de "communication réciproque" " \leftrightarrow " est clairement symétrique, réflexive et transitive, une relation d'équivalence. Par conséquent, elle partage l'espace d'états dans des classe d'équivalence.

Définition 1.6 On appelle classes de communication la chaîne : les classes d'équivalence induites par la relation " \leftrightarrow " sur E .

Définition 1.7 Une classe d'équivalence dans une chaîne de Markov **finie** qui n'a pas de transitions vers l'extérieur est dite récurrente; les autres classes s'appellent transientes.

Remarque 1.4 Les classes récurrentes sont les classes maximales de la relation d'ordre induite par \rightarrow sur les classes.

Définition 1.8 Le graphe de communication d'une chaîne est un graphe sur les états (indiqués par des points du plan), avec des côtés représentant les transitions possibles, ayant des probabilité de transition $p_{ij} > 0$. Les transitions possibles sont indiqués par des flèches, avec la valeur de la probabilité de transition notée parfois au dessus.

L'identification des classes récurrentes et transientes est souvent plus facile en inspectant le graphe de communication, qui permet de déterminer visuellement les classes de communication.

e:c1

Exercice 1.5 Exemple d'une chaîne avec des éléments transients et récurrents. L'espace des états d'une chaîne est $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Dessinez le graphe de communication.
- b) Identifiez les classes de la chaîne. Classifiez les classes en récurrentes et transientes.

R : Les classes récurrents sont $\{2\}$ et $\{3,5\}$.

Remarque 1.5 La matrice obtenue en rangeant les elements de la même classe ensemble (par exemple $\{2, 1,4,6, 3,5\}$ dans l'exemple antérieur) a une structure des blocques. Les sous-blocs correspondant a une classe récurrente sont des matrices stochastiques (qu'on peut analyser séparément plus facilement), et le bloc correspondant a tous les elements transients est une matrice sous-stochastique.

Remarque 1.6 Les sous-matrices obtenues de la matrice de transition en retenant seulement une classe transiente/récurrente sont sous-stochastiques/stochastiques.

Remarque 1.7 La distinction entre elements transients et recurents a une grande portée sur la valeur des limites $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j)$. On verra que pour j transient, elle est toujours 0

Définition 1.9 Une chaîne de Markov est dite irréductible si elle n'admet qu'une seule classe recurente.

1.4 L'évolution avec le temps de la loi de probabilité d'une chaîne

Définition 1.10 Pour tout n de \mathbb{N} et tout i de I , on note $\mu_i(n) = P[X_n = e_i]$ et $\mu(n) = (\mu_i(n))_{i \in I}$. Le vecteur $\mu(n)$ définit une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$ appelée loi à l'instant n . On appelle loi initiale de la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le vecteur $\mu(0)$.

Comme dans la démonstration de l'équation de Chapman-Kolmogorov, en conditionnant sur la position k un pas en avant, on verifie que $\mu(1) = \mu(0)P$, et

$$\boxed{\mu(n+1) = \mu(n)P} \quad (1.2)$$

et alors par induction on trouve

$$\boxed{\mu(n) = \mu(0)P^n} \quad (1.3)$$

Exemple 1.1 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $\{1, 2\}$, de distribution initiale $\mu(0) = (\mu_1, \mu_2)$ et de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ Calculez $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2\}$, $\mathbf{c}_2(1) = \mathbb{P}\{X_1 = 2\}$, $\mathbb{P}\{X_0 = 2|X_1 = 2\}$, $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2, X_2 = 1\}$, $\mathbf{c}_2(2)$ et $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_2 = 1\}$.

Comme illustré dans les exemple ci-dessus, en utilisant la distribution initiale $\mu(0)$ et la matrice de transition P on peut calculer la distribution $\mu(n)$ a n'importe quel temps, par exemple $\mu(1), \mu(2) \dots$ et aussi les distributions jointes pour n'importe quel ensemble fini des temps (en utilisant la loi de multiplication des probabilités conditionnelles). En effet, on peut donner une formule explicite pour les distributions jointes d'ordre fini d'une chaîne, en fonction de la matrice de transition P et la distribution initiale $\mu(0)$.

Théorème 1.2 Pour une chaîne de Markov, les distribution jointes sont données pour : $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_k$, $t_i \in \mathbb{R}$, et $\forall e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \in \mathcal{E}$ explicitement par

$$\boxed{P[X_{t_0} = e_{i_0}, \dots, X_{t_k} = e_{i_k}] = \mu_{i_0}(t_0) P_{i_0, i_1}^{t_1 - t_0} \dots P_{i_k, i_{k-1}}^{t_k - t_{k-1}}} \quad (1.4)$$

Définition 1.11 La chaîne de Markov associée à une matrice stochastique P est la famille des mesures $\mathbb{P}_{\mu(0)}$ définies par (1.4), avec opérateurs d'espérance associés $E_{\mu(0)}$ (donc pour obtenir une seule mesure, il faut encore spécifier la mesure initiale $\mu(0)$).

Remarque 1.8 Algébriquement, une chaîne de Markov est caractérisée par un "duo" $(P, \mu(0))$, l'élément principal du duo étant la matrice de transition P .

Définition 1.12 On appellera une chaîne **ergodique** lorsque qu'il existe une distribution limite $\pi(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(n)$, indépendamment de la distribution de départ.

Examinons maintenant pour ergodicité un exemple où P^n et π se calculent explicitement :

e:2 **Exercice 1.6 Chaîne à deux états.** Soient $a, b \in [0, 1]$ et la matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

a) Montrer en calculant les valeurs et vecteurs propres que

$$P^n = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b} \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

b) Montrez que avec $a, b \neq (0, 0)$, et $a, b \neq (1, 1)$, la limite $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$.

En suite, calculez cette limite dans tous les cas possibles.

Remarque 1.9 En conclusion, on voit que avec $a, b \in (0, 1)$, la limite matrice $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ existe et qu'elle a des **lignes identiques**, la distribution limite $\pi = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b} \right)$ étant indépendante du point de départ. On appelle cette propriété ergodicité.

Exemple : la marche aléatoire sur les sommets d'un polygone

1.5 Lois invariantes/stationnaires et lois limites/asymptotiques

Une question très importante pour les chaînes de Markov est de déterminer l'ensemble des distributions "limites/asymptotiques/à la longue" d'une chaîne spécifiée par $\mu(0)$ et P , définies

$$\pi(\infty) = \pi(\infty)_{\mu(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(0)P^n \quad (1.5)$$

Remarque 1.10 A priori, il pourrait y exister une limite (1.5) différente pour chaque distribution de départ $\mu(0)$, et en particulier pour chaque point de départ déterministe spécifié par $\mu(0) = e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, mais il se trouve que sous des conditions vérifiées assez fréquemment, la limite est unique, indépendante de $\mu(0)$. Pour clarifier dans quel cas on se trouve, il suffit d'investiguer les limites

$$\pi(\infty)_i = \lim_{n \rightarrow \infty} e_i P^n$$

obtenues pour chaque point de départ déterministe $e_i, i \in \{1, \dots, I\}$ possible. Comme $e_i P^n$ est précisément la ligne i de la matrice P^n , la question revient à investiguer si la limite

$$P := \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$$

existe, et si ses lignes sont identiques. On appellera P la matrice de transition asymptotique. On vérifie facilement que si elle existe, il s'agit d'une matrice stochastique idempotente ($P^2 = P$), les lignes de la quelle sont les points extrémaux de l'ensemble convexe des toutes les distributions asymptotiques possibles.

Définition 1.13 L'ensemble des distributions limite $\pi(\infty)_{\mu(0)}$ d'une chaîne P , obtenues en variant la distribution initiale $\mu(0)$, sera appelé **l'ensemble des distributions asymptotiques**.

En conclusion, on s'intéresse en trois questions concernant la matrice P :

1. existence (E)
2. unicité (U)
3. ergodicité (ERG) = existence + unicité, ce qui est équivalent à la question : **Est-ce-que la limite matrice P (en supposant qu'elle existe) a des lignes identiques**, c.-à-d. est-ce-que on a

$$P = \mathbf{1}\pi$$

où $\mathbf{1}$ denote un vecteur colonne, et π denote un vecteur ligne (forcemment vecteur propre à gauche pour la valeur propre $\lambda = 1$) ?

Les réponses aux questions (E),(U) et (ERG) peuvent-etre abordées par la théorie spectrale (valeurs propres, vecteurs propres), en utilisant le théorème de Perron-Frobenius, et aussi par des approches probabilistes.

1.6 Equations de stationnarité/invariance/équilibre global

Req

Remarque 1.11 En supposant que la limite (1.5) existe (ce qui n'est pas toujours le cas), on déduit à partir de $\mu(n+1) = \mu(n)P$ que chacune des distributions limite doit satisfaire les équations $\pi(\infty) = \pi(\infty)P$

Définition 1.14 Les équations

$$\pi = \pi P \tag{1.6}$$

sont appelées équations d'équilibre global/stationnarité/invariance. Un vecteur des probabilités qui les satisfait est appelé distribution stationnaire ou invariante.

Autrement dit : une distribution invariante π est un vecteur de probabilités qui est aussi vecteur propre à gauche de P associé à la valeur propre 1.

Remarque 1.12 Le nom invariant vient du fait que si $\mu(0) = \pi$, alors on a $\mu(n) = \pi$ pour chaque n .

Par la remarque (1.11), il suit que :

inc0

Corollaire 1.2 Les distributions asymptotiques d'une chaîne de Markov homogène se trouvent parmi les distributions invariantes.

Le système d'équilibre (1.6) est donc la clé du calcul des distributions asymptotiques. Deux questions fondamentales ici sont celles de l'existence d'au moins une solution, et de l'unicité.

Questions (E-U) : 1) Est-ce que c'est possible qu'il n'existent pas des vecteurs des probabilités qui satisfont le système d'équilibre (1.6) (c.-à-d. est-ce que c'est possible qu'il n'y ait pas des vecteurs propres pour la valeur propre 1 qui ont toutes les composantes nonnégatives) ? 2) Est-ce que c'est possible qu'il existent plusieurs vecteurs des probabilités qui satisfont le système d'équilibre (1.6) ?

Exemple 1.2 L'inexistence de la limite $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ pour les chaînes cycliques.

La limite P n'existe pas toujours, comme on voit immédiatement en examinant une chaîne de Markov qui bouge cycliquement sur les noeuds d'un graphe. Par exemple, pour $n = 3$, avec

la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $P^{3n} = I_3$, $P^{3n+1} = P$ et $P^{3n+2} = P^2 =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On voit immédiatement que la suite $P, P^2, P^3 = I, P^4 = P, \dots$ est cyclique

et donc sans limite. Ici, la distribution stationnaire $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$ est unique, mais instable.

Exercice 1.7 Les équations d'équilibre sont linéaires, et donc leur solution explicite est toujours possible en principe, même symboliquement, avec deux bémols : 1) la matrice $G = P - I$ est singulière, et 2) si la réponse (après simplification, bien sûr) est trop longue, notre vie ne suffira peut être pas pour la lire ! Soyons quand même optimistes. Demander à votre logiciel symbolique préféré quelle est la solution du système $\pi G = 0$, pour G de dimension 3. Est-ce que la réponse pour $\pi(1)$ peut être interprété en termes des chemins conduisant à 1, c.-à-d. $\{2, 3, 1\}, \{3, 2, 1\}, \{2, 1\}, \{3, 1\}$?

Remarque 1.13 Dans le cas d'une seule classe récurrente, la singularité du système peut être enlevé en effaçant une ligne. Plus généralement, on peut obtenir les solutions d'un système singulier (quand elles existent) en utilisant des "PseudoInverses". Comme il y en a plusieurs possibilités, le résultat du logiciel symbolique ne peut pas être garanti, si on utilise cette commande. Par contre, la commande Solve devine souvent ce qu'on attend d'elle. Notons aussi une observation intéressante de Stewart : en définissant $GI = (G + \mathbf{t}\mathbf{u}')^{-1}$ (qui s'appelle perturbation de rang 1 de la matrice G) avec \mathbf{t}, \mathbf{u} "presque arbitraires", permet de trouver π en normalisant $\mathbf{u}'GI$.

inc

Remarque 1.14 Une chaîne ayant des distributions limite en partant de chaque point i , ayant

1. une distribution stationnaire unique π , et
2. au moins une distribution limite (qui sera forcément égale à π , par le corollaire (1.2))

est ergodique. En effet, 1) implique l'unicité de la classe récurrente, et 2) le fait que cette classe n'est pas périodique.

Le cas ergodique est très important dans les applications, à cause du :

moy

Théorème 1.3 (*) Soit $X(n)$ une chaîne de Markov ergodique à distribution asymptotiques π , et soit une fonction "coût" f tel que la "moyenne spatiale" $E_{\pi} f(X) = \sum_{j \in \mathcal{E}} \pi_j f_j$ est bien

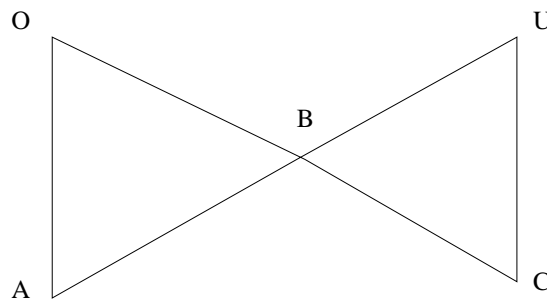
definie. Alors, la moyenne temporelle des coûts converge presque partout vers la moyenne spatiale, for any initial distribution :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n f(X_n) = \sum_{j \in \mathcal{E}} \pi_j f_j$$

Examinons maintenant un exemple où P^n n'est pas disponible explicitement ; quand même, la distribution stationnaire π est unique et donc la limite des coûts moyenne temporelle se calcule facilement :

e:pap

Exercice 1.8 1) Calculer les distributions $\mu(1), \mu(2)$ pour une marche sur le graphe papillon, en sachant que : a) le départ est sûrement à 0 b) le départ est avec probabilités égales en 0 ou en U, c.-à-d. $\mu(0) = (1/2, 0, 0, 0, 1/2)$. 2) Montrez que la marche aléatoire sur



f:pap

FIGURE 1.1 – Marche aléatoire simple sur le graphe papillon

le graph papillon a une distribution stationnaire unique π . 3) Calculez l'espérance du coût moyenne de cette marche, si $f(A) = 10, f(B) = 1$ et les autres coûts sont 0.

Remarque 1.15 Dans le cas des espace d'états dénombrables, avec une seule classe récurrente B, on distingue deux cas :

1. **ergodique positive**, quand la distribution limite satisfait $\pi_i > 0, \forall i \in B$
2. **ergodique nul**, quand elle satisfait $\pi_i = 0, \forall i \in B$ (ce dernier cas étant impossible pour des espace d'états finies).

Dans la littérature, le terme ergodique signifie parfois ce que nous appelons ici ergodique positive.

1.7 Un exemple de chaîne reducible, avec plusieurs classes de communication

Nous allons examiner maintenant une chaîne pour la quelle la distribution stationnaire n'est pas unique ("non-ergodique").

ne

Exemple 1.3 Exemple de non unicité de la distribution stationnaire π : Dans l'exemple défini par la matrice ci dessous, cherchons $\pi \in (\mathbb{R}^+)^5$ tel que $\pi P = \pi$ et $\sum_{i=1}^5 \pi_i = 1$.

$$\pi P = \pi \iff (\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \pi \iff \begin{cases} \pi_2 = 0 \\ \pi_1 = \pi_3 \\ \pi_5 = 2\pi_4 \end{cases}$$

Ces équations ont comme solution $\pi = (a, 0, a, b, 2b)$ avec $2a + 3b = 1$, donc pas d'unicité.

Cette chaîne étale des "pathologies", qu'on peut percevoir en examinant le **graphe de communication de la chaîne** : **Remarque** : afin d'apercevoir la structure de la chaîne et de calculer plus facilement P^n , il peut être intéressant de renuméroter les états en sorte que des états qui conduisent l'un à l'autre) soient groupés ensemble. Dans cet exemple, si on échange les états e_2 et e_3 , on obtient, après le rangement facilitant des éléments dans l'ordre 1, 3, 2, 4, 5, la matrice de transition :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

a une structure :

$$P = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et encore } P = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q & q_2 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.16 Il y'a deux "traits speciaux" dans cet exemple :

1. il existe un élément "**transient**" 2 (qu'on peut quitter sans retour pour toujours)
2. le graph de communication se décompose en deux classes : (1,3) et (2,4,5) qui ne communiquent pas et la matrice de transition a une structure block diagonale, appelée "**réducibilité**" en probas.

Le fait que la **réducibilité** se traduise dans une structure de matrice à "blocs", montre immédiatement qu'on peut traiter (1,3) et (2,4,5) séparément. Aussi, en enlevant l'élément "transient" 2, il nous restent deux "classes de communication fermées", (1,3) et (4,5), appelées "**classes de récurrence**", où on reste pour toujours une fois entré.

Remarque 1.17 Rémarquons que B_1 et B_2 , correspondant respectivement aux états récurrents (1,3) et aux états récurrents (4,5), sont des matrices stochastiques, et Q , correspondant à l'état transient 2, est une matrice sous-stochastique.

Remarque 1.18 On voit clairement que dans la presence des deux classes recurrentes implique qu'il n'y a pas d'unicité de la distribution stationnaire/vecteur propre a gauche. Par exemple, les distributions stationnaires des classes recurrentes $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0)$ et $(0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ sont des vecteurs propres a gauche, ainsi que toutes leurs combinaisons convexes.

On verifie facilement que :

$$P^n = \begin{pmatrix} B_1^n & 0 & 0 \\ q_1(n) & Q^n & q_2(n) \\ 0 & 0 & B_2^n \end{pmatrix}$$

en reflexion du fait qu'on peut étudier les trois chaînes correspondant aux B_1 , B_2 et Q séparément.

Remarque 1.19 Les questions fondamentales de la théorie des chaînes de Markov sont :

1. le calcul des probabilités de transition P^n
2. le calcul des limites $\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$
3. le calcul des **probabilités d'absorption** $q_i(n), i = 1, 2, \dots$ et des **probabilités de survie** $1 - \sum_i q_i(n)$.

Concernant la matrice **sous-stochastique** Q contenant les probabilités de transition entre les éléments transients (appelée aussi projection de la matrice P sur la réunion des classes transients), remarquons que ses puissances convergent vers 0.

Théorème 1.4 (*) Toutes les valeurs propres d'une matrice sous-stochastique Q ont valeurs absolues inférieures à 1. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = 0$$

c.-à-d. la limite des probabilités de transition entre les états transients est 0.

On vérifie ici que $P^n(2, 2) = (1/2)^n$, en illustrant le théorème ci-dessus. En conclusion,

$$\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Il reste encore à déterminer x_1, x_2 . Une approche directe par un système des récurrences nous montrera que ces deux quantités sont aussi $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$. Ce dernier problème peut être aussi abordé algébriquement via la décomposition spectrale, et aussi par un raisonnement probabiliste, basé sur le fait qu'une fois arrivé dans la classe ergodique $\{4, 5\}$, la chaîne oubliera sa position initiale et finira dans la distribution (d'incertitude) stationnaire. Dans notre cas, on sait aussi que la chaîne arrivera dans la classe ergodique $\{4, 5\}$ avec probabilité 1, d'où le résultat.

Donc, dans notre exemple, le fait qu'il existe une seule classe destination possible pour l'élément transient 2, et donc que l'absorption dans cette classe est sûre, implique $p_2(\hat{4}) = p_2(\hat{5}) = 1$. En conclusion

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

En général, intuitivement, avec plusieurs destinations (classes ergodiques) possibles, il va falloir encore multiplier leurs distributions stationnaires par les probabilités d'absorption respectives[§].

Définition 1.15 Soit i un élément transient d'une chaîne X_n , et soit j un élément appartenant à une classe de récurrence \hat{j} . On appellera **probabilité d'absorption** $p_i(\hat{j})$ la probabilité que la chaîne commencée en i finisse en \hat{j} [§].

§. Rigoureusement, on utilise une décomposition de "la vie de la chaîne" dans la partie qui précède l'absorption, et la partie qui s'ensuit.

§. Le calcul des probabilités d'absorption sera abordé en détail plus tard.

On peut montrer que si la limite $\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ existe, elle satisfait :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j) = p_i(\hat{j}) \pi(j)}$$

où on a dénoté par $p_i(\hat{j})$ la probabilité d'absorption dans la classe de récurrence de j et par $\pi(j)$ la probabilité stationnaire de j dans sa classe (qui coïncide avec $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j)$ pour $i \in \hat{j}$). Ce deuxième facteur reflète le fait évident qu'une fois absorbée dans une classe fermée, la marche oubliera sa position initiale et donc aura exactement les probabilités limites de la classe. Mais, si dans l'exemple 2.3 l'élément transient aurait eu des possibilités de passage vers les deux classes récurrentes existantes, ça nous aurait obligé de résoudre un problème d'absorption avant de calculer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$. Considerons par exemple

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Ici, évidemment,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Considerons maintenant

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Ici,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

La probabilité d'absorption $x = p_2(\hat{1})$ satisfait

$$x = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \times 0, \implies x = \frac{1}{4}$$

La probabilité d'absorption $p(\hat{4}) = 1 - p(\hat{1}) = \frac{3}{4}$. En conclusion, une procédure qui fournisse la limite \mathbf{P} doit :

1. établir si elle existe, ce qui n'est pas toujours le cas, comme on voit en examinant les chaînes de Markov périodiques (qui bougent cycliquement sur les noeuds d'un graphe)
2. inclure la résolution des **problèmes d'absorption** de la chaîne de Markov dans les classes récurrentes
3. calculer la distribution stationnaire des classes récurrentes.

1.8 Quelques exemples de modélisation par les chaînes de Markov

Pour modéliser une situation par une chaîne de Markov, on a besoin d'abord de choisir un espace d'états convenable, et ensuite de déterminer la matrice de transition. Si le processus est ainsi complètement déterminé, alors la propriété de Markov sera satisfaite automatiquement.

Exemple 1.4 *Supposons que une pluie éventuelle demain dépend de la situation du temps dans les trois jours précédents, ainsi : a) S'il y a eu de la pluie dans les deux jours précédents, alors il va pleuvoir avec probabilité .8. b) S'il y a pas eu de la pluie dans aucun des trois jours précédents, alors il va pleuvoir avec probabilité .2. c) Autrement, la situation va être la même comme dans le jour précédent avec probabilité .6. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov, en donnant l'espace des états et la matrice de transition.*

Exemple 1.5 *Un processus qui n'est pas une chaîne de Markov a priori, mais qu'on peut "rendre" Markov par un bon choix de l'espace d'états . Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus à deux états, notés e_1 et e_2 . On suppose que les transitions entre les étapes n et $n + 1$ s'effectuent selon le procédé suivant :*

$$\begin{cases} \text{Si } X_{n-1} = X_n \text{ alors } P([X_{n+1} = e_1] | [X_n = e_i]) = \frac{3}{4} \\ \text{Si } X_{n-1} \neq X_n \text{ alors } P([X_{n+1} = e_1] | [X_n = e_i]) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une chaîne de Markov. b) Construire un espace d'états permettant de modéliser ce processus par une chaîne de Markov et donner alors son graphe.

Solution : b) On construit l'espace d'états suivant : $\{e_1 * e_1, e_1 * e_2, e_2 * e_1, e_2 * e_2\}$. Sur cet'espace, le processus devient Markovien, et la matrice de transition s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.6 Une compagnie d'assurance voiture a un système de bonus avec cinq

niveaux pour les assurés sans sinistres déclarés :

niveau 1 :	0% réduction
niveau 2 :	25% réduction
niveau 3 :	40% réduction
niveau 4 :	50% réduction
niveau 5 :	60% réduction

un assuré, la probabilité de ne pas avoir de sinistre dans un an est de 0.8. Les règles selon on passe d'un niveau (état) à l'autre sont :

Après une année sans sinistre on passe au niveau supérieur suivant ou on reste au niveau 5

Après une année avec un ou plusieurs sinistres

on diminue d'un niveau si l'année précédente, il n'y a pas eu de déclaration de sinistre.

on diminue de deux niveaux si l'année précédente il y a eu au moins une déclaration de sinistre.

- Notons par $X(t)$ le niveau, soit 1, 2, 3, 4 ou 5, de l'assuré pour l'année t . Expliquez pourquoi $\{X(t)\}_{t=1}^{\infty}$ n'est pas une chaîne de Markov.

2. En augmentant le nombre de niveaux, définissez un nouveau processus stochastique $\{Y(t)\}_{t=1}^{\infty}$ qui soit Markov et de telle manière que $Y(t)$ représente le niveau de réduction pour l'assuré dans l'année t .
3. Dédurre la matrice de transition pour la chaîne de Markov $\{Y(t)\}_{t=1}^{\infty}$.

Solution :

1. $\{X(t)\}$ n'est pas Markov parce que, par exemple, $\mathbb{P}[X_{t+1} = 3 \mid X_t = 4, X_{t-1} = 3, \dots]$ ne peut pas se réduire à $\mathbb{P}[X_{t+1} = 3 \mid X_t = 4]$.
 $3=40\%$ réduction cette année, après 25% l'année dernière
 $4=50\%$ réduction cette année, après 40% l'année dernière
 $3a=40\%$ réduction cette année, après 50% l'année dernière
 $4a=50\%$ réduction cette année, après 60% l'année dernière
2. Définition des nouveaux niveaux :
3. La matrice de transition est alors

	1	2	3	4	5	3a	4a
1	0.2	0.8	0	0	0	0	0
2	0.2	0	0.8	0	0	0	0
3	0	0.2	0	0.8	0	0	0
4	0	0	0	0	0.8	0.2	0
5	0	0	0	0	0.8	0	0.2
3a	0.2	0	0	0.8	0	0	0
4a	0	0.2	0	0	0.8	0	0

1.9 Processus de Markov en temps continu(*)

Remarque 1.20 On peut aussi considérer des processus "multi-Bernoulli" et de Markov en temps continu, en remplaçant les jetées de dé par des "compétition des exponentielles", qu'on a vu dans l'exercice ???. A partir de la "compétition des exponentielles" on peut aussi construire le processus de Poisson – voir Chapitre 7 – qui compte le nb. des arrivées dans un intervalle donné (l'analogie du processus binomial).

Remarque 1.21 Les processus de Markov étendent au domaine aléatoire le concept d'évolution contrôlée par une équation différentielle. Ils sont spécifiés par un mécanisme de transition, ils ont des conditions initiales, et possiblement des limites asymptotiques. La classe des processus Markoviens est extrêmement riche, avec une complexité qui dépend des ensembles \mathcal{E}, \mathcal{I} .

Remarque 1.22 (*) Au lieu de la matrice de transition P , on peut aussi baser l'étude des chaînes de Markov sur la matrice $G = P - I \Leftrightarrow P = I + G$. En temps continu, cette formule devient

$$P(dt) \approx I + dtG \implies P(t) \approx (I + dtG)^{t/dt} \rightarrow e^{tG}$$

où G est la matrice des taux de transition du processus. L'étude des chaînes et processus de Markov contient trois types des problèmes. En ordre de difficulté, il s'agit de :

1. distribution d'équilibre : $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tG}$
2. distributions de premier passage, concernant le temps et la position au temps du premier passage d'une frontière
3. distributions transitoires P^n et e^{tG}

Deux méthodes de base sont fondamentales pour l'étude des processus de Markov : a) la méthode du conditionnement, qui permet de dériver des équations pour les espérances conditionnées par l'état initial, et la résolution des équations en utilisant des transformées (de Laplace, Fourier, fonctions génératrices, ...)

Trois familles des processus qui jouent un rôle important dans les applications sont les marches aléatoires/sommes des variables i.i.d. – voir chapitre ??, les processus stationnaires (les processus i.i.d. étant un exemple de la deuxième famille) et les processus de Markov – voir chapitre 2.

Chapitre 2

Chaînes de Markov : approfondissement

ch:Mark

s:per

2.1 La périodicité

La périodicité est mieux abordée probabilistiquement, en analysant, pour chaque état e_i , l'ensemble A_i de temps pour lesquels il est possible de se trouver en i en partant de i , c.-à-d.

$$A_i = \{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Remarque 2.1 Cet ensemble est fermé sous l'opération d'addition, c.-à-d. cet ensemble est un sous groupe de \mathbb{N} .

Définition 2.1 Soit e_i dans E . On appelle période de e_i l'entier $d(i) = p \operatorname{gcd} \{n > 0 ; p_{ii}^{(n)} > 0\}$ (autrement dit : $p_{ii}^{(n)} > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = md(i)$). Si $d(i) = 1$, l'état e_i est dit apériodique.

Remarque 2.2 La période ne dépend que de la classe. Une classe de période 1 est dite apériodique.

Remarque 2.3 On remarque, en regardant le graph de l'exercice (1.5), ou sa matrice après le rearrangement $\{5, 3, 1, 4, 6, 2\}$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que la classe transiente 1,4,6 a une propriété spéciale : chaque'un de ses éléments peut être visité seulement aux dates qui sont congruents mod(3). Cette propriété, appelée périodicité, est aussi rendue évidente en calculant les puissances de

$$Q = P_{\{1,4,6\}} = P \text{ projeté sur } \{1, 4, 6\} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui satisfait $Q^3 = \frac{1}{16}$. On peut aussi détecter la périodicité en calculant les valeurs propres, c.-à-d. les racines du pol char. Dans l'exercice (1.5), elles sont : $[(1-x)(1-12x)](1-16x^3)(1-x)$

(les trois termes correspondent aux projections sur les trois classes). Rémarquer que les trois racines cubiques satisfaisant $\lambda_i^3 = 1/16, i = 1, 2, 3$ provenant de la classe transiente à $Q = P_{\{1,4,6\}}$ qui satisfait $Q^3 = 1/2Id$, exhibent aussi une périodicité de degré 3, "diminuant vers 0".

Remarque 2.4 L'existence d'une boucle, c.-à-d. $p_{ii} > 0$, assure l'apériodicité.

Exemple 2.1 Une classe de communication à matrice de transition \tilde{P} , pour laquelle il existe un entier c tel que $\tilde{P}^c = I$, appelée cyclique d'ordre c , est forcément périodique, et la période d est parmi les diviseurs de c . Par exemple, en changeant la classe transitoire dans l'exemple ci-dessus en sorte qu'elle contient un cycle de longueur 4 et un de longueur 2, on obtient une classe cyclique d'ordre 4 et période 2.

L'existence de la matrice des distributions à la longue est liée à la question de la périodicité.

per **Exemple 2.2**

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On aperçoit immédiatement la classe récurrente 6, 7 et les classes transitoires 1 et 2, 3, 4, 5. La dernière classe est le collage des deux cycles de période 3, ce que donne immédiatement que $A_2 = \{3k, k \geq 0\} = \{3, 6, 9, \dots\}$. Si par contre un de ces cycles avait une longueur pas divisible par 3, par exemple 4, on aurait eu : $A_2 = \{3k + 4l, k, l \geq 0\} = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, \dots\}$, dans quel cas A_2 contiendrait tous les nombres en partant de 6. On voit que les ensembles A_i contiennent toujours tous les nombres de la forme $k d(i)$, pour k assez grand (cela est un résultat valable pour n'importe quel semigroup de \mathbb{N}). En ce qui concerne la périodicité, il y a deux possibilités pour A_i , en dépendant de $d = \text{p.g.c.d}$ de la longueur des deux cycles :

1. Dans le cas $d = 1$, cet ensemble contient "tous les nombres assez grands" (en partant d'un certain point).
2. Dans le cas $d > 1$, cet ensemble est un sous ensemble du sous groupe $d\mathbb{N}$. Donc, la matrice $P^{(n)} = P^n$ ne peut converger quand $n \rightarrow \infty$ (car il y aura des 0 qui alternent avec des nombres positives pour toujours : voir par exemple la marche cyclique sur \mathbb{Z}^3).

Remarque 2.5 On verra que la périodicité des classes transitoires n'empêche pas du tout le calcul de la matrice de distributions à la longue, parce que la masse totale de la partie transitoire d'une chaîne converge vers 0 (voir la troisième remarque qui suit le théorème ??).

Par contre, la périodicité dans une classe récurrente rend la convergence impossible. On peut démontrer que son absence assure la convergence, car cela est équivalent à l'absence des valeurs propres qui sont racines de l'unité, et à l'absence des valeurs propres de valeur absolue $|\lambda| = 1$, sauf $\lambda = 1$ (par Perron-Frobenius). Finalement, le fait que λ^n converge pour chaque valeur propre λ assure l'existence de la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$. **Donc, la limite à la longue $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j)$ d'une chaîne existe ssi il n'y a pas des classes récurrentes périodiques.**

2.2 Ou on revoit les probabilités de premier passage intervenant dans le comportement limite des chaînes

Nous considérons ici le calcul des distributions "à la longue" (ou simplement limites) d'une chaîne spécifiée par $c(0)$ et P :

$$\pi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(0)P^n \quad (2.1)$$

pour n'importe quelle distribution initiale $\mu(0)$. L'existence des distributions limite (2.1) est évidemment équivalente à l'existence de la limite

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n. \quad (2.2)$$

Rq : L'élément générique de cette matrice

$$P_{i,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_i[X_n = j]$$

représente la limite des probabilités de trouver le processus en j après n pas, à partir de i . Cf. le **théorème ergodique**, la limite existe (2.2) ssi il n'y a pas des classes récurrentes périodiques, et, **avec une seule classe de communication, elle est une matrice de rang 1 de la forme**

$$P = \mathbf{1}\pi,$$

où π est la "distribution invariante". **Q** : Pourquoi $\mathbf{1}$ et π apparaissent dans la limite, et pourquoi le rang de la limite est 1 dans le cas d'une seule classe de communication? **R** : Les réponses deviennent évidentes par une approche algébrique, à partir de la décomposition spectrale. Apparemment, l'"ergodicité" est équivalente algébriquement aux faits que :

1. Une matrice stochastique P n'a pas des valeurs propres supérieures ou égales en valeur absolue à la valeur propre $\lambda = 1$, sauf $\lambda = 1$, et que les vecteurs propres correspondant à ces valeurs disparaissent dans la limite.
2. La multiplicité de la valeur propre 1 est égale à 1, et ses vecteurs propres à droite et à gauche sont $\mathbf{1}, \pi$

Dans ce chapitre, nous allons approfondir le comportement limite des chaînes de Markov, à partir de la décomposition spectrale de la matrice de transition P . Avant le cas général, nous analyserons en détail deux cas particuliers :

1. les chaînes (faiblement) ergodiques, donc avec $I = 1$ classes récurrentes, et matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} Q & \mathbf{q} \\ \mathbf{0} & P_r \end{pmatrix}$$

et où \mathbf{q} contient les probabilités de transition dans les états récurrents.

2. les chaînes absorbantes, i.e avec les classes récurrentes étant toutes de cardinalité 1., c.-à-d. avec

$$P = \begin{pmatrix} Q & \mathbf{q}^{(1)} & \mathbf{q}^{(2)} & \dots \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & \dots \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & \ddots \\ \mathbf{0} & 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

2.2.1 Le cas purement absorbant : les probabilités d'absorption

Le cas le plus simple est celui des chaînes qui n'ont que des états récurrents absorbants, où $P = \begin{pmatrix} Q & q \\ 0 & I \end{pmatrix}$ et où q contient comme colonnes les probabilités d'absorption immédiate dans les états absorbants. Comme $\lim Q^n = 0$, P doit être de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

En utilisant $PP = P$, on trouve la solution explicite

$$X = (I - Q)^{-1}q = P^{(abs)} \iff x^{(i)} = Qx^{(i)} + x^{(i)},$$

où $x^{(i)}$ sont les colonnes de la matrice X . On reconnaît que $x^{(i)}$ sont précisément les probabilités d'absorption dans la classe récurrente i (et parfois, le "système d'absorption" trouvé en conditionnant sur le premier pas est la méthode la plus convenable de les obtenir.).

Lemme 2.1 *Pour une chaîne absorbante, la matrice des probabilités limite $P_{i,j} = P_{i,j}^{(abs)}$, $\forall i$ transitoire, $\forall j$ absorbant a comme éléments les probabilités d'absorption $p_i(j) = \mathbb{P}_i\{X_T = j\}$.*

Rq : Le résultat est en fait évident, en tenant compte de l'interprétation des probabilités limite $P(i, j)$. En conclusion, on trouve que la matrice limite est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P^{(abs)} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Exercice 2.1 *Calculez la matrice X dans le cas d'un seul élément absorbant.*

Exercice 2.2 *Que devient la décomposition spectrale (3.3) et les vecteurs propres à droite et gauche de la valeur 1 dans le cas absorbant ?*

Solution : Cherchons à trouver un vecteur propre à droite v_j et un vecteur propre à gauche π_j pour chaque élément absorbant j . On trouve $\pi_j = e_j = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$. Décomposant $v_j = (a_j, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ on trouve que a_j contiennent les probabilités d'absorption dans la classe j .

2.2.2 La distribution limite dans le cas faiblement ergodique

Exercice 2.3 *Calculez par l'approche algébrique (donc en résolvant les équations $Pv = v$, $\pi P = \pi$, $\pi v = 1$) la matrice limite P si*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & b \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

erg

Théorème 2.1 Soit X_n une chaîne de Markov finie avec une seule classe récurrente, qui est apériodique. a) Cela est algébriquement équivalent à une multiplicité un pour la valeur propre $\lambda = 1$, et à l'absence des autres valeurs propres de valeur absolue $|\lambda| = 1$. b) La distribution limite est unique et la limite \mathbf{P} est une matrice de rang 1 :

$$\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \mathbf{1} \times (\mathbf{0} \quad |\pi_\infty) \quad (2.3)$$

où π_∞ est la distribution stationnaire de la classe récurrente.

Rq : Ce resultat est aussi evident, en tenant compte de l'interpretation des probabilités limite $P(i, j)$, sauf que le resultat est cette fois déterminée par "la vie éternelle" d'après absorption.

Dem : La démonstration du théorème 2.1 b) par l'approche algébrique est immédiate. En effet, prenons $\mathbf{v} = \mathbf{1}$. Soit $P = \begin{pmatrix} Q & q \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$ et cherchons à trouver un vecteur propre à gauche de la forme $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_t, \mathbf{p}_1)$, donc satisfaisant

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_t Q &= \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_t q + \mathbf{p}_1 P_1 = \mathbf{p}_1 \iff \\ \mathbf{p}_t &= (I - Q)^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{p}_1 = \pi \end{aligned}$$

En conclusion, la structure de la matrice limite \mathbf{P} pour les chaînes faiblement ergodiques est assez simple, pareille à celle du théorème fondamental ergodique ; il suffit de trouver la distribution stationnaire π_∞ de la seule classe récurrente, et à "l'étendre" par des zéros sur les classes transitoires. En suite on utilise la formule

$$\mathbf{P} = \mathbf{1} \mathbf{p}$$

où \mathbf{p} est le vecteur π_∞ complété avec des zéros. Remarquons encore que $\mathbf{1}, \mathbf{p}$ sont des vecteurs propres à droite et gauche, normalisés tel que \mathbf{p} est un vecteur des probabilités et tel que $\langle \mathbf{p}, \mathbf{1} \rangle = 1$, et donc la décomposition ci-dessus est un cas particulier de la forme spécifiée en (3.3).

2.2.3 Echauffement pour le cas general

Nous allons examiner maintenant une chaîne décomposable (pour la quelle la distribution stationnaire n'est pas unique, mais peut prendre toute valeur possible dans l'ensemble convexe engendré par les distributions stationnaires des classes recurrents).

ne

Exemple 2.3 Exemple de non unicité de la distribution stationnaire π : Dans l'exemple défini par la matrice ci dessous, cherchons $\pi \in (\mathbb{R}^+)^5$ tel que $\pi P = \pi$ et $\sum_{i=1}^5 \pi_i = 1$.

$$\pi P = \pi \iff (\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \pi \iff \begin{cases} \pi_2 = 0 \\ \pi_1 = \pi_3 \\ \pi_5 = 2\pi_4 \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases}$$

On voit clairement qu'il n'y a pas unicité (par exemple $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0)$ et $(0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ sont des distributions stationnaires).

Cette chaîne étale des “pathologies”, qu’on peut percevoir en examinant le **graphe de communication de la chaîne** : **Remarque** : afin d’apercevoir la structure de la chaîne et de calculer plus facilement P^n , il peut être intéressant de renuméroter les états en sorte que des états qui conduisent l’un à l’autre) soient groupés ensemble. Dans cet exemple, si on échange les états e_2 et e_3 , on obtient, après le rangement facilitant des éléments dans l’ordre 1, 3, 2, 4, 5, la matrice de transition :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

a structure : $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et encore $P =$

$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & B_{1,2} \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}$ où A , correspondant aux états (1, 3) (qui conduisent l’un à l’autre) et

B_2 , correspondant aux états (4, 5) (qui conduisent l’un à l’autre aussi) sont des matrices stochastiques, et B_1 , correspondant aux transitions entre les états transitoires ((2) est une matrices sous-stochastique. Il y’a ici deux pathologies par rapport au cas ergodique :

1. il existe un élément **transitoire** 2 (qu’on peut quitter sans retour pour toujours)
2. le graph de communication se décompose en deux classes : (1, 3) et (2, 4, 5) qui ne communiquent pas et la matrice de transition a une structure block diagonale, appelée “**réducibilité**” en proba.

La structure de matrice à ”blocs”, montre immédiatement qu’on peut traiter (1, 3) et (2, 4, 5) séparément. Aussi, en enlevant l’élément “transitoire” 2, il nous restent deux ”classes de communication fermées”, (1, 3) et (4, 5), appelées “**classes de récurrence**”, où on reste pour

toujours une fois entré. On vérifie facilement que : $P^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 & 0 \\ 0 & B_1^n & B_{1,2,(n)} \\ 0 & 0 & B_2^n \end{pmatrix}$ en réflexion

du fait qu’on peut étudier les trois chaînes correspondant aux A , B_1 et B_2 séparément. Concernant la matrice B_1 contenant les probabilités de transition entre les éléments transitoires (appelée aussi projection de la matrice P sur la réunion des classes transitoires), remarquons d’abord que elle est une matrice **sous-stochastique**.

Définition 2.2 Une matrice Q s’appelle sous-stochastique si la somme des éléments de chaque ligne est ≤ 1 , avec inégalité stricte dans au moins une ligne.

Théorème 2.2 Toutes les valeurs propres d’une matrice sous-stochastique Q ont valeurs absolues strictement inférieures à 1. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = 0$$

c.-à-d. la limite des probabilités de transition entre les états transitoires est 0.

On vérifie ici que $P^n(2, 2) = (1/2)^n$, en illustrant le théorème ci-dessus. En conclusion,

$$\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Il reste encore à déterminer x_1, x_2 .

Exercice 2.4 Montrer par une approche directe par un système des récurrences que ces deux quantités sont aussi $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$.

Le calcul des éléments $\mathbf{P}(i, j)$ où $i \in \mathcal{T}, j \in \mathcal{D}$ peut être abordé

1. algébriquement via la décomposition spectrale, ou
2. par une approche probabiliste qui décompose la vie d'une particule dans la partie "transitoire" qui précède l'absorption, et la partie "éternelle" qui s'ensuit.

Dans notre exemple avec une seule classe récurrente, on "sent" que la réponse tiens de la "vie éternelle". Avec plusieurs destinations possibles (classes récurrentes), il va falloir tenir compte des probabilités de toutes les fins possibles.

Définition 2.3 Soit i un élément transitoire d'une chaîne X_n , et soit j un élément appartenant à une classe de récurrence \hat{j} . On appellera **probabilité d'absorption** $p_i(\hat{j})$ la probabilité que la chaîne commencée en i finisse en \hat{j} .

Le calcul des probabilités d'absorption sera abordé en détail plus tard. Finalement, on arrivera à la conclusion que si la limite $\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ existe, elle satisfait :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j) = p_i(\hat{j}) \pi(j)}$$

où on a dénoté par $p_i(\hat{j})$ la probabilité d'absorption dans la classe de récurrence de j et par $\pi(j)$ la probabilité stationnaire de j dans sa classe (qui coïncide avec $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j)$ pour $i \in \hat{j}$). Ce deuxième facteur reflète le fait évident qu'une fois absorbée dans une classe fermée, la marche oubliera sa position initiale et donc aura exactement les probabilités limites de la classe. Dans notre exemple, le fait qu'il existe une seule classe destination possible pour l'élément transitoire 2, et donc que l'absorption dans cette classe est sûre, implique $p_2(\hat{4}) = p_2(\hat{5}) = 1$. En conclusion

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Mais, si dans l'exemple 2.3 l'élément transitoire aurait eu des possibilités de passage vers les deux classes récurrentes existantes, ça nous aurait obligé de résoudre un problème d'absorption avant de calculer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$. En conclusion, une procédure qui fournisse la limite \mathbf{P} doit :

1. établir si elle existe, ce qui n'est pas toujours le cas, comme on voit en examinant les chaînes de Markov qui bougent cycliquement sur les noeuds d'un graphe
2. inclure la résolution des **problèmes de Dirichlet** concernant l'absorbtion de la chaîne de Markov dans les classes récurrentes
3. calculer la distribution stationnaire des classes récurrentes.

Chapitre 3

L'approche algébrique aux chaînes de Markov

3.1 Démonstration algébrique du théorème ergodique, par la décomposition spectrale

L'approche alternative algébrique au comportement limite des chaînes de Markov est utile pour mieux comprendre l'ergodicité, ainsi que pour examiner la vitesse de convergence vers la distribution limite.

1:dec

Lemme 3.1 a) Supposons qu'une matrice A satisfait $A = C\Lambda L$ où $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ est une matrice diagonale. Soit \mathbf{c}_i les colonnes de C , et \mathbf{l}_i les lignes de L . Alors, on a une décomposition en matrices de rang 1 :

$$A = \sum_i \lambda_i \mathbf{c}_i \mathbf{l}_i$$

b) Soit une matrice A de dimension n ayant un ensemble de n vecteurs propres à droite indépendants \mathbf{d}_i , et donc aussi un ensemble de n vecteurs propres à gauche indépendants \mathbf{g}'_i , calculés en prenant les lignes de la matrice $G = D^{-1}$, où $D = (\mathbf{d}_1 \mid \mathbf{d}_2 \mid \dots \mid \mathbf{d}_n)$ (ce cas a lieu par exemple quand toutes les valeurs propres de P sont distinctes). Alors, la décomposition spectrale $A = D \text{Diag}(\lambda_i) D^{-1} := D \text{Diag}(\lambda_i) G$ peut-être aussi écrite comme :

$$A = \sum_i \lambda_i \mathbf{d}_i \mathbf{g}_i$$

où λ_i sont les valeurs propres.

Dem : b) Décomposons $\text{Diag}(\lambda_i) = \sum_i \lambda_i E_i$, où E_i est la matrice projection sur la coordonnée i . Alors

$$A = D \left(\sum_i \lambda_i E_i \right) G = \sum_i \lambda_i (D E_i G) = \sum_i \lambda_i \mathbf{d}_i \mathbf{g}_i$$

e:er

Exercice 3.1 Déterminer la limite $\mathbf{P} := \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ pour une chaîne ayant

1. des valeurs propres de P distinctes (ce qui est "le cas générique"), et
2. 1 comme la seule valeur propre de module 1.

R : Il suit immédiatement par la décomposition spectrale que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = D \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Diag}(\lambda_i^n) D^{-1} = D \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} D^{-1} = \mathbf{1} \boldsymbol{\pi}$$

Alternativement, par la Lemme 3.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \lambda_i^n \mathbf{d}_i \mathbf{g}_i = \mathbf{1} \boldsymbol{\pi}$$

Remarque 3.1 *La première condition dans l'exercice 3.1 n'est pas nécessaire. L'abondance du cas ergodique s'explique donc par la décomposition spectrale, par la rareté du cas des valeurs propres qui tombent précisément sur le cercle unitaire.*

Remarque 3.2 *Si des valeurs propres de module 1 différentes de 1 existent, il suit immédiatement que $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ n'existe pas. Ces valeurs doivent satisfaire $\lambda^m = 1, m \leq \dim(P)$! Ce cas, appelée périodique, sera examiné dans la section 2.1.*

Remarque 3.3 *Sauf la décomposition spectrale $P = D \text{Diag}(\lambda_i) D^{-1} = \sum_i \lambda_i \mathbf{d}_i \mathbf{g}_i$, d'autres méthodes de solution sont possibles, comme le Thm. de Cayley-Hamilton $p(P) = 0$, où $p(z) = \det(zI - P)$. Dans l'exercice 1.6, on trouve*

$$P^n = x_n P - y_n I, x_2 = 2 - a - b, y_2 = 1 - a - b, \dots$$

Aussi, pour un élément fixe, une décomposition avec coefficients indéterminés comme $P_{11}(n) = \sum_i a_i \lambda_i^n$ peut-être obtenue, à partir de premières valeurs de la suite (avec des valeurs numériques, une recherche sur <http://oeis.org/> pourrait aussi aboutir)

Remarque 3.4 *Il est aussi possible de déterminer les classes de communication en identifiant les éléments nonnuls dans la **matrice fondamentale** $(I - sP)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} s^i P^i$, mais dans des exemples de grande dimension cela demande l'utilisation des logiciels.*

3.2 Le calcul de la limite des matrices des transitions à la longue

Le calcul de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\mu}_0 P^n := \boldsymbol{\mu}_0 \mathbf{P}$$

est facile à obtenir via une approche complètement algébrique, en utilisant :

1. le théorème de Perron-Frobenius. Plus précisément, on utilise les faits que
 - (a) 1 est la valeur propre PF (réelle, maximale) pour les matrices stochastiques P (exercice (3.5), et
 - (b) dans l'absence des classes périodiques, toutes les autres valeurs propres sont strictement inférieures à 1 en valeur absolue.
2. La décomposition spectrale. Revisons ici le cas le plus simple des matrices P avec forme Jordan diagonale (par exemple avec valeurs propres λ_i distinctes). Soit Λ la matrice diagonale des valeurs propres, et soit V une matrice ayant les vecteurs propres à droite \mathbf{v}_i comme colonnes. Remarquons que la diagonalisation

$$PV = V\Lambda \Leftrightarrow P = V\Lambda V^{-1}$$

nous permet d'écrire

$$P = V\Lambda V^{-1} \tag{3.1}$$

où $\Pi = V^{-1}$ et une matrice dont les lignes $\boldsymbol{\pi}_i$ sont des vecteurs propres à gauche, normalisés tq $\boldsymbol{\pi}_i \mathbf{v}_j = \delta_{i,j}$. La représentation spectrale (3.1) de P s'écrit aussi (vérifier!) comme

$$P = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i \boldsymbol{\pi}_i \quad (3.2)$$

Rq : La représentation (3.2) nous permet d'écrire une matrice arbitraire comme somme de n matrices de rang 1.

En utilisant la représentation (3.2), on trouve dans le cas diagonalisable que

$$P^n = V \Lambda^n \Pi = \sum_i \lambda_i^n \mathbf{v}_i \boldsymbol{\pi}_i$$

et que convergence peut avoir lieu seulement dans l'absence des valeurs propres $\lambda_i \neq \lambda_{PF}$ tq $|\lambda_i| = \lambda_{PF}$ (c.-à-d., de périodicités). Finalement

$$P^n \implies \mathbf{P} = \sum_{i:\lambda_i=1}^R \mathbf{v}_i \boldsymbol{\pi}_i = \mathbf{V} \boldsymbol{\Pi} \quad (3.3)$$

où R est le nb des classes récurrentes, et $\mathbf{V} \boldsymbol{\Pi}$ sont les matrices ayant \mathbf{v}_i et $\boldsymbol{\pi}_i$ comme colonnes et lignes, respectivement. Cette formule reste encore valable dans le cas général, même que la décomposition de Jordan peut contenir des blocs nondiagonales, car les blocs de Jordan associée à des valeurs propres tq $|\lambda_{(i)}| < 1$ disparaissent dans la limite $n \rightarrow \infty$ (vérifier!). On obtient donc que dans l'absence des périodicités dans les classes récurrentes, la limite de P^n est donnée toujours par (3.3).

Théorème 3.1 1. La multiplicité de la valeur propre 1 est égale au nombre R des classes récurrentes.

2. Les vecteurs propres à gauche/droite correspondant à une classe récurrente r sont respectivement de la forme $\boldsymbol{\pi}_r \mathbf{1}_r$, où $\boldsymbol{\pi}_r$ est la distribution stationnaire de la classe r (complété en suite par des 0 en multipliant par $\mathbf{1}_r$), et $\mathbf{v}_r = (\mathbf{a}_r, \mathbf{1}_r)$, où \mathbf{a}_r dénote le vecteur des probabilités d'adsorption dans la classe r .

3. La limite $\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ existe ssi la matrice P n'a pas des valeurs propres avec $|\lambda| = 1$ à part la valeur propre de Perron-Frobenius $\lambda_{PF} = 1$ (c.-à-d. s'il n'y a pas des périodicités), dans quel cas elle est donnée par (3.3). Dans ce cas, elle est égale à $\sum_A \mathbf{v}_A \boldsymbol{\pi}_A$.

Corollaire 3.1 1. La distribution stationnaire est unique ssi la valeur propre de Perron-Frobenius $\lambda = 1$ a multiplicité 1.

2. Une chaîne de Markov est ergodique, c.-à-d. $P^n \implies \mathbf{1} \boldsymbol{\pi}$ ssi les deux conditions ci-dessus sont vérifiées.

En conclusion, l'étude de l'existence et l'unicité de distributions à la longue, et l'étude du comportement asymptotique de P^n , peuvent être abordés algébriquement.

Il convient quand même de s'intéresser aussi aux interprétations probabilistes, par exemple, au fait que ν_{PF} coïncide avec le nombre de classes récurrentes, et nous abordons ensuite plusieurs aspects probabilistes du théorème de Perron-Frobenius (en fait, la théorie des chaînes de Markov finies/dénombrables peut être conçue comme une explication probabiliste du théorème de Perron-Frobenius).

3.2.1 La structure probabiliste de la matrice de distributions a la longue

Nous donnerons maintenant une méthode pour la détermination des distributions ‘à la longue’ d’une chaîne, dans l’absence des classes récurrentes périodiques. Soit

$$P = \begin{pmatrix} Q_t & T_1 & \dots & \dots & T_I \\ 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & P_I \end{pmatrix}$$

une décomposition de la matrice de transition P , avec $P_i, i = 1, \dots, I$ étant les projections de la matrice P sur les classes récurrentes, et avec Q_t étant la projection de la matrice P sur les classes transitoires. Il est facile de vérifier que la puissance P^n est de la forme :

$$P^n = \begin{pmatrix} Q_t^n & T_{1,n} & \dots & \dots & T_{I,n} \\ 0 & P_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & P_2^n & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & P_I^n \end{pmatrix}$$

Cette formule de décomposition reflète les idées suivantes :

1. Les classes récurrentes ”ne savent” pas du tout qu’il existe un ”monde extérieur”; par conséquent, la projection P_i de la matrice P sur une classe récurrente i est elle même une matrice stochastique et la projection de la puissance P^n sur la classe i est précisément P_i^n ; ce calcul peut être effectué en ignorant le reste des éléments. Le même est vrai pour les probabilités de transition $Q^n(i, j)$ entre i et j transitoires, c.-à-d. la projection de la puissance P^n sur les classes transitoires est précisément Q^n et peut être donc aussi calculée en ignorant le reste des éléments.
2. Les probabilités $P^n(i, j)$ pour i, j récurrentes, mais dans des classes différentes sont toujours 0 (comme pour $n = 1$) et alors la limite est aussi 0. Le même est vrai pour les probabilités $P^n(i, j)$ pour i récurrentes et j transitoires.
3. La limite de Q^n sera toujours 0, parce que la matrice Q est sous-stochastique, et les limites de P_i^n seront donné par le théorème ergodique.

En conclusion, si la limite \mathbf{P} existe, elle est de la forme :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & X_1 & \dots & \dots & X_I \\ 0 & \Pi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \Pi_I \end{pmatrix}$$

où X_1, \dots, X_I sont encore à déterminer, cf. le lemme 3.2 ci-dessous, en résolvant un problème d’adsorption.

Exercice 3.2 *Que devient la décomposition spectrale (3.3) dans le cas décomposable et sans éléments transitoires ?*

3.2.2 Le calcul de la distribution limite dans le cas général

Nous considérons maintenant le cas général à plusieurs classes récurrentes. Il nous reste seulement de calculer les limites $X(i, j) := \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j)$ pour i transitoire et j récurrent. Nous avons vu dans nos exemples qu'il y a deux vecteurs de probabilités à déterminer : a) $p_i(\hat{j})$, de finir dans la classe de récurrence de j à partir de l'élément transitoire i , et b) $\pi(j)$ la probabilité stationnaire que la chaîne soit observée dans l'état j (ou la proportion de temps passé dans l'état j). Pour cela, on utilisera :

mult **Lemme 3.2**

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j) = p_i(\hat{j}) \pi(j)} \quad (3.4)$$

où on a dénoté par $p_i(\hat{j})$ la probabilité d'absorption dans la classe de récurrence de j (et par $\pi(j)$ la probabilité stationnaire de j dans sa classe). En forme matricielle, $X_{\hat{j}} = \mathbf{p}_{\hat{j}} \times \boldsymbol{\pi}_{\hat{j}}$

Cette loi multiplicative est assez claire intuitivement : elle reflète l'indépendance entre le comportement avant et après absorption, et se vérifie facilement¹. Donc, le calcul des limites $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j)$ pour i transitoire et j récurrent demande le calcul des probabilités d'absorption $p_i(\hat{j})$ et l'application du lemme 3.2.

p1 **Exemple 3.1** Calculer la matrice $\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ pour l'exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 1-a-b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution : après le rangement facilitant des éléments dans l'ordre 1, 4, 6, 2, 3, 5 la matrice de transition devient :

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1-a-b & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

On aperçoit par la structure de matrice à "blocs" qu'on peut traiter les classes (2) et (3, 5) séparément. Ici, l'absorption dans les classes récurrentes se fait toujours en partant de 1,

1. En conditionnant sur la position k d'arrivée dans la classe de récurrence \hat{j} de j après le temps T de transition de la partie transitoire, on trouve que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j) = \sum_{k \in \hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\} \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(k, j) \quad (\text{par propr. Markov}) \quad (3.5)$$

$$= \sum_{k \in \hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\} \pi(j) \quad (\text{par ergodicité de la classe récurrente}) \quad (3.6)$$

$$= \pi(j) \sum_{k \in \hat{j}} \mathbb{P}_i\{X_T = k\} = p_i(\hat{j}) \pi(j) \quad (3.7)$$

et alors les probabilités d'absorption de 4 et 6 sont identiques aux celles de 1. En plus, l'absorption se fait avec les probabilités données a, b dans les classes récurrentes (2) et (3, 5), respectivement. Finalement, on trouve par le lemme (3.2)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b} & \frac{1}{2} & \frac{b}{a+b} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b} & \frac{1}{2} & \frac{a}{a+b} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b} & \frac{1}{2} & \frac{a}{a+b} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le problème du calcul de P a été simplifié ci-dessus par la connaissance immédiate des probabilités d'absorption $p_i(\hat{j})$ dans chacune des classes récurrentes. En applications, il faudra calculer les probabilités d'absorption $p_i(\hat{j})$ séparément pour chaque classe, sauf une, en résolvant un système d'absorption correspondant, obtenu en "collant ensemble" tous les éléments de chaque classe (pour la dernière classe, on peut obtenir les probabilités d'absorption comme complémentaires de celles dans les autres classes)

p2 **Exemple 3.2** Calculer la matrice $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ pour l'exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & b & 0 & 1-b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution : après le rangement des éléments dans l'ordre 1, 4, 6, 2, 3, 5 la matrice de transition devient :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1-b \end{pmatrix}$$

Le système d'absorption :

$$\begin{aligned} p_1(2) &= \frac{1}{3}p_4(2) + \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}0 \\ p_4(2) &= \frac{1}{2}p_4(2) + \frac{1}{2}1 \\ p_6(2) &= p_1(2) \end{aligned}$$

donne $p_1(2) = 3/5 = p_6(2)$ et $p_4(2) = 4/5$, et alors les probabilités complémentaires sont : $p_1(\hat{3}) = 2/5 = p_6(\hat{3})$ et $p_4(\hat{3}) = 1/5$ (les résultats auraient pu être devinés, en observant que l'absorption dans les classes récurrentes se fait seulement en partant de 1 et de 4, tandis que

6 a les mêmes probabilités d'abs. que 1. Posant $\tilde{a} = \frac{a}{a+b}$, $\tilde{b} = \frac{b}{a+b}$ on trouve finalement :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\tilde{b} & \frac{2}{5}\tilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\tilde{b} & \frac{1}{5}\tilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\tilde{b} & \frac{2}{5}\tilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 3.3 Démontrer la lemme 3.2, à partir des deux équations $PP = P$, $PP = P$. Que devient la décomposition (3.3), c.-à-d. les vecteurs propres à droite et gauche de la valeur 1 dans le cas général ?

Solution : Cherchons à trouver un vecteur propre à droite $\mathbf{v}^{(j)}$ et un vecteur propre à gauche $\boldsymbol{\pi}^{(j)}$ pour chaque élément absorbant j . On trouve $\boldsymbol{\pi}^{(j)} = (0, 0, \dots, \pi_j, \dots, 0)$, la distribution stationnaire de la classe j . Décomposant $\mathbf{v}^{(j)} = (\mathbf{v}_t, 0, 0, \dots, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ on trouve $\mathbf{v}_t = \mathbf{p}_j$, où p_j sont les probabilités d'absorption dans la classe j . En travaillant en forme matricielle, on trouve les matrices de rang 1 $X_j = \mathbf{p}_j \times \boldsymbol{\pi}_j$.

3.2.3 Le théorème de Perron-Frobenius

Exercice 3.4 Est-ce qu'il existent des matrices réelles 2×2 , sans éléments négatifs, et avec des valeurs propres complexes ?

La réponse est un cas particulier du :

Théorème 3.2 (Perron-Frobenius) Soit P une matrice finie sans éléments négatifs. Alors :

1. Parmi les valeurs propres de module maximal il existe toujours une, $\lambda = \lambda_{PF}$ qui est **réelle positive**, qu'on appellera **la valeur propre PF** (de Perron-Frobenius). Dès lors, toutes les autres valeurs propres ont une valeur absolue inférieure ou égale à la valeur propre λ_{PF} .
2. Le bloc de Jordan correspondant à λ_{PF} a une structure diagonale (c.-à-d. la multiplicité algébrique ν_{PF} de λ_{PF} est égale à la dimension de son espace de vecteurs propres), et les espaces des vecteurs propres à droite et à gauche de λ_{PF} contiennent chacun une base de vecteurs propres $\mathbf{v}_i^{(PF)}$, $\boldsymbol{\pi}_i^{(PF)}$, $i = 1, 2, \dots, \nu_{PF}$ ayant **toutes leurs composantes nonnégatives**.
3. S'il y a d'autres valeurs propres égales à λ_{PF} en valeur absolue, elles doivent être des racines de λ_{PF} , c.-à-d. de la forme $\lambda_{PF}^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$.

Rémarque : Le théorème de PF a plusieurs implications pour l'analyse des chaînes de Markov homogènes à espace d'états **fini**. Par exemple, l'existence des valeurs propres qui sont des racines de λ_{PF} est équivalente à la présence des périodicités dans la suite des puissances P^n , $n = 1, 2, \dots$

e:PF

Exercice 3.5 Démontrer qu'une matrice stochastique P n'a pas de valeurs propres avec module plus grand que 1, et donc sa valeur propre PF est égale à 1. Ind : Intuitivement, les moyennes pondérées de v données par Pv ne peuvent pas augmenter les composantes de v .

Exercice 3.6 Montrez que le théorème de Perron-Frobenius implique :

1. Une chaîne homogène à espace d'états **fini** a au moins une distribution stationnaire.

2. *La dimension de l'espace d'états des distributions stationnaires coïncide avec le nb des classes de récurrence.*

Conclusion : On voit que la connaissance de la structure du graphe de communication simplifie considérablement le problème du calcul de la limite \mathbf{P} .

Chapitre 4

Problèmes de Dirichlet/premier passage/absorption pour les chaînes de Markov

Exercice 4.1 On lance une monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à q et celle de sortir pile égale à $p = 1 - q$, jusqu'à ce qu'on obtient une pile. Soit $N^{(1)}$ le nombre de faces précédant la première pile ($N^{(1)} = 0, 1, 2, \dots$). Par exemple, si $X_1 = F, \dots, X_{j-1} = F$ et $X_j = P, j \geq 1$, la valeur de $N^{(1)}$ est $j - 1$.

1. Calculez $p_k = P[N^{(1)} = k], k = 0, \dots$. Quelle est la loi (distribution) de $N^{(1)}$?
2. Trouvez les moments $m_1 = EN^{(1)}$, et $m_2 = E(N^{(1)})^2$ par la méthode du conditionnement sur le premier pas, en utilisant la relation $\mathcal{L}(N^{(1)}|X_1 = F) = \mathcal{L}(1 + N^{(1)})$ (qui est une conséquence de la décomposition "premier pas + le reste")

$$N^{(1)'} = 1 + N'$$

et du fait que les distributions conditionnées par le premier pas du "reste" N' sont connues : a) $(N'|X_1 = P) \equiv 0$ et b) $\mathcal{L}(N'|X_1 = F) = \mathcal{L}(N^{(1)})$ par le fait que la seule différence entre les réalisations possibles de N' et ceux de $N^{(1)}$ est le moment "de départ de la montre", qui n'affecte pas la distribution d'une chaîne homogène).

3. Trouvez l'espérance $m = EN^{(2)}$ du nombre des essais jusqu'à ce qu'on obtient deux piles consécutives.
4. Généraliser pour $k = 3$ piles consécutives, et pour k arbitraire.
5. "Mieux que les moments :". Trouvez la fonction génératrice des probabilités $\varphi_{N^{(1)}}^*(z) = EZ^{N^{(1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, et deduisez l'espérance $EN^{(1)}$, en calculant $\varphi'(1)$.
6. Les mêmes questions pour $\varphi_{N^{(2)}}^*(z)$ et pour $\varphi_{N^{(3)}}^*(z)$, ainsi que pour $\varphi_{N^{(2)'}}^*(z)$ et pour $\varphi_{N^{(3)'}}^*(z)$, où les dernières variables représentent les nombres des essais jusqu'à ce qu'on obtient deux/trois piles consécutives, en incluant la suite finale des piles.

Solutions :

1. L'espace des expériences est : $E = \{P, FP, FFP, FFFP, \dots\} = \{P\} \cup FE$. $p_k = pq^k, k = 0, 1, \dots$. On a à faire avec une distribution bien connue (la géométrique!!).
2. Il est quand même intéressant de remarquer que l'espérance peut aussi se calculer par un conditionnement sur le premier pas :

$$m_1 = p \times 0 + q(1 + m_1) \Leftrightarrow m_1 = \frac{q}{p}$$

Note : Pour l'autre définition d'une variable géométrique $N^{(1)'} := N^{(1)} + 1 \in \{1, 2, \dots\}$ (en incluant la première face), on obtient par le résultat précédent

$$n := EN^{(1)+1} = E(N^{(1)} + 1) = \frac{1}{p},$$

ou encore par conditionnement sur le premier pas :

$$\begin{aligned} n &= \mathbb{E}[N^{(1)+1}] = \mathbb{P}[X_1 = P]\mathbb{E}[N^{(1)+1}|\{X_1 = P\}] + \mathbb{P}[X_1 = F]\mathbb{E}[N^{(1)+1}|\{X_1 = F\}] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = P]1 + \mathbb{P}[X_1 = F](1 + \mathbb{E}[N^{(1)+1}]) = p * 1 + q * (1 + n) = 1 + q * n \end{aligned}$$

3. Remarquons que les trois événements PP, PF, F fournissent une décomposition :

$$G = \{F G\} \cup \{PF G\} \cup \{PP\}$$

de l'espace d'états qui permet soit de constater que notre événement d'arrêt est arrivé, soit de relancer le processus du début. Par conséquent :

$$n = q(n + 1) + pq(n + 2) + 0p^2 \Leftrightarrow n = \frac{q(1 + 2p)}{1 - q - pq} = \frac{1 + p}{p^2} - 2$$

4. Remarquons que les quatre événements F, PF, PPF, PPP fournissent une décomposition de l'espace d'états qui permet soit de constater que notre événement d'arrêt est arrivé, soit de relancer le processus du début. Le conditionnement sur F, PF, PPF, PPP donne : $n = q(n + 1) + pq(n + 2) + p^2q(n + 3) + 0p^2 \Leftrightarrow n = \frac{q(1+2p+3p^2)}{p^3} = \frac{1+p+p^2}{p^3} - 3$ (et pour inclure les dernières trois piles, on ajoute 3).

5. La méthode des fonctions génératrices : Remplaçons chaque terme de l'espace des expériences par $p^{nb.P} q^{nb.F} z^{nb.F}$ ($nb.P = 1$). Soit $p(z)$ le résultat obtenu en ajoutant tous les termes. Observons qu'en rajoutant tous les termes, on obtient précisément $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{p}{1-qz}$. Nous pourrions aussi remarquer la décomposition $\varphi(z) = p + qzp(z)$, qui implique encore $\varphi(z) = \frac{p}{1-qz}$. Finalement, $EN^{(1)} = \varphi'(1) = \frac{q}{p}$. **Rem :** La méthode des **fonctions génératrices** (qui n'est pas vraiment nécessaire dans cet exercice simple) s'avère une des méthodes les plus puissantes pour les espaces d'états infinis.

6. Les probabilités p_k sont moins évidentes à obtenir. *Ind : Utilisons une chaîne de Markov associé, sur l'espace $E = \{0P, 1P, 2P\}$, avec état absorbant $2P$. $p_0 = p^2, p_1 = qp^2, p_2 = q^2p^2, p_3 = qp_2 + pqp_1, \dots, p_n = qp_{n-1} + pqp_{n-2}, \forall n \geq 3$.*

7. *Ind : Utilisons une chaîne de Markov associé, sur l'espace $E = \{0P, 1P, 2P, 3P\}$, avec état absorbant $3P$. Soit Q la matrice des transitions entre les états transitoires $0, 1, 2$. Le vecteur φ des fonctions génératrices des moments satisfait $\varphi(z) = z(Q\varphi(z) + \mathbf{t})$. **Rem :** On peut aussi trouver une formule générale pour $\mathbf{m} = \varphi'(1)$. En différentiant le système, on trouve $\varphi'(z) - zQ\varphi'(z) = Q\varphi(z) + \mathbf{t} \Rightarrow (I - Q)\varphi'(1) = Q\mathbf{1} + \mathbf{t} = \mathbf{1}$.*

Exercice 4.2 *Étant donné une chaîne finie avec deux états absorbants $0, B$ et le reste des états transitoires, obtenez un système et une formule explicite pour le vecteur $\mathbf{b} = (b_i = P_i[X_T = B], i \in \mathcal{T})$.*

Sol : $\mathbf{b} = Q\mathbf{b} + \mathbf{a}_B \Leftrightarrow \mathbf{b} = (I - Q)^{-1}\mathbf{a}_B$ où \mathbf{a}_B est le vecteur des probabilités d'absorption directe en B (c.-à-d. après un pas). **Sommaire :** Nous étendrons en suite l'approche de cette section aux plusieurs problèmes concernant l'absorption de marches aléatoires, pour les chaînes de Markov de transition P . Brièvement, après avoir associé à chaque chaîne un opérateur $G = P - I$, nous obtiendrons les mêmes équations linéaires en fonction de G (la seule différence étant le fait que les solutions au cas des pbs de grande taille demandent l'utilisation des méthodes numériques plus pointues).

4.1 Les chaînes de Markov absorbantes

Définition 4.1 Une chaîne s'appelle absorbante si tous ses états récurrents sont absorbants, c.-à-d. $P_{i,j} = \delta_{i,j}$ pour chaque état i récurrent.

Motivation : Parfois, une chaîne/marche est forcée de rester dans un sous-ensemble de son espace d'états initial par des divers mécanismes de contrainte. Par exemple, une marche sur \mathbb{Z} qui est contrainte à rester non-négative, donc en \mathbb{N} , pourrait être adsorbée en 0 pour toujours, ou "réfléchi", i.e retournée en \mathbb{N} dès qu'elle arrive dans le complément $\partial = \mathbb{Z} - \mathbb{N}$. Le mécanisme de contrainte le plus simple est l'absorption. On appellera l'ensemble des états adsorbants "cimetière" ∂ ; ceux-ci sont caractérisés par des probabilités de transition $P_{i,j} = \delta_{i,j}, \forall i \in \partial, \forall j$.

4.2 Les problèmes de Dirichlet/premier passage

Les problèmes de Dirichlet ont comme objet l'étude du temps de sortie N , de la distribution du point de sortie $X_N \in \partial$, et des diverses autres fonctions comme des prix finaux ou des couts accumulés par la marche jusqu'au moment de son absorption en ∂ . Pour les marches aléatoires, on a vu que tous ces problèmes aboutissaient dans des équations de différences (ou différentielles, si l'espace d'états était \mathbb{R}^d). On verra maintenant que pour les chaînes de Markov, ces problèmes aboutissent dans des équations impliquant la matrice $G = P - I$. La méthode pour établir ces équations est toujours le conditionnement sur le premier pas.

Soit X_k une chaîne de Markov absorbante à espace d'états $S = \mathcal{T} \cup \partial = \{1, 2, \dots, I, C1, C2, \dots\}$, où les états en \mathcal{T} sont transitoires, et les états $\partial = \{C1, C2, \dots\}$ sont absorbants. Soit $\begin{pmatrix} Q & | & \mathbf{q}^{(\mathcal{T}, \partial)} \\ \mathbf{0} & | & I \end{pmatrix}$ la matrice de transition et soit $\boldsymbol{\alpha}$ la distribution initiale.

Définition 4.2 Soit X_t une chaîne absorbante, soit ∂ l'ensemble des états absorbants, et soit \mathcal{T} le sous-ensemble (complémentaire) d'états transitoires. On appellera **temps de premier passage/sortie/absorption** N le premier temps quand le processus X_t n'est plus en \mathcal{T} (et donc est arrivé en ∂)

$$N = \inf\{t : X_t \notin \mathcal{T}\} \in \{1, 2, \dots\}$$

Remarque 4.1 N est précisément le nombre de temps $t \in \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$ passés en \mathcal{T} , en incluant la position initiale.

4.3 La loi multivariée du temps de premier passage, et de la position finale

On s'intéresse dans la distribution et l'espérance des **variables d'absorption**, comme le temps d'absorption N jusqu'au premier passage dans l'ensemble des états absorbants ∂ , la position après absorption X_N et la position avant absorption X_{N-1} , par exemple :

1. La distribution de N .
2. Les espérances des temps d'absorption $\mathbf{n} = (n_i, i \in \mathcal{T})$, où $n_i = E_i N$.
3. Les probabilités d'absorption dans les différents états absorbants (s'il y en a plusieurs).

On verra qu'elles sont toutes calculables en utilisant la loi "multivariée" du temps de premier passage N conditionnée par le point de départ x et joint avec le point final y . Plus précisément, nous allons étudier d'abord les matrices de dimension $|\mathcal{T}| \times |\partial|$ et $|\mathcal{T}| \times |\mathcal{T}|$, respectivement, ayant comme éléments les probabilités jointes d'absorption en k pas et survie, avec départ en x et point final en y :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(k) &= \mathbb{P}\{N = k, X(k) = \cdot\} = (\mathbf{p}_{x,y}(k), x \in \mathcal{T}, y \in \partial), & p_{x,y}(k) &:= \mathbb{P}_x\{N = k, X(k) = y\} \\ \mathbf{P}(k) &= \mathbb{P}\{N > k, X(k) = \cdot\} = (\mathbf{P}_{x,y}(k), x \in \mathcal{T}, y \in \mathcal{T}), & P_{x,y}(k) &:= \mathbb{P}_x\{X(k) = y\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

t:mv **Théorème 4.1** a) Pour une chaîne de Markov absorbante à matrice de transition

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbf{q}^{(\mathcal{T}, \partial)} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right)$$

les probabilités multivariées (4.1) sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k) &= \mathbf{Q}^k, \\ P^*(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}(k) = (\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1} \\ \mathbf{p}(k) &= \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{q}^{(\mathcal{T}, \partial)}, \\ \mathbf{p}(k) \mathbb{1}_{\partial} &= \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{q}^{(\mathcal{T}, \partial)} \mathbb{1}_{\partial} = \mathbf{Q}^{k-1} \mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^{k-1} \mathbb{1}_{\mathcal{T}}, \end{aligned}$$

où $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{(\mathcal{T}, \partial)} \mathbb{1}_{\partial} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}) \mathbb{1}_{\mathcal{T}}$ b) Avec distribution initiale α , et en considérant toutes les points finales possibles, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N > k\} &= \mathbb{P}\{N \geq k+1\} = \alpha \mathbf{Q}^k \mathbb{1}_{\mathcal{T}} \\ \mathbb{P}\{N = k\} &= \alpha (\mathbf{I} - \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^{k-1} \mathbb{1}_{\mathcal{T}} \\ \varphi_N(z) &= E z^{N-1} = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} \mathbb{P}\{N = k\} = \alpha (\mathbf{I} - \mathbf{Q}) (\mathbf{I} - z\mathbf{Q})^{-1} \mathbb{1}_{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

Exercice 4.3 Démontrez le théorème. Ind : Les matrices $\mathbf{p}(k), \mathbf{P}(k)$ satisfont les récurrences :

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{Q} \mathbf{p}(k-1), \mathbf{p}(1) = \mathbf{q}, \quad \text{et } \mathbf{P}(k) = \mathbf{Q} \mathbf{P}(k-1), \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

qui ramènent (en itérant) au résultat :

Démonstration alternative : $I_{N=k} = \sum_{x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathcal{T}, y \in \partial} I_{X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_{k-1}=x_{k-1}, X_k=y \in \partial \in \mathcal{T}}$.
Dès lors,

$$\mathbb{P}_{x_0}\{N = k, X_k = y\} = \sum_{x_1, \dots, x_{j-1} \in \mathcal{T}} Q_{x_0, x_1} Q_{x_1, x_2} \cdots Q_{x_{k-2}, x_{k-1}} q_{x_{k-1}, y}^{(\mathcal{T}, \partial)} = Q^{k-1} q^{(\mathcal{T}, \partial)}(x_0, y)$$

Les résultats en b) sont obtenus en prenant somme en y et somme en x , pondéré par les poids α . ■

Remarque 4.2 Cette démonstration peut-être visualisée en utilisant "l'arbre de toutes les cas possibles".

Définition 4.3 Une variable $n \in \mathbb{N}$ ayant une loi représentable comme

$$\mathbb{P}\{N = k\} = \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{Q}^{k-1}\mathbf{1}, k \geq 1$$

où \mathbf{Q} est une matrice sous-stochastique, et α est un vecteur ligne des probabilités, sera appelée de type **matrice-géométrique**, et aussi de type "phase".

4.4 Les espérances des lois de type phase

t:EN

Théorème 4.2 a) Les espérances $\mathbf{n} = (n_x, x \in \mathcal{T})$ du nombre des pas jusqu'à l'absorbtion à partir des états transitoires satisfont le **système d'absorbtion**

$$\mathbf{n} = \mathbf{Q}\mathbf{n} + \mathbf{1}$$

b) Elles sont données explicitement par :

$$\mathbf{n} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}$$

c) Avec une distribution initiale α , l'espérance $\bar{n} = E_{\beta}N$ du temps d'absorbtion est :

$$\bar{n} = E\mathbf{N} = \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}$$

Remarque 4.3 Comme toujours, le système et la méthode donné au point a) sont plus importants que la formule explicite donnée en b); en effet, l'inversion des matrices n'est pas forcément la meilleure solution pour résoudre un système. Aussi, il existe beaucoup de variations de ce problème, ramenant à une diversité des formules explicites, pendant que le principe pour obtenir les systèmes et toujours le même : **conditionnement sur le premier pas**. Ce problème fournit donc une illustration du fait que conceptuellement et numériquement, les systèmes d'équations sont plus utiles que leurs solutions explicites!

Démonstration par conditionnement sur le premier pas : a) est équivalent au système

$$n_i = \sum_{j \in \mathcal{T}} Q_{i,j}(n_j + 1) + \sum_{j \notin \mathcal{T}} q_{i,j}^{(\mathcal{T}, \partial)} * 1,$$

obtenu par un conditionnement sur le premier pas. b) est simplement la solution du système donné en a).

Exercice 4.4 Montrez que

$$E\mathbf{N} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N \geq k\}$$

Rémarque : Cet exercice nous fournit une deuxième démonstration du Théorème 4.2, à partir du théorème 4.1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N \geq k, X(k-1) = \cdot\} \mathbb{1}_{\mathcal{T}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{Q}^{k-1} \mathbb{1}_{\mathcal{T}} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbb{1}_{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

Dir1 **Corollaire 4.1** Soit $\tilde{\mathbf{G}} := \mathbf{Q} - \mathbf{I}$. Les espérances des temps d'absorption à partir des tous les états transitoires \mathbf{n} satisfont le système

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{n} + \mathbf{1} &= 0 \\ n_i &= 0, \quad \forall i \in \partial \end{aligned} \tag{4.2}$$

Remarque 4.4 Ceci est notre premier exemple de "système de Dirichlet" faisant intervenir l'opérateur $\tilde{\mathbf{G}}$. Formulé comme ci-dessus, il est valable aussi en temps continu (et en fait pour tous les processus de Markov).

Remarque 4.5 La matrice $\tilde{\mathbf{G}}$ a seulement ses valeurs propres avec partie réelle négative, étant par conséquent inversible.

Remarque 4.6 La matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ intervenant dans la formule

$$\mathbf{n} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1} = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{Q})^i \right] \mathbf{1}$$

a une interprétation probabiliste importante. Remarquons d'abord la **décomposition en indicateurs**

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} I_k$$

où I_k est l'indicateur d'être dans la partie transitoire au temps k . Donc, $n_i = \sum_{k=0}^{\infty} E_i I_k$. Remarquons aussi la décomposition en indicateurs

$$I_k = \sum_{j \in \mathcal{T}} I_{k,j}, \quad I_{k,j} = \mathbb{1}_{\{X(k)=j\}}$$

où $I_{k,j}$ est l'indicateur d'être en position $j \in \mathcal{T}$ au temps k . Ces décompositions nous fournissent une troisième démonstration du Théorème 4.2

$$n_i = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathcal{T}} E_i I_{k,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathcal{T}} (\mathbf{Q})_{i,j}^k$$

Changeant l'ordre de sommation nous ramène à

$$n_i = \sum_{j \in \mathcal{T}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{Q})_{i,j}^k \right) = \sum_{j \in \mathcal{T}} (\mathbf{I} - \mathbf{Q})_{i,j} := \sum_{j \in \mathcal{T}} n_{i,j}$$

où

$$n_{i,j} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})_{i,j}$$

est le temps total espéré passé en j avant le passage dehors les états transitoires. La ligne i de la "matrice fondamentale" $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ nous fournit "le bilan de la vie", avec état initial i !

4.5 Exemples des distributions de type phase

e:N **Exemple 4.1** Soit une chaîne sur $\{1, 2\}$ définie par la matrice de transition $\left(\begin{array}{c|c} p & 1-p \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ avec $X_0 = 1$ (c.-à-d., la loi initiale est $\mathbf{c}_0 = (1, 0)$). Soit N le nombre des transitions jusqu'à l'absorption, en partant du temps 0 a) Quelle est la valeur de N si $X_0 = X_1 \dots X_{k-1} = 1$ et $X_k = 2$? Quelle est l'espace d'états de N ? b) Trouvez l'espérance $n = \mathbb{E}N$ du nombre des pas N jusqu'à l'absorption, en partant du premier état (c.-à-d. $X_0 = 1, \boldsymbol{\alpha} = (1, 0)$).

ser **Exercice 4.5** Soit la matrice de transition $\left(\begin{array}{cc|c} q_1 & p_1 & 0 \\ 0 & q_2 & p_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ a) Trouvez l'espérance de N , et le bilan de la vie. b) Soit $N = N_1 + N_2$, où N_i est le nombre de fois qu'on reste en i . Montrez que la distribution de N_1 conditionné par N est uniforme et calculez la distribution de N , si $q_1 = q_2 = q$. c) Généralisez au cas des matrices de ce type (série) de taille $K + 1$.

Remarque 4.7 Avec $q_1 = q_2 = q$, on peut aussi résoudre l'exercice en remarquant que N_i sont des variables géométriques, et donc N est hypergéométrique (une somme des géométriques).

par **Exercice 4.6** Soit la matrice de transition $\left(\begin{array}{cc|c} q_1 & 0 & p_1 \\ 0 & q_2 & p_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ et la distribution initiale $(\beta_1, \beta_2, 0)$. Trouvez l'espérance et la distribution de N , et le bilan de la vie.

Exercice 4.7 a) Pour une chaîne à deux états $0, 1$ avec $P_{0,1} = \lambda, P_{1,0} = \mu$, calculez l'espérance t_0 du temps de retour T_0 (retour en 0, conditionné par un départ en 0). b) Vérifiez l'identité $t_0 = \pi_0^{-1} / P_0[X_1 \neq 0]$, valable pour toutes les chaînes ergodiques. c) Quelle est la distribution du T_0 ?

Conclusion : Les distributions de type phase demandent le calcul des puissances/exponentielles de matrices. Ces expressions sont très vite obtenues par logiciels comme Matlab, etc ; comme pour la plupart des matrices, les valeurs propres ne sont pas accessibles analytiquement, leur calcul demande en effet une évaluation numérique.

4.6 Les probabilités d'absorption

Définition 4.4 Soit X_t un processus, soit E un sous-ensemble arbitraire de l'espace d'états, et soit ∂ son complémentaire. On appellera **processus absorbé en l'ensemble d'arrêt** ∂ le processus \tilde{X}_t obtenu à partir de X_t en modifiant tous les états en ∂ en sorte qu'ils soient absorbants.

Dans le prochain exemple, nous utiliserons plusieurs ensembles d'arrêt.

Exemple 4.2 Pour une **marche aléatoire** $X_t, t = 0, 1, 2, \dots$ sur le **graphe papillon** ci-dessous, calculer :

1. L'espérance n_U en sortant de U du nombre de pas N jusqu'au noeud O . Indication : Utiliser la symétrie.
2. Les probabilités stationnaires de chaque noeud.
3. L'espérance en sortant de O du nombre de pas \tilde{N}_O jusqu'au premier retour à O .

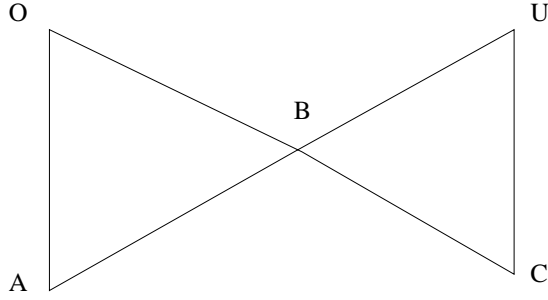


FIGURE 4.1 – Marche aléatoire simple sur le graphe papillon

4. La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_N = O\} = \mathbb{P}_A\{N_O < N_U\}$, où $N = \min[N_U, N_O]$.

Solution : 4) En résolvant le système d'absorbtion pour p_A, p_B, p_C , on trouve $p_A = 3/4, p_B = 1/2, p_C = 1/4$ ■. Supposons qu'il y a plusieurs états absorbants à probabilités d'absorbtion $\mathbf{p}^{(j)}, j \in S - \partial$, qui donnent des "prix finals" $\mathbf{f} = \{f_j, j \in \partial\}$, posons $\hat{p}_i = E_i f(N)$, et $\hat{\mathbf{p}} = \{\hat{p}_i, i \in S - \partial\}$ le vecteur de prix finals espérés. Le calcul de $\hat{\mathbf{p}}$ est le fameux **problème de Dirichlet**. Par exemple, pour $\mathbf{f}_j = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\} = \{\delta_j(i), i = 1, 2, \dots\}$ (avec le 1 sur la position j) on obtient les probabilités d'absorbtion $\hat{p}_i(j) = \mathbb{P}_i\{X_N = j\} = E_i I_{\{X_N=j\}}$. La théorie des chaînes pour les quelles tous les états récurrents sont absorbants peut être utilisée pour étudier n'importe quelle chaîne, en modifiant certaines transitions.

Théorème 4.3 Le vecteur $\hat{\mathbf{p}}$ d'espérances d'un "prix final" \mathbf{f} satisfait le **système d'absorbtion**

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{p}} + \mathbf{q}^{(\mathcal{T}, \partial)} \mathbf{f}$$

En particulier

Théorème 4.4 Les probabilités d'absorbtion $\hat{\mathbf{p}}^{(j)}$ dans un état absorbant fixe j satisfont le **système d'absorbtion**

$$\hat{\mathbf{p}}^{(j)} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{p}}^{(j)} + \mathbf{p}_{(\mathcal{T}, \partial)}^{(j)}$$

où $\mathbf{p}_{(\mathcal{T}, \partial)}^{(j)}$ denote le vecteur des probabilités de transition dans l'état absorbant j . La matrice $\mathbf{P}^{(abs)}$ des probabilités d'absorbtion satisfait :

$$\mathbf{P}^{(abs)} = \mathbf{Q}\mathbf{P}^{(abs)} + \mathbf{q}^{(\mathcal{T}, \partial)}$$

et donc

$$\mathbf{P}^{(abs)} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{q}^{(\mathcal{T}, \partial)}$$

Dir2

Corollaire 4.2 Soit $\mathbf{G} := \mathbf{P} - \mathbf{I}$. Avec un prix final arbitraire \mathbf{f} , les prix finaux espérés \mathbf{p} à partir de tous les états satisfont le **système d'absorbtion**

$$\mathbf{G}\mathbf{p} = 0 \tag{4.3}$$

$$p_i = f_i, \quad \forall i \in \partial \tag{4.4}$$

Corollaire 4.3 Avec une distribution initiale α , avec un prix final arbitraire \mathbf{f} , on a l'espace d'états :

$$\hat{\mathbf{p}} = \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{q}^{(\mathcal{T}, \partial)} \mathbf{f}$$

4.7 L'opérateur associé à une chaîne de Markov

L'opérateur associé (ou générateur) à une chaîne de Markov est la "matrice génératrice" $G = P - I$.

Définition 4.5 Une matrice G satisfaisant

1. $g_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$, $g_{ii} \leq 0$ et
2. $g_{i,i} + \sum_{j \neq i} g_{i,j} = 0$

sera appelée **matrice génératrice**. Une matrice G satisfaisant 1. et $g_{i,i} + \sum_{j \neq i} g_{i,j} \leq 0$ sera appelée **sous-générateur**.

Exercice 4.8 Pour une matrice (sous)stochastique arbitraire, la matrice $G = P - I$ est une matrice (sous) génératrice.

Remarque 4.8 Il est facile de vérifier que la matrice $G = P - I$ a les mêmes vecteurs propres comme P , et que ses valeurs propres sont translatées par -1 . Les équations de Dirichlet – voir ci dessus – concernant les chaînes de Markov en temps discret peuvent être formulées également en termes de P ou de G , mais l'avantage de la dernière formulation est qu'elle généralise pour le temps continu.

4.8 Classification des quelques problèmes linéaires concernant les temps de premier passage pour les chaînes et processus de Markov

Note:1) Les problèmes que nous venons de discuter concernent une chaîne de Markov avec une ou deux états absorbants. Soit Q la matrice sous-stochastique des probabilités de transition parmi les états transitoires. En mettant $G = Q - I$, et $F(S) = \mathbb{R}^S$ l'espace des fonctions définies sur l'espace des états transitoires S , les équations trouvées ici pour les fonctions $p, f, t, c, w \in F(S)$ sont :

$$\begin{aligned} (Gp)_x &= 0, b_B = 1, b_0 = 0 \\ (Gf)_x &= 0, f_B = B, f_0 = 0 \\ (Gt)_x + 1 &= 0, t_B = 0, t_0 = 0 \\ (Gc)_x + x &= 0, c_B = 0, c_0 = 0 \\ (Gw)_x + (1 - a^{-1})w_x &= 0, w_B = 1, w_0 = 1 \end{aligned}$$

font tous intervenir le même opérateur $G = P - I : F(S) \rightarrow F(S)$. La remarque importante ressortant de ces exemples est qu'une grande partie des problèmes rencontrés peuvent être classifiés comme appartenant à un nb. assez petit de types de problèmes, qui sont associés aux formes spécifiques des conditions frontière et des termes inhomogènes. Cela permet, une fois que le générateur d'un processus et le type de problème ont été reconnus, une identification mécanique des équations associées – voir Corollaires 4.1, 4.2, ???. Nous avons analysé cette correspondance dans le cadre le plus simple des chaînes de Markov finies, et pour les types de problèmes les plus faciles à dériver et résoudre : ceux de Dirichlet, correspondant aux **problèmes d'absorption**. En suite, nous examinerons cette correspondance pour des modèles plus complexes en temps continu, et avec des espace d'états dénombrable et même continu.

En examinant les questions 2)-8) de cet exercice, qu'ils utilisent toutes le même opérateur

$$(Gf)_n := (P - I)(f)_n = p f_{n+1} + q f_{n-1} - f_n \quad (4.5) \quad \boxed{\text{op}}$$

la seule différence étant dans les conditions frontière et dans la partie nonhomogène. En plus, ils se regrouperont en deux types de questions :

1. "Gain final espéré", satisfaisant :

$$f_n = E_n[g(X_T)] = p f_{n+1} + q f_{n-1} \Leftrightarrow (Gf)_n = 0, \quad F(0) = g(0), F(B) = g(B)$$

2. "Coût total accumulé espéré"

$$f_n = E_n\left[\sum_0^{T-1} h(X_i)\right] = h(n) + p f_{n+1} + q f_{n-1} \Leftrightarrow (Gf)_n = 0, \quad f(0) = 0, f(B) = 0$$

Ces exercices illustre trois idées :

1. L'avantage de la méthode du conditionnement sur le premier pas.
2. Le calcul des esperances pour les chaînes de Markov comporte des systèmes linéaires avec **une inconnue pour chaque état initial possible**.
3. Les systèmes associés avec un processus fixe implique toujours la même partie homogène appelée "opérateur" (dans le cas des chaînes de Markov en temps discret et à espace d'états fini ou dénombrable, l'opérateur est simplement $P - I$, où P est la matrice de transition P).

Ces idées seront approfondies dans les chapitres suivants, où nous regarderons quelques autres problèmes résolubles par le conditionnement sur le(s) premier(s) pas.

Nous avons vue ici une des idées les plus importantes de la modélisation Markovienne : **les esperances, vues comme fonctions de l'état initial, satisfont certaines équations qui font toujours intervenir un opérateur associé fixe, appelé générateur du processus, même que les conditions frontière, termes non homogènes, et d'autre "details" (comme la presence/absence d'une multiple de l'opérateur identité) peuvent varier**. Il s'avère que les mêmes équations décrivent la solution des problèmes analogues pour toutes les chaîne de Markov à espace d'états comptable, et avec des états absorbants – voir la prochaîne section. Par exemple, pour les chaînes de Markov, l'opérateur associé est $G = P - I$, où P est la matrice de transition, et pour le cas particulier d'une marche aléatoire $X_t = \sum_{i=1}^t Z_i$ avec $p_k = P[Z_i = k], k \in [-c, d]$ on a encore $G = P - I$, où $P = \sum_k p_k F^k$ et F est l'opérateur de translation $(Ff)_k = f_{k+1}, k \in \mathbb{Z}$. Alors, nous obtendrons des équations similaires pour les problèmes respectives, juste en remplaçant l'ancien opérateur par le nouveau. On recontre la même situation pour toute la classe des processus "de Markov", X_t , différents qu'elles soient, vivant sur des espaces S considerablement plus compliqués, la seule différence étant que l'opérateur $G_X : F(S) \rightarrow F(S)$ associé a ces processus sera plus compliqué ! Par exemple, les problèmes de cette section ont aussi des versions à espace d'états continu, obtenu en considérant des marches avec incréments infinitésimaux ϵ , et en prenant la limite $\mathbb{E} \rightarrow 0$. La marche aléatoire devient ainsi un processus avec chemins continus, appelé mouvement Brownien. Les équations resterons les mêmes, seul l'opérateur G changera (dans un opérateur différentiel).

En conclusions, il existe une correspondance un à un entre les processus de Markov et une certaine classe des opérateurs deterministes associés ; nous l'appellerons "Le Dictionnaire".

4.9 Conclusions

Un des outils les plus importants de la théorie des chaînes de Markov est l'étude des variables d'absorption, qui réfléchissent le comportement d'une chaîne X jusqu'au temps de premier passage T dans un ensemble des états l'absorbants ∂ . Les problèmes de Dirichlet ont comme objet l'étude des temps de sortie τ , de la distribution du point de sortie $X_\tau \in \partial$, et des diverses autres fonctionnelles comme des prix finaux ou des coûts accumulés par un processus jusqu'au moment de son absorption en ∂ . Ils ramènent toujours aux systèmes spécifiant les relations entre les espérances des fonctionnelles conditionnées par le point de départ.

Exercice 4.9 Obtenez les équations de Dirichlet pour les probabilités \mathbf{p} d'absorption dans un sous-ensemble $A \subset \partial$, et les temps espérés d'absorption \mathbf{t} , (à partir des divers états initiaux, voir Ch. 2.6, Part 1), en conditionnant sur le moment de la première transition, pour un processus de Markov avec un état absorbant, à matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{b} = (-\mathbf{B})\mathbf{1}$. Obtenez par conditionnement sur la position après la première transition les transformés de Laplace

$$l_i(s) = f_i^*(s) = E_i[e^{-s\tau} 1_{\{X_\tau \in A\}}]$$

des temps d'absorption.

Sol : Les trois équations sont respectivement

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{p} &= \mathbf{0} \\ p_i &= 1_A(i), \quad \forall i \in \partial \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{n} + \mathbf{1} &= \mathbf{0} \\ n_i &= 0, \quad \forall i \in \partial \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{l}(s) - s\mathbf{l} &= \mathbf{0} \\ l_j(s) &= 1_A(j), \quad \forall j \in \partial \end{aligned}$$

où $\widetilde{\mathbf{G}} = (\mathbf{B}, \mathbf{b})$ denote la matrice génératrice avec les lignes des états récurrentes enlevées. Cinq types des problèmes fondamentaux rencontrés sont :

1. La distribution de la position d'absorption X_T

$$p_x(y) := \mathbb{P}_x\{X_T = y\}, y \in \partial(A), x \in \text{int}(A) := A - \partial(A)$$

parmi les différents états absorbants $y \in \partial$. Quand x varie, ces probabilités satisfont le système

$$p_x(y) = \delta_y(x), x \in \partial, \quad (Gp)_x = 0 \Leftrightarrow p_x = (Pp)_x, x \in \text{int}(A)$$

Définition 4.6 Une fonction $f : A- > \mathbb{R}$ s'appelle harmonique sur $\text{int}(A) := A - \partial(A)$ si elle satisfait

$$(Gf)_x = 0 \Leftrightarrow f_x = (Pf)_x, x \in \text{int}(A)$$

est sont appelées (à cause de la dernière relation).

Corollaire 4.4 Pour chaque $y \in \partial(A)$ fixe, les probabilités d'absorption $p_x(y)$ sont des fonctions harmoniques en x .

2. Les espérances des temps d'absorption $t_x = E_x T = E_x \int_0^T 1 ds, x \in f(A)$ ou des coûts accumulés espérés :

$$c_x = E_x \int_0^T h(X_s) ds$$

(le cas particulier $h(x) = 1$ rends les espérances des temps d'absorption t_x). Quand x varie, ces coûts satisfont le système

$$c_x = 0, x \in \partial, \quad (Gg)_x + h(x) = 0 \Leftrightarrow c_x = (Pc)_x + h(x), x \in \text{int}(A)$$

3. La distribution de T

$$P_x(k) = \mathbb{P}_x\{T \geq k\}$$

Dans le cas $k \in \mathbb{N}$, elle satisfait une récurrence simple.

4. Probabilités et coûts d'absorption "actualisés" :

$$E_x e^{-rT} g(X_T), \quad E_x \int_0^T e^{-rs} h(X_s) ds$$

importants dans les mathématiques financières ; Ceux-ci rendent en particulier la fonction génératrice de la distribution jointe de la position et du temps d'absorption.

5. "Autres problèmes", comme le calcul de

$$p_x(k, B) := \mathbb{P}_x\{\text{exactement } k \text{ visites en } B \text{ avant l'absorption en } \partial(A)\}$$

Dans ce dernier cas, nous cherchons des récurrences liant $p_x(k, B), x \in A$ à $p_x(k-1, B), x \in A$.

Conclusion : Nous avons observé dans les chapitres précédents trois idées très importantes dans la modélisation Markovienne :

1. Pour les chaînes et processus de Markov, l'étude des espérances des diverses fonctionnelles, vues comme fonctions de l'état initial, ramène à des systèmes linéaires avec **une inconnue pour chaque état initial possible**.
2. Ces systèmes peuvent être obtenues par la méthode du conditionnement sur le premier pas.
3. Les divers systèmes associés avec un processus fixe implique toujours la même partie homogène appelée "opérateur" ou **générateur du processus** (dans le cas des chaînes de Markov en temps discret et à espace d'états fini ou dénombrable, l'opérateur est simplement $P - I$, où P est la matrice de transition P). Par contre, les conditions frontière, termes non homogènes, et d'autres "détails" (comme la présence/absence d'un multiple de l'opérateur identité) varient d'un problème à l'autre.

Il s'avère que ces principes s'appliquent pour toutes les processus de Markov, X_t , différents qu'elles soient, vivant sur des espaces S considérablement plus compliqués, la seule différence étant que l'opérateur $G_X : F(S) \rightarrow F(S)$ associé à ces processus sera plus compliqué ! On arrive toujours aux mêmes équations, obtenues juste en remplaçant un opérateur par un autre. Par exemple, les problèmes concernant les marches simples ont aussi

des versions pour le mouvement Brownien, qui est un processus à espace d'états continu, avec chemins continus (obtenu en considérant des marches simples avec incréments infinitésimaux $\pm\epsilon$, et en prenant la limite $\epsilon \rightarrow 0$). Les équations resteront les mêmes, mais l'opérateur des différences est remplacé par l'opérateur différentiel ∇ (le Laplacien).

En conclusion, il existe une correspondance/dictionnaire un à un entre les processus de Markov et une certaine classe d'opérateurs déterministes associés.

Chapitre 5

Marches aléatoires sur des réseaux électriques

5.1 Distributions stationnaires : équations d'équilibre local

L'étude des chaînes de Markov sur un espace d'états fini nous ramène toujours à un système linéaire impliquant la matrice P . Il se trouve quand même que des formules/approches algorithmiques plus simples sont disponibles pour certains cas particuliers, comme celui des marches aléatoires sur les graphes (non dirigés), ou sur des réseaux électriques.

Définition 5.1 a) La matrice d'adjacence d'un graphe est la matrice définie par

$$D(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \longleftrightarrow y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) La marche aléatoire **simple** sur un graphe est la marche avec probabilités de transition $P(x, y) = \frac{D(x, y)}{d_x}$ où $d_x = \sum_y D(x, y)$ est le degré du sommet x .

L'inspiration de la généralisation qui suit nous vient d'électricité, du problème de calculer les voltages sur un réseau des résisteurs. Considérons un réseau des résisteurs $R(x, y)$, modélisé par un quadruple $G = (V, E, C(\cdot, \cdot), \partial)$ représentant un graph avec sommets V , arêtes E , des poids $C(x, y) = \frac{1}{R(x, y)}$, (les «conductances électriques») associés aux arêtes, et un sous-ensemble des sommets distingués ∂ , où des voltages ou des courants électriques sont imposés. Les lois bienconnues des courants électriques de Kirchhoff sont l'expression macroscopique de la marche aléatoire sur le réseau d'un électron, avec des poids $C(x, y)$ associés à chaque arête.

Définition 5.2 a) Une marche est appelée **réversible** s'il existe un vecteur des poids $c(x)$ tq la matrice

$$C(x, y) := c(x)P(x, y)$$

est symétrique, c.-à-d. tq

$$c(x)P(x, y) = c(y)P(y, x), \forall x \neq y.$$

Ces équations sont appelées **équations d'équilibre local**. b) Inversement, à chaque matrice $C(x, y)$ symétrique avec des éléments nonnegatifs, on peut associer une marche aléatoire réversible avec probabilités de transition $P(x, y) = \frac{C(x, y)}{c_x}$, où (forcement) $c_x = \sum_y C(x, y)$.

Rq : Les marches réversibles seront appelées aussi «**marches de réseau**» ou «**marches sur un graphe pondéré**», car les éléments de la matrice symétrique $C(x, y)$ peuvent être toujours vues comme des conductances d'un réseau électrique, ou comme des poids associés aux arêtes d'un graphe.

Lemme 5.1 *La distribution stationnaire d'une marche aléatoire réversible (en particulier simple) est proportionnelle au poids (degrés) c_x des sommets, c.-à-d.*

$$\pi(x) = \frac{c_x}{\sum_y c_y}.$$

Dem : On vérifie facilement que le vecteur des probabilités $\pi(x) = \frac{c_x}{\sum_y c_y}$ satisfait les équations d'équilibre local

$$\pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x), \forall x \neq y \quad (5.1)$$

qui à leur tour impliquent les équations d'équilibre global par Lemme 5.2. Comme $\pi(x)$ est un vecteur des probabilités, il suit qu'il est la distribution invariante.

eqg1

Lemme 5.2 *Une solution des équations d'équilibre local 5.1 satisfait toujours les équations d'équilibre global $\pi P = \pi$.*

Dem : Rémarquez que les équations d'équilibre local ne tiennent pas compte des boucles! Ça suggère de commencer en donnant aussi des **équations d'équilibre global sans boucles**. En effet,

$$\begin{aligned} \pi_x &= \sum_y \pi(y)P(y, x) \iff \pi_x(1 - P(x, x)) = \sum_{y \neq x} \pi(y)P(y, x) \\ &\iff \pi_x \left(\sum_{y \neq x} P(x, y) \right) = \sum_{y \neq x} \pi(y)P(y, x) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Il reste juste à observer qu' en ajoutant les équations d'équilibre local on obtient la dernière forme «sans boucles» des équations d'équilibre global.

Remarque 5.1 *Les équations $\pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x)$ sont plus simples à résoudre que les équations d'équilibre global, mais comme typiquement il y a plus d'arêtes (pairs) que des nœuds, elles admettent de solutions seulement dans de cas particuliers.*

Exemple 5.1 *Pour une marche aléatoire X_t , $t = 0, 1, 2, \dots$ sur un graphe formé de deux tétraèdres superposés, calculer :*

1. La distribution stationnaire.
2. L'espérance en partant de U du nombre de pas T_O jusqu'au coin opposé O . Indication : Utiliser la symétrie.
3. L'espérance en sortant de O du nombre de pas \tilde{T}_O jusqu'au premier retour à O .
4. La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_T = U\}$, ou $T = \min[T_U, T_O]$.
5. La probabilité p_k en partant de O que la marche visite U exactement k fois ($k = 0, 1, 2, \dots$) avant le premier retour à O . Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.
6. Les probabilités stationnaires du chaque nœud. **Indication :** Devinez la réponse et montrez qu'elle satisfait le système des équations d'équilibre.

Exercice 5.1 Calculer la distribution invariante de la marche aléatoire simple, symétrique sur les entiers $\{0, 1, \dots, B\}$, «réfléchie» en $0, B$.

Exercice 5.2 Est-ce que la marche simple asymétrique sur $\{0, 1, \dots, n\}$ «cyclique» (c.-à-d. avec $n + 1 := n, -1 := 0$), avec $P_i[X(1) = i + 1] = p, P_i[X(1) = i - 1] = q$, est réversible ? Calculer sa distribution invariante, ainsi que la matrice des conductances $C(x, y)$.

Remarque 5.2 La réversibilité permet d'associer avec la marche un graphe non dirigé avec des poids $C(x, y)$, qui s'avère utile pour le calcul des fonctions harmoniques.

5.2 Probabilités du bonheur/fonctions harmoniques

Nous considérons ici plus en détail les probabilités du bonheur, et dévoilons leur nom scientifique. Une fonction sur \mathbb{Z}^d/R^d est appelée harmonique si la valeur en chaque point x est égale à la moyenne arithmétique des valeurs des «voisins». En \mathbb{R}^d , par voisins on entend une sphère arbitraire avec centre x . Ces fonctions apparaissent beaucoup en physique. En probabilités, les moyennes arithmétiques deviennent des moyennes pondérées.

Définition 5.3 Une fonction/vecteur $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ s'appelle harmonique pour une chaîne de Markov à matrice de transition P s'il s'agit d'un vecteur propre à droite de P , i.e

$$f(x) = \sum P(x, y)f(y), \quad \forall x \in E$$

Autrement dit, chaque point x vérifie les valeurs $f(y)$ de ses «voisins» (définis par $P(x, y) > 0$, et choisi pour valeur une moyenne pondérée de valeurs voisines. **Rq** : Le fait que chaque valeur est une moyenne pondérée des valeurs voisines suggère un **algorithme de calcul intéressant**. Il est **facile de montrer** que :

Lemme 5.3 a) Pour une chaîne avec une seule classe de communication (récurrente), les seules fonctions harmoniques sont les constantes $f(x) = a$. b) Pour une chaîne avec K classes de communication récurrentes C_1, \dots, C_K , et sans états transients (donc forcément réductible si $K > 1$), les fonctions harmoniques sont les fonctions escalier $\sum_{k=1}^K a_k 1_{C_k}(x)$.

Ind : a) Une fonction non constante prend des valeurs dans un intervalle $[m, M]$, où $M > m$. Mais, l'équation d'équilibre pour un point x_M tq $f(x_M) = M$ implique $\dots m = M$! La situation devient beaucoup plus intéressante dans la présence des états transients («subordonnés») et de plusieurs classes de communication («leaders»).

Exercice 5.3 Étant donné une chaîne finie avec deux états absorbants $0, B$ et le reste des états transients, obtenez un système et une formule explicite pour le vecteur des **probabilités du bonheur** $\mathbf{b} = (b_i = P_i[X_T = B], i \in \mathcal{T})$.

Sol : Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{q}_0 & \mathbf{Q} & \mathbf{q}_B \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_B$ sont les vecteurs des probabilités d'adsorption directe en 0 et B (c.-à-d. après un pas). Soit n le nb des états transients (la taille de \mathbf{Q}). On trouve que $\mathbf{b} = (b_i)_{i \in \mathcal{T}}$ satisfait

$$\mathbf{b} = \tilde{P} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}$$

où \tilde{P} est la matrice P avec les lignes des états absorbants effacés. En développant, on trouve :

$$\mathbf{b} = Q\mathbf{b} + \mathbf{q}_B \iff \mathbf{b} = (I - Q)^{-1}\mathbf{q}_B. \quad (5.3)$$

Remarques :

1. Le vecteur étendu $\tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix}$ est une fonction harmonique/vecteur propre à droite de P . Comme le système étendu $P\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}$ contient deux équations triviales, notre intérêt est surtout en le vecteur correspondant aux états transients \mathbf{b} , donné explicitement en (5.3).
2. Rémarquez l'apparition en (5.3) de la **matrice fondamentale**

$$\overleftarrow{G} := (I - Q)^{-1}.$$

3. Une généralisation des probabilités du bonheur sont les **"prix finaux espérés"** :

$$f_g(x) := \text{Eg}(X_T), \quad f_g : V- > \mathbb{R}$$

où $g_y, y \in \partial$ est un «prix» ou condition frontière donné. On vérifie par CPP (conditionnement sur le premier pas) qu'elles satisfont :

$$f(x) = g(x), x \in \partial, \quad (Gf)_x = 0 \iff f_x = (Pf)_x, \quad x \in \mathcal{T} := V - \partial$$

et sont donc aussi des **fonctions harmoniques**. Ces fonctions harmoniques «à conditions frontière données» sont en correspondance biunivoques avec les conditions de frontière $g : \partial- > \mathbb{R}$ possibles. Cela rend les fonctions harmoniques sur \mathbb{Z}^d ou \mathbb{R}^d beaucoup plus simple quand $d = 1$ et la frontière contient que deux points! Pour la marche symétrique par exemple, il s'agit des fonctions linéaires! Par exemple, avec $p = q = 1/2$, $g(0) = 3$ et $g(10) = 53$, le pris final espéré est $f(x) = 5x + 3$.

5.3 Les espérances des temps d'atteinte, et les problèmes de Dirichlet nonhomogènes

Exercice 5.4 Montrez que si N est une variable aléatoire sur $\{0, 1, \dots\}$, alors

$$EN = \sum_{k=1}^{\infty} P[N \geq k] \quad (5.4)$$

Vérifiez cette formule pour la variable géométrique.

Nous avons déjà vu que le «pb du bonheur» (ou de Dirichlet) aboutit à un système linéaire. C'est le cas de tous les pb associés aux processus de Markov, par exemple le pb du temps d'atteinte/adsorption espéré : *étant donnée une chaîne finie avec des états absorbants, calculer le vecteur $\mathbf{t} = (t_i = E_i[T], i \in \mathcal{T})$, où T est le temps (nb. des pas) espéré jusqu'à l'adsorption.*

t:Dir1

Théorème 5.1 a) Le vecteur \mathbf{t} des espérances des temps d'adsorption à partir des états transients satisfait le **système d'adsorption**

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{Q}\mathbf{t} + \mathbf{1} \iff \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{t} + \mathbf{1} = \mathbf{0} \\ t_i &= 0, \quad \forall i \in \partial \end{aligned} \quad (5.5)$$

où $\tilde{\mathbf{G}} := \mathbf{Q} - \mathbf{I}$ est l'opérateur restreint aux états transients. b) Elles sont données explicitement par :

$$\mathbf{t} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1} = \sum_k^{\infty} \mathbf{Q}^k \mathbf{1}.$$

c) Avec une distribution initiale β , l'espérance $\bar{t} = \mathbf{E}\beta\mathbf{N}$ du temps d'adsorption est :

$$\bar{t} = \mathbf{E}\mathbf{T} = \beta(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}$$

Remarque 5.3 Remarquez de nouveau l'apparition de la **matrice fondamentale**

$$\overleftarrow{\mathbf{G}} := (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}.$$

Remarque 5.4 (5.5) est notre premier exemple de «**système de Dirichlet nonhomogène**» faisant intervenir l'opérateur $\tilde{\mathbf{G}}$. Formulé comme ci-dessus, par rapport à $\tilde{\mathbf{G}}$, il est valable aussi en temps continu (et en fait pour tous les processus de Markov). En remplaçant $\mathbf{1}$ par des fonctions arbitraires, on arrive aux pb. de Dirichlet nonhomogènes.

Démonstration : a) est équivalent au système

$$t_i = \sum_{j \in \mathcal{E}} P_{i,j}(t_j + 1) = \sum_{j \in \mathcal{T}} Q_{i,j}(t_j + 1) + \sum_{j \notin \mathcal{T}} P_{i,j}^{(\mathcal{T}, \partial)} * 1,$$

obtenu par un conditionnement sur le premier pas. b) La solution du système donné en a) est : $\mathbf{t} = \mathbf{1} + \mathbf{Q}\mathbf{t} \iff \mathbf{t} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}$.

Remarque 5.5 La matrice $\tilde{\mathbf{G}}$ a seulement des valeurs propres avec partie réelle négative, étant par conséquent inversible.

Remarque 5.6 La formule explicite

$$\mathbf{t} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1} = \left[\sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{Q})^i \right] \mathbf{1}$$

a une interprétation probabiliste importante, analogue à (5.4). Remarquons d'abord la **décomposition en indicateurs**

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} I_k \Rightarrow t_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_i I_k$$

où I_k est l'indicateur d'être dans la partie transient au temps k . Remarquons aussi la décomposition en indicateurs $I_k = \sum_{j \in \mathcal{T}} I_{k,j}$, où $I_{k,j}$ est l'indicateur d'être en position $j \in \mathcal{T}$ au temps k . Ces décompositions nous ramènent finalement à

$$t_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_i I_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathcal{T}} \mathbf{E}_i I_{k,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathcal{T}} (\mathbf{Q})_{i,j}^k = \sum_{j \in \mathcal{T}} (\mathbf{I} - \mathbf{Q})_{i,j}^{-1} = \overleftarrow{\mathbf{G}}_{i,j}$$

Les éléments $\overleftarrow{\mathbf{G}}_{i,j}$ de la matrice fondamentale, appelée aussi fonction de Green (ou potentiel), fournissent le «**bilan de la vie**», c.-à-d. les espérances de l'ensemble des temps passés dans tous les endroits possibles j , pendant la «vie transient».

Remarque 5.7 Comme toujours, le système et la méthode donnée au point a) sont plus importants que la formule explicite donnée en b); en effet, l'inversion des matrices n'est pas la meilleure solution pour résoudre un système (la réduction à la forme échelon par exemple est préférable). Aussi, il existe beaucoup de variations de ce problème, ramenant à une grande diversité des formules explicites, pendant que le principe pour obtenir les systèmes et toujours le même : **conditionnement sur le premier pas**. Ce problème fournit donc une illustration du fait que conceptuellement et numériquement, les systèmes d'équations sont plus utiles que leurs solutions explicites !

5.4 Temps espérés de retour

Soit

$$T^{(x)} := \inf\{t > S^{(x)}, X_t = x\}$$

où $S^{(x)} := \inf\{t > 0, X_t \neq x\}$ le temps de la première visite en x , «après avoir été ailleurs». Soit

$$P = \begin{pmatrix} Q & \mathbf{q}_x \\ \mathbf{s}_x & p_x \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{q}_x, \mathbf{s}_x, p_x$ sont respectivement les vecteurs des probabilités de passage direct en x , de sortir de x , et d'une boucle en x .

Exercice 5.5 Montrez que le vecteur de probabilités invariantes est proportionnel au vecteur $(\mathbf{s}_x(I - q)^{-1}, 1)$ et que

$$\tilde{t}_x := E_x T^{(x)} = 1 + \mathbf{s}_x(I - q)^{-1} \mathbf{1} = \frac{1}{\pi(x)}$$

Exercice 5.6 Pour une marche aléatoire $X_t, t = 0, 1, 2, \dots$ sur le graphe cubique ci-dessous, calculer :

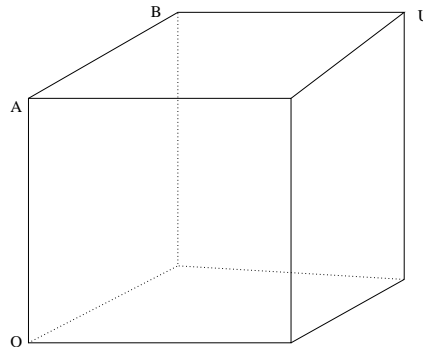


FIGURE 5.1 – Marche aléatoire simple

1. La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{T(U) < T(O)\} = \mathbb{P}_A\{X_T = U\}$, ou $T = \min[T(U), T(O)]$. Indication : Utiliser la symétrie.
2. Comparer le résultat avec le potentiel électrique obtenu en 1 si les entiers sont connectés par des résistances unitaires, et une tension égale à 1 est appliquée entre 0 et B.
3. L'espérance du nombre de pas $T = \min[T(O), T(U)]$.
4. Les probabilités stationnaires du chaque nœud.

5. L'espérance en sortant de U du nombre de pas T_O jusqu'au nœud O .
6. L'espérance en sortant de O du nombre de pas \bar{T}_O jusqu'au premier retour à O .
7. La probabilité p_k en partant de O que la marche visite U exactement k fois ($k = 0, 1, 2, \dots$) avant le premier retour à O . Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.

R : $X(t)$ représente une marche aléatoire simple sur le cube $[0, 1]^3$, $\vec{0}$ est l'origine $(0, 0, 0)$, le coin opposé $(1, 1, 1)$ est noté par u . On remarque dans toutes les questions les voisins de l'origine ont un rôle symétrique et cela nous permet de le noter par la même lettre $a = (0, 0, 1), \dots$. De la même manière on appelle les voisins de u par $b = (0, 1, 1), \dots$

1. $P_a[X(T) = u]$, s'obtient de la solution du système

$$\begin{cases} p_a = \frac{2}{3}p_b + \frac{1}{3}p_0 = \frac{2}{3}p_b \\ p_b = \frac{2}{3}p_a + \frac{1}{3}p_u = \frac{2}{3}p_a + \frac{1}{3} \end{cases}$$

qui donne $p_b = \frac{3}{5}, p_a = \frac{2}{5}$.

2. Même système!
3. t_a, t_b sont la solution du système

$$\begin{cases} t_a = \frac{2}{3}(1 + t_b) + \frac{1}{3}(1 + t_0) = \frac{2}{3}t_b + 1 \\ t_b = \frac{2}{3}(1 + t_a) + \frac{1}{3}(1 + t_u) = \frac{2}{3}t_a + 1 \end{cases}$$

qui donne $t_b = t_a = 3$. Remarquez la similarité entre les deux systèmes.

4. $\pi = (1/8, 1/8, \dots, 1/8)$.
5. Pour trouver $t_u = E_u[T_0]$, on résout le système :

$$\begin{aligned} t_u &= 1 + t_b \\ t_b &= 1 + \frac{2}{3}t_a + \frac{1}{3}t_u \\ t_a &= 1 + \frac{2}{3}t_b \end{aligned}$$

dont la solution est $t_a = 7, t_b = 9, t_u = 10$.

6. $E_0[\bar{T}_0]$ où \bar{T}_0 représente le temps espéré jusqu'à la prochaine visite de 0 en commençant de 0, est donné par $1 + t_a = 1 + 7 = 8$. A remarquer que c'est exactement l'inverse de la probabilité «de long parcours» d'être à 0, ce qui est un résultat bien connu sur les temps de retour espérés.
7. Soit p_k la probabilité d'avoir exactement k visites à $U = (1, 1, 1)$ avant de retourner à 0. Alors p_0 c'est le même que la probabilité commençant en A que la marche revient à 0 avant de visiter $(1, 1, 1)$, qui est $\frac{3}{5}$. Pour $k = 1$ visites, «le chemin» observé seulement en O , l'état Après B et U est $A, U, B, 0$. Donc, $p_1 = P_A[U, B, 0] = (\frac{2}{5})^2$, $p_2 = P_A[U, B, U, B, 0] = (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})$, et en général $p_k = \frac{3}{5}p_{k-1} = (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^{k-1}, k \geq 2$. La distribution pour $k \geq 1$ est géométrique (vérifier que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{2}{5}$, comme il faut).

5.5 Fonction de Green : le bilan de la vie

La fonction $\overleftarrow{G}_{i,j}$ appelée fonction de Green (ou potentiel), fournit le «bilan» des temps passés dans tous les endroits possibles j , à partir de i , pendant la «vie transitoire».

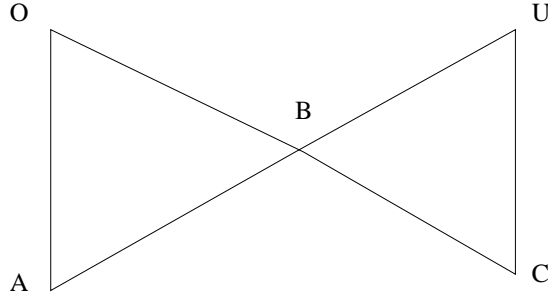


FIGURE 5.2 – Marche aléatoire simple sur le graphe papillon

Exercice 5.7 *Un spéolog est perdu dans une grotte, les chemins de laquelle forment le graphe papillon ci-dessous. Il se trouve à présent dans le point A, et à cause du manque de visibilité, est obligé a faire une **marche aléatoire** entre les sommets du papillon. A) Calculer les probabilités stationnaires de chaque nœud, et l'espérance en sortant de O du nombre de pas \tilde{N}_O jusqu'au premier retour à O. B) Supposons que cette marche finira en U avec la liberté (sortie de la grotte) ou en O avec la mort. Calculer :*

1. la probabilité de survie du spéolog $p_A = \mathbb{P}_A\{X_N = U\} = \mathbb{P}_A\{N_U < N_O\}$, où $N = \min[N_U, N_O]$.
2. Les probabilités transientes Q^2, Q^3, Q^n .
3. La fonction génératrice $(I - xQ)^{-1}$, la matrice fondamentale et le nb. espéré des visites en B, A et C, à partir de B.
4. L'espérance $n_A = E_A[N]$. Indication : Utiliser la symétrie.

Solution B) : 1) En résolvant le système d'adsorption pour p_A, p_B, p_C , on trouve $p_A = 3/4, p_B = 1/2, p_C = 1/4$ 2) Calculons la puissance n de la matrice Q correspondante aux états transients B (centre), A, C. Le polynôme caractéristique est $-\lambda^3 + \lambda/4 = -\frac{\lambda}{4}(4\lambda^2 - 1)$, avec racines $\lambda_0 = 0, \lambda_{1,2} = \pm 1/2$. Par Cayley-Hamilton,

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, Q^3 = Q/4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q^4 = Q^2/4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \\ 0 & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}, \dots$$

$$Q^k = \begin{pmatrix} 2^{-k-1} (1 + (-1)^k) & -2^{-k-2} (-1 + (-1)^k) & -2^{-k-2} (-1 + (-1)^k) \\ -2^{-k-1} (-1 + (-1)^k) & 2^{-k-2} (1 + (-1)^k) & 2^{-k-2} (1 + (-1)^k) \\ -2^{-k-1} (-1 + (-1)^k) & 2^{-k-2} (1 + (-1)^k) & 2^{-k-2} (1 + (-1)^k) \end{pmatrix}$$

3) La fonction génératrice est

$$(I - xQ)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x^2/4} & \frac{x}{4(1-x^2/4)} & \frac{x}{4(1-x^2/4)} \\ \frac{x}{2(1-x^2/4)} & \frac{1-x^2/8}{1-x^2/4} & \frac{x^2}{8(1-x^2/4)} \\ \frac{x}{2(1-x^2/4)} & \frac{x^2}{8(1-x^2/4)} & \frac{1-x^2/8}{1-x^2/4} \end{pmatrix}$$

la matrice fondamentale est :

$$(I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Les nb. espéré des visites en B, A et C , à partir de B se trouvent dans la première ligne.

Exercice 5.8 Calculer Q^2, Q^3, Q^n et $(I - Q)^{-1}$ pour $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

R : Le polynôme caractéristique est $-\lambda^3 + \lambda^2/2 + \lambda/4 = -\frac{\lambda}{4}(4\lambda^2 - 2\lambda - 1)$, avec racines $\lambda_0 = 0, \lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/4$. Par Cayley-Hamilton, $Q^3 = Q^2/2 + Q/4$. La solution la plus simple est par la décomposition spectrale. Une autre est de chercher des scalaires tq $Q^n = a_n Q^2 + b_n Q$. On trouve $a_n = a_{n-1}/2 + b_{n-1}, b_n = a_{n-1}/4$ et

$$Q^n = a_n Q^2 + b_n Q, n \geq 2$$

où $a_n = a_{n-1}/2 + a_{n-2}/4, a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$, et finalement

$$Q^k = \begin{pmatrix} A_k & B_k/2 & B_k/2 \\ B_k & C_k & C_k \\ B_k & C_k & C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{4(\lambda_1 - \lambda_2)} & \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{4(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} & \frac{\lambda_1 \lambda_2^k + (-\lambda_2) \lambda_1^k}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} & \frac{\lambda_1 \lambda_2^k + (-\lambda_2) \lambda_1^k}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} & \frac{\lambda_1 \lambda_2^k + (-\lambda_2) \lambda_1^k}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} & \frac{\lambda_1 \lambda_2^k + (-\lambda_2) \lambda_1^k}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{pmatrix}$$

3) Les formules pour les probabilités transientes sont assez compliquées ; plus convenables sont les formules des **fonctions génératrices** $(I - xQ)^{-1}$, qui généralisent la **matrice fondamentale** $(I - Q)^{-1}$. En généralisant encore, remplaçons la première ligne par (z, z_1, z_2) :

$$(I - xQ)^{-1} = I + xQ + x^2 Q^2 + \dots = \begin{pmatrix} \frac{1}{-z_1 x^2 - \frac{z_2 x^2}{2} - zx + 1} & \frac{x z_1}{-z_1 x^2 - \frac{z_2 x^2}{2} - zx + 1} & \frac{x z_2}{-z_1 x^2 - \frac{z_2 x^2}{2} - zx + 1} \\ \frac{x}{2(-z_1 x^2 - \frac{z_2 x^2}{2} - zx + 1)} & \frac{-z_2 x^2 - zx + 1}{-z_1 x^2 - \frac{z_2 x^2}{2} - zx + 1} & \frac{x^2 z_2}{2(-z_1 x^2 - \frac{z_2 x^2}{2} - zx + 1)} \\ \frac{x}{2(-z_1 x^2 - \frac{z_2 x^2}{2} - zx + 1)} & \frac{x^2 z_1}{2(-z_1 x^2 - \frac{z_2 x^2}{2} - zx + 1)} & \frac{-z_1 x^2 - zx + 1}{-z_1 x^2 - \frac{z_2 x^2}{2} - zx + 1} \end{pmatrix} = \{z_1=z_2=1/4, z=1/2\}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{-\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1} & \frac{x}{4[-\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1]} & \frac{x}{4[-\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1]} \\ \frac{x}{2[-\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1]} & \frac{-\frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} + 1}{-\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1} & \frac{x^2}{8[-\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1]} \\ \frac{x}{2[-\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1]} & \frac{x^2}{8[-\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1]} & \frac{-\frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} + 1}{-\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1} \end{pmatrix} = \{x=1\} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Une expansion en séries de puissances en x fournit les probabilités transientes

$$\begin{pmatrix} \frac{x^5}{4} + \frac{5x^4}{16} + \frac{3x^3}{8} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1 & \frac{5x^5}{64} + \frac{3x^4}{32} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} & \frac{5x^5}{64} + \frac{3x^4}{32} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} \\ \frac{5x^5}{32} + \frac{3x^4}{16} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{4} + 2 & \frac{3x^5}{64} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^2}{8} + 1 & \frac{3x^5}{64} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^2}{8} + 1 \\ \frac{5x^5}{32} + \frac{3x^4}{16} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{4} + 2 & \frac{3x^5}{64} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^2}{8} + 1 & \frac{3x^5}{64} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^2}{8} + 1 \end{pmatrix}$$

La généralisation (sans peine) peut fournir le nb. espéré des boucles en 1, et les nb. espérés des passages $1 \rightarrow 2$ et $1 \rightarrow 3$ (en dérivant par rapport à la «variable de bilan» associée et en la faisant ensuite 1).

Exercice 5.9 *Supposons que les chemins menant à U dans la grotte du speologue prennent deux heures, ceux menant à O trois heures, et les autres 5 heures.*

1. *Calculer l'espérance du temps T qu'il reste à passer dans la grotte.*
2. *La grotte contient aussi un génie, qui frappe le spéolog des nb. aléatoires, ayant une distribution de Poisson des coups, avec espérance 3 sur les chemins menant à U , 5 pour ceux menant à O , et 2 pour les autres chemins. Calculez l'espérance du nombre des coups que le spéolog prendra dans la grotte.*
3. *(*) Calculez la variance et la distribution du nombre des coups que le spéolog prendra dans la grotte.*
4. *Étant donnée une marche pondérée sur un graphe, avec des états absorbants, et des temps déterministes $T_{i,j}$ pour traverser l'arête (i,j) , calculer le vecteur $\mathbf{T} = (t_i = E_i[T], i \in \mathcal{T})$.*

R : 4. $\mathbf{T} = (I - Q)^{-1}Q \times_H \tilde{T}$ où \tilde{T} est la matrice des temps $\tilde{T}_{i,j}$ pour traverser de i à j et \times_H dénote le produit composante par composante. ■

Exercice 5.10 *Un spéolog est obligé à faire une **marche aléatoire** entre les sommets d'un triangle $\{1, 2, 3\}$, avec toutes les chemins ayant des chances égales d'être prises. Il y a deux chemins entre 1, 2, deux chemins entre 1, 3, et 1 chemin entre 2, 3. Il y a aussi deux chemins boucles (partant et finissant) en 2, deux chemins boucles en 3, et six chemins boucles en 1. Calculer*

1. *La matrice de transition P de la marche et ses valeurs propres*
2. *les probabilités stationnaires de chaque nœud*
3. *La matrice symétrique $\pi(i)P(i, j)$.*
4. *La matrice de transition P^n*
5. *La fonction génératrice $(I - xP)^{-1}$ et*
6. *l'espérance en sortant de 3 du nombre de pas \tilde{N}_3 jusqu'au premier retour à 3.*

R : 1)

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est

$$-x^3 + \frac{7x^2}{5} - \frac{11x}{25} + \frac{1}{25} = -\frac{x-1}{25}(5x-1)^2,$$

avec valeurs propres $1, -1/5, -1/5$. 4) La solution la plus simple est par la décomposition spectrale. Une autre est de chercher des scalaires

$$P^n = a_n P^2 + b_n P + c_n I$$

où $a_n = \dots, b_n = \dots, c_n = \dots$, et l'initialisation vient de Cayley-Hamilton $P^3 = \frac{7}{5}P^2 - \frac{11}{25}P + \frac{1}{25}I$. Finalement,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{5^{-k}}{2} & \frac{1}{4} - \frac{5^{-k}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{5^{-k}}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{5^{-k}}{2} & \frac{1}{4} + \frac{35^{-k}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{5^{-k}}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{5^{-k}}{2} & \frac{1}{4} - \frac{5^{-k}}{4} & \frac{1}{4} + \frac{35^{-k}}{4} \end{pmatrix}$$

Exercice 5.11 *Un message électronique doit être transmis par l'utilisateur d'une machine A vers l'utilisateur d'une machine C. Ce transfert s'effectue par l'intermédiaire d'une machine B. Mais Mickey Markov est administrateur du réseau et il y a parfois des messages perdus ou détruits. On suppose que – le transfert de A vers B est effectif avec la probabilité p et échoue avec la probabilité $1 - p$. En cas d'échec, le message est retourné à l'utilisateur A ; – le transfert de B vers C est effectif avec la probabilité q et échoue avec la probabilité $1 - q$. En cas d'échec, le message est à nouveau retourné à l'utilisateur A ; – en cas d'échec, A renouvelle l'envoi du message ; – tous les transferts sont indépendants entre eux. On note $X_n, n \geq 0$ la succession des machines sur lesquelles le message transite. a) Démontrer que $X_n, n \geq 0$ est une chaîne de Markov homogène d'espace d'états A, B, C , de condition initiale $X_0 = A$, dont on écrira la matrice de transition P . b) On s'intéresse au nombre N de transitions nécessaires pour que le message atteigne son destinataire : $N = \inf n \geq 1, X_n = C$. 1) Démontrer que, pour tout entier n , $P(N \leq n) = p_{AC}(n)$, où $p_{AC}(n)$ est le coefficient correspondant à la ligne A et à la colonne C de la matrice P^n , puissance n de P . 2) En utilisant l'identité $P^{n+1} = P P^n$, démontrer la relation suivante : $p_{AC}(n+1) = (1-p)p_{AC}(n) + p(1-q)p_{AC}(n-1) + pq$. 3) Existe-t-il une suite constante solution particulière de l'équation de récurrence $u_{n+1} = (1-p)u_n + p(1-q)u_{n-1} + pq$? 4) Que valent $p_{AC}(0)$ et $p_{AC}(1)$? – On suppose maintenant $p = q = 1/2$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $v_n = u_{n-1}$. Quelle est la forme générale de la solution de l'équation de récurrence satisfaite par la suite $v_n, n \geq 0$? 5) En déduire $P(N \leq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. 6) Calculer $E[N]$.*

5.6 Les fonctions harmoniques des marches aléatoires sur un réseau (*)

Exercice 5.12 *Quelle est la fonction harmonique de la marche aléatoire simple non symétrique sur les entiers $\{0, 1, \dots, B\}$, arrêtée en $0, B$?*

Rq : La simplicité du graphe «série» de cette marche permet un calcul explicite. **Q :** Est-ce des formules en termes de la structure du graphe sont aussi disponibles pour les fonctions harmoniques des marches aléatoires sur des graphes pondérés, avec des structures plus compliquées ? Cette question a été beaucoup étudiée en électricité, en commençant avec Kirchhoff. Pour chaque $x \in \mathcal{T} = V - \partial$, soient $V(x)$, les potentiels induits dans les nœuds du réseau. Alors, la loi des courants de Kirchhoff affirme que

$$\sum_y \frac{V(y) - V(x)}{R(x, y)} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{T}$$

Il est alors facile de vérifier que les potentiels sont une fonction harmonique pour la matrice stochastique $P(x, y) = \frac{C(x, y)}{c_x}$. L'unicité des fonctions harmoniques (!) nous assure qu'en fait les deux concepts coïncident ! La simplification principale apportée par l'approche de Kirchhoff vient du concept de résistance équivalente (l'idée étant de remplacer un réseau des résistances par un seul résistor), qui est particulièrement facile à calculer pour les réseaux séries-parallèle.

Exercice 5.13 *Recalculer la fonction harmonique de la marche aléatoire simple non symétrique sur les entiers $\{0, 1, \dots, B\}$, arrêtée en $0, B$, à partir des lois de Kirchhoff.*

Il est aussi possible de transformer une étoile à résistances A, B, C dans un triangle à résistances $x = A + B + \frac{AB}{C}, \dots$. La transformation inverse est $A = \frac{yz}{x+y+z}, \dots$

Exercice 5.14 Calculer la fonction harmonique de la marche aléatoire simple «avec deux bonheurs à la fin» $\{0, 1, 2, B_1, B_2\}$, et des exemples de fig II.3, II.5 de Bollobas.

Finalement, une formule très intéressante nous fournit la probabilité d'arriver dans un ensemble d'états de bonheur $\{B\}$, avant de revenir dans un état de départ a :

$$P[a- > \{B\}] := P_a[\tau_{\{B\}} < \tau_a^+] = \frac{1}{d_a R(a \leftrightarrow \{B\})}$$

où $R(a \leftrightarrow \{B\})$ dénote la résistance équivalente.

Exercice 5.15 Calculer la probabilité du «bonheur avant retour» pour les marches aléatoires simples des exemples 2.5, 2.6, 2.7 de Lyons et Peres.

Rq : Il y a plusieurs résultats plutôt subtils concernant l'ergodicité des chaînes à espace d'états dénombrable, où le concept de résistance équivalente s'est avéré utile ; par exemple, les marches simples sur \mathbb{Z}^d sont récurrents ssi $d \leq 2$. En conclusion, les méthodes développées par les physiciens pour calculer des potentiels en utilisant les transformations séries/parallèle et «étoile triangle» pourront nous servir en probabilités pour calculer les probabilités du bonheur et les fonctions harmoniques.

5.7 Exercices

1. **Rélations de récurrence.** Obtenez la formule analytique des suites décrites par les relations de récurrence ci-dessous, et vérifiez-les en utilisant les premiers termes de la suite t_2, t_3 .
 - (a) $t_i = 2t_{i-1} + i - 1, \quad t_0 = 0$
 - (b) $t_i = 2t_{i-1} + 5 \cdot 2^i, \quad t_0 = 0$
 - (c) $t_i = 3t_{i-1} - 2t_{i-2} + 2, \quad t_0 = 0, t_1 = 2$
 - (d) $t_i = 2t_{i-1} - t_{i-2} + 2, \quad t_0 = 0, t_1 = 2$
2. Calculer les probabilités de «bonheur» pour une marche sur $[0, B]$, avec a) $\{p_{-2} = \frac{2}{5}, p_{-1} = \frac{1}{5}, p_1 = \frac{1}{5}\}$ b) $\{p_{-1} = \frac{8}{10}, p_1 = \frac{1}{10}, p_2 = \frac{1}{10}\}$ c) $\{p_{-1} = \frac{6}{7}, p_1 = 0, p_2 = \frac{1}{7}\}$
3. Une particule décrit une marche aléatoire sur $E = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$: si la particule est en $i < n$, alors elle se déplace en $j = i + 1$, et si la particule est en $i > n$, alors elle se déplace en $j = i - 1$; si la particule est en $i = n$, alors elle se déplace en une position j choisie avec probabilités égales parmi les éléments de E différents de n . La position X_k au temps k constitue une chaîne de Markov.
 - (a) Donner la matrice de transition.
 - (b) Déterminer la loi invariante de la chaîne.
 - (c) Calculer la position moyenne de la particule en régime stationnaire.
 - (d) Calculer l'espérance du temps de retour en n d'une particule qui part de n .
 - (e) Rajouter maintenant deux états absorbants 0 et $2n$, et supposer que si la particule est en $i = n$, alors elle se déplace en 0 avec probabilité a, en $2n$ avec probabilité b, et avec probabilité $1 - a - b \geq 0$ à une position j choisie avec probabilités égales parmi les autres éléments de E , différents de n .
 - i. Déterminer les lois stationnaires de la chaîne.

- ii. Calculer l'espérance du temps $T = \min[T(0), T(2n)]$.
- iii. Calculer les probabilités de ruine $\psi(k) = P_k[T(0) < T(2n)]$.
4. **La marche paresseuse :** Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$ une marche aléatoire sur \mathbb{Z} , avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = \pm 1] = p/q$ et $P[Z_n = 0] = 1 - p - q$, avec $0 < p + q < 1$. Pour tout x de \mathbb{N} , on note par E_x l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés. Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\}$, $f_x = E_x X_T$, $t_x = E_x T$, $c_x = E_x[\sum_0^T X(t)]$ et $w_x = E_x a^T$. Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour a) p_x , b) f_x , c) t_x , d) c_x et e) w_x , quand $p = q < 1/2$.
5. a) Quelle est la probabilité que la marche aléatoire simple soit de retour en 0 après $2n$ pas? b) Approximer cette quantité par la formule de Stirling $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$. c) (*) Démontrez la formule de Stirling.
6. (*) Marc et un groupe de $n - 1$ amis jouent un jeu. Chacun met un euro, et ensuite lance une monnaie biaisée, avec une probabilité de sortir «face» égale à p . La totalité de l'argent est partagée également entre ceux qui ont obtenu face (s'il n'y a aucune, l'argent est donné à une œuvre charitable), et les piles perdent leur argent. a) Quelle est l'espérance du capital de Marc, après un tour? b) (*) Quelle est l'espérance du capital après un tour pour un joueur choisi aléatoirement?

Solutions :

1. (a) C'est une équation nonhomogène, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \quad \tilde{t}_i = c_1 i + c_2 \quad \text{avec} \quad c_1 i + c_2 = 2(c_1 i - c_1 + c_2) + i - 1$$

et alors

$$\begin{aligned} c_1 &= 2c_1 + 1 & \text{et} & \quad c_1 = -1 \\ c_2 &= -2c_1 + 2c_2 - 1 & \text{et} & \quad c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\ \tilde{t}_i &= -i - 1 & \text{Finalement,} & \\ t_0 &= 0 = -1 + A & \text{et} & \quad A = 1 \\ t_i &= -i - 1 + 2^i \end{aligned}$$

- (b) C'est une équation nonhomogène, alors :

$$t_i = \tilde{t}_i + A2^i, \quad \tilde{t}_i = ci2^i \quad \text{avec} \quad ci2^i = 2(c(i-1)2^i/2) + 52^i$$

et alors

$$\begin{aligned} c &= 5, & t_i &= 5i2^i + A2^i & \text{et finalement,} \\ t_0 &= 0 = A & \text{et} & \quad A = 0 \\ t_i &= 5i2^i \end{aligned}$$

- (c) C'est une équation différentielle nonhomogène et l'équation quadratique attachée a les racines 1, 2, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 2^i + A_2, \quad \tilde{t}_i = ci \quad \text{avec} \quad ci = 3(ci - c) - 2(ci - 2c) + 2$$

$$\begin{aligned}
\text{et alors} \quad c &= -2 \quad \text{et} \quad c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\
\tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\
t_0 &= 0 = -1 + A \quad \text{et} \quad A = 1 \\
t_i &= -i - 1 + 2^i
\end{aligned}$$

- (d) C'est une équation différentielle nonhomogène avec des racines confondues égales à 1 de l'équation quadratique attachée, alors nous aurions :

$$t_i = \tilde{t}_i + A_1 + A_2i, \quad \tilde{t}_i = c_1i + c_2 \quad \text{avec} \quad c_1i + c_2 = 2(c_1i - c_1 + c_2) + i - 1$$

$$\begin{aligned}
\text{et alors} \quad c_1 &= 2c_1 + 1 \quad \text{et} \quad c_1 = -1 \\
c_2 &= -2c_1 + 2c_2 - 1 \quad \text{et} \quad c_2 = 2c_1 + 1 = -1 \\
\tilde{t}_i &= -i - 1 \quad \text{Finalement,} \\
t_0 &= 0 = -1 + A \quad \text{et} \quad A = 1 \\
t_i &= -i - 1 + 2^i
\end{aligned}$$

2.

3. (a) La matrice de transition est :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) $\pi_k = \frac{k}{2(n-1)}\pi_n, \quad \forall k < n$ et la symétrie $\pi_k = \pi_{2n-k}$ impliquent $\pi_n(1 + \frac{(n-1)n}{2(n-1)}) = \pi_n(1 + \frac{n}{2}) = 1$ et $\pi_n = \frac{2}{2+n}, \pi_k = \frac{k}{(n+2)(n-1)}$

(c) $E_S[X_n] = n$

(d) $t_n = \frac{1}{\pi_n} \frac{2+n}{2}$

4. (a) Soit $(Gf)_x = p(f_{x+1} - f_x) + q(f_{x-1} - f_x)$ (formellement, la même expression comme dans le cas «non paresseux», sauf que maintenant $p + q < 1$). Les équations sont respectivement :

$$\begin{aligned}
(Gp)_x &= 0, p_K = 1, p_0 = 0 \\
(Gf)_x &= 0, f_K = K, f_0 = 0 \\
(Gt)_x + 1 &= 0, t_K = 0, t_0 = 0 \\
(Gc)_x + x &= 0, c_K = 0, c_0 = 0 \\
(Gw)_x &= (a^{-1} - 1)w_x, w_K = 1, w_0 = 1
\end{aligned}$$

Ce sont exactement les mêmes équations comme pour une marche non paresseuse, sauf que l'opérateur est différent.

[b] Pour p_x et f_x on obtient donc les mêmes équations comme pour une marche symétrique avec $p = 1/2$, par exemple :

$$\begin{aligned} 2pp_x &= pp_{x+1} + pp_{x-1} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K - 1 \\ p_K &= 1, \quad p_0 = 00 \end{aligned}$$

et donc les mêmes réponses $p_x = \frac{x}{K}$, $f_x = x$ Pour $t_x = E_x[T]$ [temps de sortie espéré] on trouve :

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + \frac{1}{2p} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K - 1 \\ t_K &= 0, \quad t_0 = 0 \end{aligned}$$

avec solution $t_x = \frac{x(K-x)}{2p}$.

Remarque : Le fait que les équations sont identiques pour ces deux marches [paresseuse et non-paresseuse] n'est pas une coïncidence. En fait, il s'avère que les réponses obtenues sont les mêmes par n'importe quel processus Markovien homogène, si on définit l'opérateur de la façon juste. Donc, la réponse pour tous les problèmes concernant espérances variable aléatoire implique un seul opérateur G [seulement les conditions frontière et la partie non homogène changent d'un problème à l'autre]- en fait, la famille des processus aléatoires Markoviens est isomorphe à une famille d'opérateurs déterministes. En plus, la structure des réponses en fonction de G est la même pour tous les processus aléatoires Markoviens, malgré leur diversité; c'est un fait remarquable, qui démontre la puissance de ce concept.

5.

6. a) X , le nombre total des faces a une distribution binomiale $B(n, p)$. Il y a deux possibilités : - que Marc tire une pile et perd, dans quel cas son gain sera 0, et qu'il tire une face, dans quel cas le gain sera $Y = \frac{n}{1+X'}$ où X' a une distribution binomiale $B(n, p)$. Donc, l'espérance du gain est

$$\begin{aligned} Y &= pE \frac{n}{1+X'} = p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} = p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} p^k q^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-1-k} = \sum_{j=1}^n C_n^j p^j q^{n-j} = 1 - q^n \end{aligned}$$

b) Le gain espéré d'un «joueur aléatoire» $Y = Y(X)$ est 0 si $X = 0$, a.p. q^n . Au cas contraire, le «joueur aléatoire» est gagnant avec probabilité $\frac{X}{n}$ et perdant avec probabilité $1 - \frac{X}{n}$. Le gain espéré est toujours $(1 - q^n)E[\frac{X}{n} \frac{n}{X}] = (1 - q^n)$. Finalement, cet exercice suggère la question générale du calcul des «sommes binomiales», par exemple

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i$$

où $x = \frac{p}{q}$. Parfois, ces sommes peuvent être déduites à partir de l'identité $(1+x)^m = \sum_{i=0}^m C_m^i x^i$ en dérivant ou en intégrant. Mais, le procès d'intégration n'aboutit pas toujours à des sommes closes. Une somme $S_n = \sum_1^n f_n$ est une solution d'une relation

de récurrence de premier ordre $S_n - S_{n-1} = f_n$ et donc la question de l'existence des formules closes pour f_n polynômes ou fonctions rationnelles est un cas particulier de la question de l'existence des formules closes pour les récurrences avec coefficients polynomiaux. Cette question est assez difficile, et le plus efficace est d'utiliser un logiciel symbolique. Ceux-ci nous informent s'il y a des formules closes, par exemple dans la famille relativement simple des solutions «d'Alembertiennes», ou si non.

5.8 Exercices d'entraînement

1. L'espace des états d'une chaîne est $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Dessinez le graphe de communication et identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrents et transientes. Y' a-t-il des classes périodiques ?
 (b) Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.
 (c) Trouvez la **limite quand $n \rightarrow \infty$ de la matrice de transition après n étapes P^n**

2. L'espace des états d'une chaîne est $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a & 0 & a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & b & 0 & 1 - b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

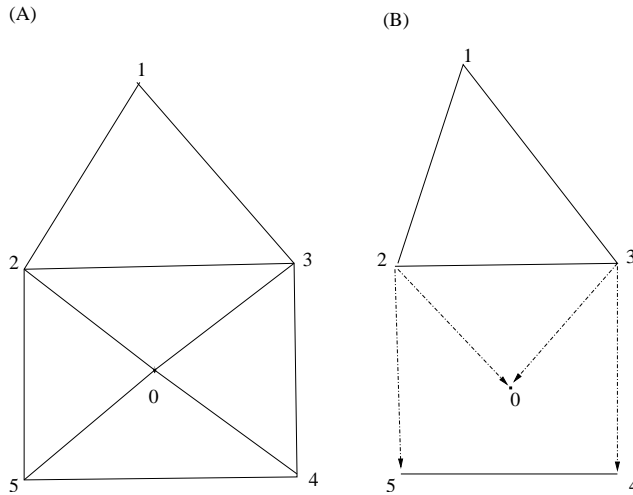
- (a) Dessinez le graphe de communication et identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrents et transientes.
 (b) Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.
 (c) Trouvez la limite quand $n \rightarrow \infty$ de la matrice de transition après n étapes P^n

Sol :

- (a,b) Les classes récurrentes sont 2 et 3,5.

- (c) Pour obtenir la limite, on a juste besoin des probabilités d'absorption dans la classe 2, qui satisfont :

$$y_4 = \frac{1}{2}y_6 + \frac{1}{2}, y_6 = y_1, y_1 = \frac{1}{3}y_4 + \frac{1}{3} \implies y_1 = \frac{3}{5} = y_6, y_4 = \frac{4}{5}$$



3. considérer une particule effectuant une **marche aléatoire simple** X_t , $t = 0, 1, 2, \dots$ sur le graphe (A) ci-dessous : c.-à-d. à chaque moment $t = 1, 2, \dots$, la particule se déplace vers l'un de ses voisins sur le graphe à sa position actuelle, avec la même probabilité pour chaque choix.

(a) Calculer :

- i. Les probabilités stationnaires de chaque nœud.
- ii. L'espérance en sortant de 1 du nombre de pas T_0 jusqu'au nœud 0. *Indication* : Utiliser la symétrie.
- iii. L'espérance en sortant de 0 du nombre de pas \tilde{T}_0 jusqu'au premier retour en 0.

(b) i. La probabilité $x_2 = \mathbb{P}_2\{X_T = 1\}$, où $T = \min[T_1, T_0]$.

- ii. Les probabilités p_k en partant de 2 que la marche visite 1 exactement k fois ($k = 0, 1, 2, \dots$) avant le premier retour en 0.
- iii. Les probabilités p_k en partant de 5 que la marche visite 1 exactement k fois ($k = 0, 1, 2, \dots$) avant le premier retour en 0. Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.
- iv. Les probabilités p_k en partant de 1 que la marche visite 0 exactement k fois ($k = 0, 1, 2, \dots$) avant le premier retour en 1.

(c) À un moment donné, le passage sur certaines arretes du graphe devient impossible, ou possible seulement dans une direction, comme indiquée par des flèches dans le graphe (B). La particule continue de choisir des destinations suivant le graphe initial (A) comme dans la question précédente, mais les choix qui ne sont plus disponibles résultent cette fois dans un pas annulé, donc sur place.

- i. Donnez la matrice de transition de la marche.
- ii. Identifiez les classes de la chaîne, et classifiez les en récurrentes et transitoires.
- iii. Trouvez la distribution stationnaire de chaque classe récurrente.
- iv. Est-ce que la limite quand $n \rightarrow \infty$ de la matrice de transition après n étapes P^n existe ?
- v. Le cas échéant, trouvez-la.

4. Une particule décrit une marche aléatoire sur $E = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$: si la particule est en $i < n$, alors elle se déplace en $j = i + 1$, et si la particule est en $i > n$, alors elle se déplace en $j = i - 1$; si la particule est en $i = n$, alors elle se déplace en une position j choisie avec probabilités égales parmi les éléments de E différentes de n . La position X_k au temps k constitue une chaîne de Markov.
- Donner la matrice de transition.
 - Déterminer la **loi stationnaire (invariante)** de la chaîne.
 - Calculer la position moyenne de la particule en régime stationnaire.
 - Calculer l'**espérance du temps de retour** d'une particule qui part de n .
5. Soit X_t une chaîne de Markov représentant le **nombre de clients en attente** dans un arrêt de bus, dans lequel à chaque instant $t = 1, 2, \dots$ (en temps discret!) une seule personne arrive (ou pas) avec probabilité $p < 1$, et en suite le bus arrive (ou pas) avec probabilité $q < 1$, et prend tous les voyageurs (le dernier arrivé inclu). a) Dessinez le graph de transitions de ce processus, en indiquant les probabilités λ et μ pour que le nombre de voyageurs augmente et diminue respectivement, ainsi que la probabilité z pour que ce nombre reste inchangé. Donnez la matrice des probabilités de transition pour la chaîne X_t . b) Calculez la distribution stationnaire de X_t . c) Calculez, en utilisant un système de conditionnement, l'espérance en sortant de 0 du nombre des pas \tilde{T}_0 jusqu'au premier retour en 0. d) Reprenez les questions précédentes pour une file d'attente $M(\lambda)/M(\mu)/1$, dans laquelle le serveur **sert chaque fois simultanément tous les clients** qu'il trouve en attente dans le tampon (arrivés dans la file après le début de son dernier service). Plus précisément, donnez la matrice génératrice pour le processus X_t . Indiquer les valeurs des probabilités $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ pour que le nombre de clients augmente/diminue, au moment du premier saut à partir d'un état $n \geq 0$. Reprenez ensuite les questions b), c).
6. **Marche réversible ?**
- Considérez une chaîne de Markov sur $\{1, 2, 3\}$ avec matrice des transitions

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 5/6 \\ 6/7 & 0 & 1/7 \\ 30/31 & 1/31 & 0 \end{pmatrix}$$

Combien d'équations d'équilibre détaillé

$$\pi_i P(i, j) = \pi_j P(j, i), \quad \text{avec } i \neq j, P(i, j) \neq 0, \text{ et } P(j, i) \neq 0$$

y a t'il? Est-ce qu'ils admettent des solutions strictement positives? Le cas échéant, trouvez la distribution stationnaire. (*) Est-ce que les équations d'équilibre détaillé continueront à admettre des solutions (strictement positives), si on modifie une des lignes de la matrice des transitions, en laissant les deux autres inchangées?

7. Soit X_n une chaîne de Markov sur $\{0, 1, 2, \dots, B\}$, $B \in \mathbb{N}$, avec :

$$\begin{aligned} P(i, i + 1) &= p, & \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, B - 1\} \\ P(i, i - 1) &= q, & \forall i \in \{1, 2, \dots, B - 1, B\} \\ P(i, i) &= 1 - p - q, & \forall i \in \{1, 2, \dots, B - 1\} \\ P(0, 0) &= q, P(B, B) = p, \text{ et } P(i, j) = 0 \text{ autrement} \end{aligned}$$

(on suppose $0 < p, q$ et $p + q < 1$).

- (a) Combien d'équations d'équilibre détaillé y a t'il? Est-ce qu'ils admettent des solutions strictement positives? le cas échéant, trouvez la distribution stationnaire.
- (b) Calculer l'espérance en sortant de 1 du nombre de pas T_0 jusqu'au nœud 0.
- (c) Calculer l'espérance en sortant de 0 du nombre de pas \tilde{T}_0 jusqu'au premier retour en 0.
- (d) (*) Est-ce que les équations d'équilibre détaillé continueront à admettre des solutions (strictement positives), si on modifie les valeurs p, q à $p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i < 1, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, B\}$ (en gardant exactement le même graphe des transitions avec probabilités non nulles)?

5.9 Solutions

1. a) Les classes récurrentes sont 2 et 3,5. La classe transiente 1,4,6 est périodique de période 3 (par exemple en regardant le graph, ou en remarquant que les puissances de P projeté sur 1,4,6 ont la même structure des elts nonnuls. Algébriquement, on peut aussi calculer les valeurs propres, c.-à-d. les racines du pol char : $(1-x)^2(1-12x)(1-16x^3)$. Les trois racines $l_i = 1/2 * (1/2)^{1/3}, i = 1, 2, 3$ exhibent une périodicité de degré 3, «diminuant vers 0» [en fait, la réponse dépend de la définition, car souvent on n'inclut pas ce genre de périodicité dans les classes transientes]. c) Pour obtenir la limite, on a juste besoin des probabilités d'adsorption dans la classe 2, qui satisfont :

$$y_4 = y_6, y_6 = 1/4 y_1, y_1 = 1/4 + 1/4 y_6 = 1/4 + 1/16 y_1 \implies y_1 = 4/15, y_4 = y_6 = 1/15$$

ou des probabilités d'adsorption dans la classe 3,5 :

$$x_4 = x_6, x_1 = 1/2 + 1/4 x_6, x_6 = 3/4 + 1/4 x_1 = 3/4 + 1/8 + 1/16 x_6 \implies x_1 = 11/15, x_4 = x_6 = 14/15$$

2. (a) i. π_i sont proportionnels aux degrés d_i des sommets. En divisant par la somme $D = 2 + 4 * 3 + 3 * 2 = 20$, on trouve $\pi_i = \frac{d_i}{\sum_j d_j}$, donnant $(\pi_1 = 2/20 = \frac{1}{10}, \pi_2 = \pi_3 = \pi_0 = 4/20 = \frac{1}{5}, \pi_4 = \pi_5 = \frac{3}{20})$
- ii. Soit

$$t_i = E_i T_0 = E_i[\text{nombre espéré de pas jusqu'au nœud 0}].$$

Rq : Pour cette question, le nœud 0 est effectivement absorbant. La symétrie implique $t_2 = t_3, t_5 = t_4$, donc trois équations suffiront (au lieu de 5). En conditionnant sur le premier pas, on trouve que t_i satisfont :

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 + t_2 \\ t_2 &= 1 + \frac{1}{4} t_1 + \frac{1}{4} t_2 + \frac{1}{4} t_5 \\ t_5 &= 1 + \frac{1}{3} t_5 + \frac{1}{3} t_2 \end{aligned}$$

Rq : C'est la structure typique $Gt + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ pour les pbs de temps espéré. ça donne : $t_5 = \frac{11}{3}, t_2 = \frac{13}{3}, t_1 = \frac{16}{3}$

iii. $E\tilde{T}_0 = 1 + \frac{1}{4}(t_2 + t_3 + t_4 + t_5) = 1 + \frac{12}{4} = 5 (= \frac{1}{\pi_0})$ en vérifiant ainsi le théorème $E\tilde{T}_0 = \frac{1}{\pi_0}$.

(b) i. **Rq** : Pour cete question, les nœuds 0, 1 sont effectivement absorbants. Le système d'adsorption, tenant compte de $x_2 = x_3, x_4 = x_5$ est :

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4} \\x_4 &= \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4\end{aligned}$$

Rq : C'est la structure typique $Gp = \mathbf{0}$ pour les pbs de prix final espérés. ça donne : $x_2 = \frac{2}{5}, x_4 = \frac{1}{5}$.

ii. Soit p_k la probabilité d'avoir exactement k visites à 1 avant de visiter 0, à partir de 2. Alors p_0 c'est la probabilité commençant en 2 que la marche visite 0 avant de visiter 1, qui est $\frac{3}{5}$, et pour $k \geq 1, p_k = \frac{2}{5}p_{k-1}$, et $p_k = \frac{3}{5} (\frac{2}{5})^{k-1}$, donc une distribution géométrique.

iii. Soit p_k la probabilité d'avoir exactement k visites à 1 avant de visiter 0, à partir de 5. Alors, p_0 c'est la probabilité commençant en 5 que la marche visite 0 avant de visiter 1, qui est $\frac{4}{5}$. Pour $k = 1$ visite, «le chemin» observé seulement en O, 1 et l'état Après 1» est 5,1,2,0. Donc, $p_1 = P_5[1, 2, 0] = \frac{1}{5} \frac{3}{5}$, $p_2 = P_5[1, 2, 1, 0] = \frac{1}{5} \frac{2}{5} \frac{3}{5}$, et en général $p_k = \frac{2}{5} p_{k-1} = (\frac{1}{5} \frac{3}{5}) (\frac{2}{5})^{k-1}, k \geq 1$. La distribution pour $k \geq 1$ est géométrique, et $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{1}{5}$, comme il faut.

iv. **Rq** : Pour cette question, le nœud 1 est absorbant.

$$p_k = \left(\frac{2}{5}\right)^k \frac{3}{5}.$$

(c) i. Après la détérioration, la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(Sans les pas sur place, elle serait)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii. classes récurrentes : $\{0\}, \{4, 5\}$; classe transiente : $\{1, 2, 3\}$.

iii. les distributions stationnaires des classes récurrentes : 1 et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

iv. Le système d'adsorption pour les probabilités d'adsorption dans la classe 0 est :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\x_2 &= \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4} \\x_3 &= \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

et $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$.

v. La matrice des distributions asymptotique est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. (a) La matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $\pi_k = \frac{k}{2(n-1)}\pi_n, \forall k < n$ et la symétrie $\pi_k = \pi_{2n-k}$ impliquent $\pi_n(1 + \frac{(n-1)n}{2(n-1)}) = \pi_n(1 + \frac{n}{2}) = 1$ et $\pi_n = \frac{2}{2+n}$

(c) $E_S[X_n] = n$

(d) $t_n = \frac{2+n}{2}$

4. a) Soit $\lambda = p(1 - q), \mu = q$. On a $z_0 = 1 - \lambda$, et $\forall n \geq 1, z_n = z = 1 - \lambda - \mu = (1 - p)(1 - q)$. Le graph de communication est : b) On trouve $\pi_i = \lambda\pi_{i-1} + z\pi_i \Leftrightarrow \pi_i =$

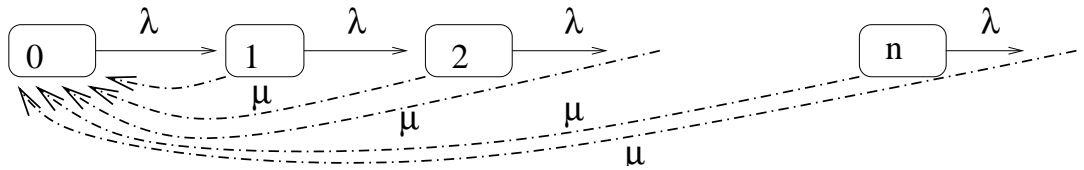


FIGURE 5.3 – Exe 2 : Le serveur sert tous les clients

$\tilde{\lambda}\pi_{i-1}, i = 1, 3, \dots$, avec $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$, et donc $\pi_i = \tilde{\lambda}^i \pi_0$, où la constante de normalisation

est $\pi_0 = 1 - \tilde{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$. c) $t_0 = t^{(0)} + t_1$ où $t^{(0)} = \lambda^{-1}$ et $t_1 = t_2 = \dots = \mu^{-1}$. Remarquez l'identité $t_0 = \pi_0^{-1}/P_0[X_1 \neq 0]$, valable pour toutes les chaînes ergodiques. d)

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

5. a) **C'est juste un système linéaire avec $n = 3$ inconnues** (bon, deux, car la troisième viendra de la normalisation). Pour faciliter la tâche, on peut quand même commencer par résoudre $n - 1 = 2$ équations d'équilibre détaillé

$$\pi_1 5/6 = \pi_3 30/31, \pi_2 1/7 = \pi_3 1/31.$$

Prenons $\pi_3 = 31$ (en renonçant pour l'instant à la normalisation). On trouve $\pi_1 = 36, \pi_2 = 7$, qui satisfont aussi la troisième équation d'équilibre détaillé. Il ne reste qu'à normaliser par la somme :

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{74}(36, 37, 31).$$

Rq : La matrice $D(i, j) = \pi_i P(i, j)$ obtenue ainsi (avec ou sans normalisation) est symétrique.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 30 \\ 6 & 0 & 1 \\ 30 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(et pourrait correspondre aux conductances d'un réseau). Pour une matrice stochastique arbitraire de dimension 3, les quatre équations correspondantes (trois d'équilibre détaillé + la normalisation) n'auront pas de solution, et donc la distribution stationnaire ne sera pas réversible/"graphique/électrique". En général, les matrices de dimension $n \geq 3$ n'ont pas de "graphe pondéré associé", mais seulement le digraphe (graphe dirigé) de communication bien connu. b) Les équations d'équilibre correspondent à une récurrence d'ordre deux (donc facile à résoudre), mais les équations d'équilibre détaillé sont d'ordre 1, donc **super facile à résoudre**. Comme il y a que $B - 1$ équations d'équilibre détaillé, cette fois ça reste super facile même avec une matrice arbitraire avec le même (di)graphe. Ça sera le cas de tous les graphes forêts (sans cycles), car un graphe forêt avec B nœuds a $B - 1$ arêtes ! (dem par récurrence).

6. (a) Il y a B équations d'équilibre détaillé $\pi_{i-1} p = \pi_i q, i = 1, \dots, B$, avec solution

$$\pi_i = \frac{\rho^i}{\sum_{i=0}^B \rho^i}, \rho = p/q.$$

- (b) Les espérances $t_i = E_i T_0$ en sortant de $i = 1, 2, \dots$ du nombre de pas jusqu'au nœud

$$0 \text{ satisfont } (I - Q)\mathbf{t} = \mathbf{1} \text{ où } Q = \begin{pmatrix} 1 - p - q & p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ q & 1 - p - q & p & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & q & 1 - p - q \end{pmatrix}$$

- (c) L'espérance en sortant de 0 du nombre de pas \tilde{T}_0 jusqu'au premier retour en 0 est $\tilde{t}_0 =$.
- (d) (*) Est-ce que les équations d'équilibre détaillé continueront à admettre des solutions (strictement positives), si on modifie les valeurs p, q à $p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i < 1, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, B\}$ (en gardant exactement le même graphe des transitions avec probabilités non nulles) ?

5.10 Problèmes d'entraînement

1. On lance une pièce de monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à q et celle de sortir pile égale à $p = 1 - q$, jusqu'à ce qu'on obtient une suite de K piles (pile-pile-pile-..), arrivées consécutivement. a) Trouvez l'espérance $n = EN$ du nombre de jets N jusqu'à l'arrêt, en incluant les derniers pas, quand $K=2$, et donnez la réponse en termes de p . *Indication* : On pourrait utiliser un processus de Markov qui retient l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu, et qui contient dans ce cas l'état final désiré, et tous ses préfixes. b) (*) Trouvez l'espérance $n = EN$ quand $K=3$. Proposez une formule valable pour un nb. arbitraire K .
2. On lance une monnaie biaisée avec probabilité de sortir pile p , et on s'arrête la première fois quand une pile arrive après un nombre impaire de faces. Trouvez l'espérance du temps de ce jeu. *Indication* : Utilisez un processus de Markov qui retient toujours l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu.
3. n points indépendants sont choisis uniformément sur le périmètre d'un cercle. Quelle est la probabilité p_n qu'il existe un demi-cercle contenant tous les points ? *Ind.* Trouvez p_2, p_3 . Fixez un point i et trouvez la probabilité p que le demi-cercle voisin, dans le sens des aiguilles d'une montre, contient tous les points.

Solutions :

1. a) Considerons le processus de Markov sur les états suivants, qui spécifient une décomposition en trois cas possibles pour la longueur de la dernière suite des deux piles : $A = \{PP\}, P = \{P^cP\}, P^c = \{P^cP\}$, et soit $x_0, x_1, x_2 = 0$ le nombre espéré des futurs pas jusqu'à l'arrêt, conditionné par ces états initiaux. Soit $Q = \begin{pmatrix} q & p \\ q & 0 \end{pmatrix}$. Les deux inconnues $\mathbf{v} = (x_0, x_1)$ satisfont $(Q - I)\mathbf{v} + \mathbf{1} = 0$. La réponse est

$$x_1 = \frac{1}{p^2}, x_0 = \frac{1+p}{p^2}.$$

- b) Considerons le processus de Markov sur les états suivants, qui spécifient une décomposition en trois cas possibles pour la longueur de la dernière suite des piles : $A = \{PPP\}, PP = \{P^cPP\}, P = \{P^cP\}, P^c = \{P^c\}$, et soit $x_0, x_1, x_2, x_3 = 0$ le nombre espéré des futurs pas jusqu'à l'arrêt, conditionné par ces états initiaux. Soit

$Q = \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les trois inconnues $\mathbf{v} = (x_0, x_1, x_2)$ satisfont $(Q - I)\mathbf{v} + \mathbf{1} = 0$. La réponse est

$$x_2 = \frac{1}{p^3}, x_1 = \frac{1+p}{p^3}, x_0 = \frac{1+p+p^2}{p^3}$$

2. Soit N le nombre de pas jusqu'à la première fois quand une pile arrive après un nombre impair de faces, et n son espérance. Le conditionnement sur le premier pas ne marche pas, mais il y a d'autres approches possibles : a) Remarquons que les trois événements FP, P, FF constituent une décomposition de l'espace d'états qui permet soit de constater que notre événement d'arrêt est arrivé, soit de relancer le processus du début. Par conséquent :

$$n = pq2 + p(1 + n) + q^2(2 + n) \Leftrightarrow n = \frac{p + 2q}{q(1 - q)} = \frac{1 + q}{qp}$$

b) On peut aussi "habiller" cette solution en langage Markovien, en définissant une chaîne qui enregistre les états finaux transients 1 = nb pair des F, 2 = nb quelconque des P, 3 = nb impair des F, ∂ = nb impaire des F suivi par P. Le système pour l'espérance du temps d'arrêt est :

$$\begin{aligned} n &= n_1 = 1 + pn_2 + qn_3 \\ n_2 &= qn_3 + 1 \\ n_3 &= 1 + qn_1 \end{aligned}$$

avec la même solution. c) Examinons l'espace d'états, en essayant de trouver une décomposition en cas (ou un temps d'arrêt T) qui permet une approche récursive :

$$E = \{P, FP, FFP, FFFP, FFFFP, \dots\}$$

Dans le premier, troisième, ... cas, on recommence. Dans le deuxième, quatrième, ..., on conclut $N = 2, 4, \dots$. Le temps d'arrêt permettant une solution est donc le temps T de la première pile. En conditionnant sur T , on trouve :

$$\begin{aligned} n &= E[N] = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-1} p(2k) + \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k} p(2k + 1 + n) \\ &= (1 + n)p \frac{q^2}{1 - q^2} + pq(1 + q^{-1}) \sum_{k=1}^{\infty} 2kq^{2k-1} \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=1}^{\infty} 2kq^{2k-1} = \left(\frac{1}{1-q^2}\right)' = \frac{2q}{(1-q^2)^2}$, on trouve finalement : $n = \frac{q(2+pq)}{1+q^3}$.

Chapitre 6

Exercices de révision

- Des femmes et des hommes arrivent dans un magasin, après des temps fixes, unitaires. Chaque instant, une femme arrive avec probabilité λ_F , ou un homme arrive avec probabilité λ_H , ou il n'y a pas d'arrivée, avec probabilité $\lambda_0 = 1 - \lambda_F - \lambda_H$.
 - Trouver la probabilité p_F qu'une femme entre avant un homme. *Indication* : Conditionnez sur le premier instant, ou sur le nombre d'instants sans arrivées.
 - Trouver la probabilité que deux femme entrent consécutivement (c.-à-d. avec aucun homme entre eux, mais pas forcément aux moments consécutifs) avant qu'un homme entre.
 - Trouver la probabilité qu'au moins deux hommes soient entrés consécutivement (c.-à-d. avec aucune femme entre eux, mais pas forcément aux moments consécutifs), avant que trois femmes ne soient entrées consécutivement. *Indication* : Considérez un processus de Markov sur l'espace des états : $(H1, H2, H3, \dots) \cup (F1, F2, F3, \dots)$, qui enregistre au temps t la longueur k de la dernière série des clients $k \in \{1, 2, \dots\}$ du même sexe entrés consécutivement, et leur sexe (H/F) ; formulez des équations d'arrêt pour les états d'arrêt indiqués.
 - Quelle est la probabilité qu'au moins m hommes soient entrés consécutivement, avant que n femmes ne soient entrées consécutivement ?
 - Qu'est qu'y change en temps continu ?
- a) Une mouche effectue une marche cyclique sur les sommets $\{1, 2, 3\}$ d'un triangle, avec matrice de transition "circulante"

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \geq 0$ et $a + b + c = 1$. Il est facile de vérifier que la matrice de transition P^n est aussi "circulante" (c.-à-d. chaque ligne est déduite de la ligne précédente par une permutation cyclique de ses éléments vers la droite) et on dénote par (a_n, b_n, c_n) les éléments de sa première ligne.

- Quelles sont les valeurs limites de (a_n, b_n, c_n) quand $n \rightarrow \infty$?
- On cherche une formule explicite, aussi simple que possible, pour la probabilité $a_n = P^n(1, 1)$ qu'après n étapes, la mouche soit retournée au sommet 1 d'où elle est partie. Soit $v_n = (b_n, c_n)$. Trouvez une récurrence pour le vecteur v_n .

- (c) Résolvez cette récurrence et trouvez a_n , au cas $a = b = c = 1/3$ et au cas $b = c = 1/2$.
- (d) Résolvez la récurrence, au cas où la mouche a deux fois plus de chances de sauter dans le sens des aiguilles d'une montre, c.-à-d. $b = 2/3, c = 1/3$.
- (e) Généraliser au cas d'une marche cyclique sur les sommets d'un polygone avec k sommets (utilisant éventuellement votre langage formel de choix, comme `xmaxima,...`). *Ind* : Cela nous ramène à étudier, éventuellement l'aide de *Maxima*, les puissances des matrices circulantes stochastiques : $A := \text{matrix}([1-b-c, b, c], [c, 1-c-b, b], [b, c, 1-c-b])$; Vérifier que la matrice est entrée correctement en calculant $A1 = \text{subst}(1, b, A)$; $A2 = \text{subst}(0, b, A1)$; $A2^3$; **Note** : *Maxima* n'est pas capable de calculer puissances matricielles symboliques, et elle refuse de faire même les matrices diagonales; mais elle accepte les produits de Hadamard symboliques, et comme les deux coïncident, elle réussit aussi les produits matricielles symboliques, avec un peu d'aide : $V : \text{eigenvectors}(A)$; $V1 : V[2]$; $V2 : V[3]$; $V3 : V[4]$; $VD : \text{transpose}(\text{matrix}(V1, V2, V3))$; $M : \text{ratsimp}(\text{invert}(VD).A.VD)$; $An : \text{ratsimp}(VD.M^n.\text{invert}(VD))$.
3. Soit X_t une chaîne de Markov absorbante, soit ∂ l'ensemble de ses états absorbants, soit B, A une décomposition de l'ensemble des états transitoires, et soit

$$\mathbf{p}(k, B) = (p_x(k, B), x \notin \partial)$$

où

$$p_x(k, B) := \mathbb{P}_x\{\text{exactement } k \text{ visites en } B \text{ avant l'absorption en } \partial\}, x \notin \partial$$

- (a) Quel type de distribution on trouve pour $p_x(k, B)$, quand $B = \{x\}$? (Spécifiez les

paramètres). Quel est le résultat pour la chaîne associée à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 1-b & 0 & b & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & x_4 & 1-x_1-x_2-x_4 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $B = \{3\}$, et en particulier pour $a = b = c = 1/2, x_1 = x_2 = x_4 = 1/4$ ("le papillon").

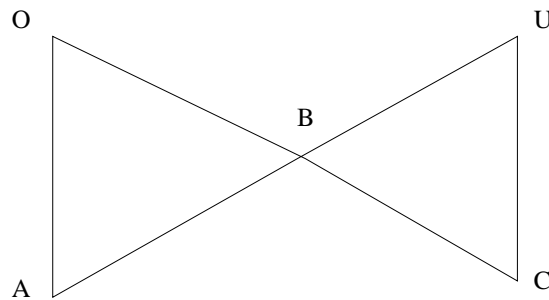


FIGURE 6.1 – Marche aléatoire simple sur le graphe papillon

- (b) Pour B quelconque, en conditionnant sur le premier pas, trouvez une relation entre les variables $p_x(k, B), x \in A, k \in \mathbb{N}$, et finalement une récurrence vectorielle $\mathbf{p}(k) = M\mathbf{p}(k-1)$, en spécifiant comment obtenir la matrice M à partir de la matrice P de transition de la chaîne. Vérifiez votre formule avec le cas $B = A$.

- (c) Retrouvez le résultat pour le "papillon généralisé" ci-dessus, dans le cas qu'on cherche la probabilité p_k en partant de $U = 5$ que la marche visite $O = 1$ exactement k fois ($k = 0, 1, 2, \dots$) avant le premier retour à U) (les autres sommets seront libelés $A = 2, B = 3, C = 4$), **à partir de la formule générale**.
- (d) Considérez aussi le "papillon généralisé", en prenant $B = \{1, 2, 3\}$. Vérifiez pour cet exemple que la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(i, B) = 1, \forall i \in \{1, 2, 3\}$.
- (e) Écrivez un program dans votre langage de choix qui calcule $\mathbf{p}(k, B)$ et une approximation $\mathbf{p}(k, B) \approx c\lambda^k$ pour une chaîne et ensemble B arbitraires et démontrez sa performance sur les exemples 3.5, 3.6 (pages 23-24) et ensembles B de votre choix.
4. a) Quelle est la probabilité que la marche aléatoire simple est de retour en 0 après $2n$ pas? b) Approximer cette quantité par la formule de Stirling $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$.
5. Soit X_t une chaîne absorbante sur $\{1, 2, a\}$ avec matrice de transition $\left(\begin{array}{cc|c} p_1 & p & 1 - p_1 - p \\ 0 & p_2 & 1 - p_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$.
- $\left(\begin{array}{c|cc} Q & 1 - p_1 - p & \\ \hline & 1 - p_2 & \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ où $Q = \begin{pmatrix} p_1 & p \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$, et avec distribution initiale $(1, 0, 0)$. Soit N le nombre des pas (transitions) jusqu'à l'adsorption en a .
- (a) Quelle est la valeur de N si $X_0 = X_1 = \dots = X_{k-2} = 1, X_{k-1} = 2$ et $X_k = a$?
- (b) Trouvez l'espérance du nombre des pas N jusqu'à l'adsorption.
- (c) Demontrez que pour $i, j \in \{1, 2\}$, et $k \in \{1, 2, \dots\}$, il est vrai que
- $$P[N \geq k, X_k = j | X_0 = i] = P[X_k = j | X_0 = i]$$
- (d) Quelle sont les probabilités
- $$P[N \geq 2, X_2 = j | X_0 = i], i, j \in \{1, 2\}$$
- (e) Donnez la formule des probabilités
- $$a_1 = P[N \geq k, X_k = 1 | X_0 = 1], a_2 = P[N \geq k, X_k = 2 | X_0 = 2], k \in \{1, 2, \dots\}$$
- (f) Calculez la matrice génératrice $(I - xQ)^{-1}$.
- (g) Calculez la matrice fondamentale $(I - Q)^{-1}$, et vérifiez la réponse du point b).
- (h) (*) Calculez Q^k , en utilisant le développement limite (en série de puissances) de la matrice génératrice $(I - xQ)^{-1}$.
- (i) (*) Trouvez les probabilités $P[N \geq k | X_0 = 1]$.

Solutions

1. (a) i. Soit

$$t_i = E_i T_0 = E_i[\text{nombre de pas jusqu'au noeud } 0]$$

La symétrie implique $t_2 = t_3, t_5 = t_4$, donc trois équations suffiront (au lieu de 5). En conditionnant sur le premier pas, on trouve que t_i satisfont :

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 + t_2 \\ t_2 &= 1 + \frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_2 + \frac{1}{4}t_5 \\ t_5 &= 1 + \frac{1}{3}t_5 + \frac{1}{3}t_2 \end{aligned}$$

ça donne : $t_5 = \frac{11}{3}, t_2 = \frac{13}{3}, t_1 = \frac{16}{3}$ **Rq** : Pour cette question, le nœud 0 est effectivement absorbant, et la structure générale des équations pour les pbs de temps espéré $G\mathbf{t} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$.

- ii. $E\tilde{T}_0 = 1 + \frac{1}{4}(t_2 + t_3 + t_4 + t_5) = 1 + \frac{12}{3} = 5 (= \frac{1}{\pi_0})$
- iii. π_i sont proportionnels aux degrés d_i des sommets, c.-à-d. $\pi_i = \frac{d_i}{\sum_j d_j}$, donnant $(\pi_1 = 2/(2 + 4 * 3 + 3 * 2) = \frac{1}{10}, \pi_2 = 4/20 = \frac{1}{5}, \pi_0 = \frac{3}{20})$ (en vérifiant ainsi le théorème $E\tilde{T}_0 = \frac{1}{\pi_0}$).
- iv. **Rq** : Pour cete question, les nœuds 0,1 sont effectivement absorbants. Le système d'adsorption, tenant compte de $x_2 = x_3, x_4 = x_5$ est :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4} \\ x_4 &= \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \end{aligned}$$

ça donne : $x_2 = \frac{2}{5}, x_4 = \frac{1}{5}$. **Rq** : C'est la structure typique $G\mathbf{p} = \mathbf{0}$ pour les pbs de prix final espéré.

- v. $p_0 = \frac{2}{5}, p_k = \frac{3}{5}(\frac{7}{10})^{k-1} \frac{3}{10}, k \geq 1$. **Rq** : Pour cette question, le nœud 1 est absorbant, après le premier pas, donnant naissance a une distribution géométrique, "en exceptant" le premier pas.

- (b) i. Après la détérioration, la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Sans les pas sur place, elle serait

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ii. classes récurrentes : $\{0\}, \{4, 5\}$; classe transiente : $\{1, 2, 3\}$.
- iii. les distributions stationnaires des classes récurrentes : 1 et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- iv. Le système d'adsorption pour les probabilités d'adsorption dans la classe 0 est :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4} \\ x_3 &= \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

et $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$. La matrice des distributions asymptotique :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. (a) La probabilité p_F satisfait

$$p_F = \lambda_F + (1 - \lambda_F - \lambda_H)p_F \Leftrightarrow p_F = \frac{\lambda_F}{\lambda_F + \lambda_H}$$

- (b) p_F^2

- (c) Considerons la chaîne de Markov en temps discret qui enregistre la longueur du nombre des clients du même sexe entrés consécutivement et le type, ayant comme espace des états les suites $(H1, H2, H3, \dots) \cup (F1, F2, F3, \dots)$. En prenant en considération seulement les temps quand la chaîne saute, pn a une marche aléatoire qui "avance» sur les hommes/femmes a.p. $p_H = 1 - p_F$ et p_F , et "change de sexe" outrement. Par exemple, si $\lambda_F = 2\lambda_H$, les deux probas sont $p_H = \frac{1}{3}, p_F = \frac{2}{3}$. En dénotant par x_i, y_i la probabilité de notre événement en partant d'une suite des i femmes hommes, il faudra résoudre :

$$\begin{aligned} y_1 &= p_H + p_F x_1 \\ x_1 &= p_H y_1 + p_F x_2 \\ x_2 &= p_H y_1 \end{aligned}$$

Generalisant pour m hommes et n femmes et posant $S_{F,k} = \sum_{i=1}^k p_F^i, S_{H,k} = \sum_{i=1}^k p_H^i$, nous trouvont

$$y_1 = \frac{p_H^{m-1}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}, x_1 = \frac{p_H^m S_{F,n-2}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

et finalement

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^m (1 + p_F S_{F,n-2})}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}} = \frac{p_H^m S_{F,n-1}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

Pour $m = 2, n = 3$, on trouve :

$$y_1 = \frac{p_H}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}, x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$

et

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F + p_F^2)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$

3. a) L'équation de Chapman-Kolmogorov donne immédiatement une formule explicite : $P^n(1, 1)$. On note aussi que les marches cycliques ont la matrice de transition P circulante, et donc nous avons une décomposition spectrale bien connue explicite, qui utilise les racines (complexes) de l'unité. Mais, on peut faire mieux. La matrice P^n est aussi circulante, et contient donc seulement deux inconnues : $b_n = P^n(1, 2), c_n = P^n(1, 3)$. Soit $b = P(1, 2), c = P(1, 3), a = P(1, 1) = 1 - b - c$ les probabilités après un pas. On trouve la récurrence : $\begin{pmatrix} b_{n+1} - 1/3 \\ c_{n+1} - 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & c - b \\ b - c & a - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n - 1/3 \\ c_n - 1/3 \end{pmatrix}$ Le cas $b = c = 1/2$ et $a = b = c = 1/3$ donnent des récurrences «découplées». Le cas $b = 2/3, c = 1/3$ est plus difficile. En utilisant l'ordinateur, on remarque :

$$(b_n - 1/3, c_n - 1/3) = (1/3, 1/3) + 3^{-1-n/2} v_n$$

où $v_n = v_{n+12}$ est périodique.

4. (a) Quand $|B| = 1$, on trouve une distribution géométrique $p_x(k, \{x\}) = \lambda^{k-1} (1 - \lambda)$ où : $1 - \lambda = p_x(1, \{x\}) = Q(x, \partial(A) + \sum_{y \in A-B} p(x, y) P_y [T_{\partial(A)} < T_x]) = Q(x, \partial(A) + \sum_{y \in A-B} p(x, y) (1 - P_y [T_{\partial(A)} > T_x]))$, et $\lambda = Q_{B,B} + \sum_{y \in A-B} p(x, y) P_y [T_{\partial(A)} > T_x] = Q_{B,B} + Q_{B,A} (I - Q_A)^{-1} Q_{A,B}$, car pour $k \geq 2$ on a :

$$p_x(k, \{x\}) = \sum_{y \in A-B} p(x, y) P_y [T_{\partial(A)} > T_x] p_x(k-1, \{x\}) = \lambda p_x(k-1, \{x\})$$

Pour le papillon, $B = \{3\}$, $\lambda_B = x_1 + x_2 + c x_4 = 5/8$ et pour $B = \{1\}$, $\lambda_B = 3/8$.

- (b) Il est convenable de partager $\mathbf{p}_k = (\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k)$, où $\mathbf{b}_k = (p_x(k, B), x \in B)$, $\mathbf{a}_k = (p_x(k, B), x \in A, x \notin B)$. On peut supposer qu'il y a un seul état absorbant (en «collant ensemble» tous les états absorbants), et soit

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} Q_A & Q_{A,B} & \mathbf{q}_A \\ Q_{B,A} & Q_B & \mathbf{q}_B \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

la partition de la matrice de transition contenant les états dans l'ordre $A-B, B, \partial$. On a $\mathbf{b}_0 = 0, \mathbf{b}_1 = \mathbf{q}_B + Q_{B,A} \mathbf{a}_0$ et

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{q}_A + Q_A \mathbf{a}_0 \implies \mathbf{a}_0 = (I - Q_A)^{-1} \mathbf{q}_A, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{q}_B + Q_{B,A} (I - Q_A)^{-1} \mathbf{q}_A$$

Pour $k \geq 2, x \in B, p_x(k, B) = \sum_{y \in A} P(x, y) p_y(k-1, B)$, et donc

$$\mathbf{b}_k = Q_B \mathbf{b}_{k-1} + Q_{B,A} \mathbf{a}_{k-1}$$

tant que pour $x \notin B, k \geq 1, p_x(k, B) = \sum_{y \in A} P(x, y)p_y(k, B)$ et donc

$$\mathbf{a}_k = Q_{A,B}\mathbf{b}_k + Q_A\mathbf{a}_k \implies \mathbf{a}_k = (I - Q_A)^{-1}Q_{A,B}\mathbf{b}_k$$

Comme

$$\mathbf{b}_1 = (I_B - Q_B)\mathbf{1}_B - Q_{B,A}\mathbf{1}_A + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1}([I_A - Q_A]\mathbf{1}_A - Q_{A,B}\mathbf{1}_B) = (I_B - M)\mathbf{1}_B$$

on trouve

$$\mathbf{b}_k = (Q_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1}Q_{A,B})\mathbf{b}_{k-1} \implies \mathbf{b}_k = M^{k-1}((I_B - M)\mathbf{1}_B)$$

où $M = Q_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1}Q_{A,B}$ est la matrice de transition de la «chaîne induite» sur B (où «complement de Shur» de A en Q). Quand $B = A$, on retrouve $\mathbf{b}_k = Q_B^{k-1}\mathbf{q}_B$.

- (c) En résolvant le système d'adsorption pour p_A, p_B, p_C , on trouve $p_A = 3/4, p_B = 1/2, p_C = 1/4$. 5) Soit $p_{A,k} = \mathbb{P}_A\{\text{exactement } k \text{ visites en } U \text{ avant le retour en } O\}$, avec $p_{B,k}, p_{C,k}$ définies pareillement, et $\mathbf{p}_k = (p_{A,k}, p_{B,k}, p_{C,k})$. Ainsi, $\mathbf{p}_0 = (p_A, p_B, p_C)$ et $p_0 = \frac{1}{2}(p_{A,0} + p_{B,0}) = \frac{1}{2}(p_A + p_B)$. Pour $k \geq 1$, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{p}_k + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \\ \iff \mathbf{p}_k &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \\ \iff \mathbf{p}_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \end{aligned}$$

Les vecteurs propres à droite sont les colonnes de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, les valeurs propres correspondantes sont : $0, 0, 5/8$ et le vecteur propre de PF à gauche est : $(0, 3/5, 3/5)$. Dès lors, $\mathbf{p}_k = (5/8)^{k-1}(p_B + p_C) \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ et $p_k = (5/8)^{k-1}(p_B + p_C)3/10$

5.

6. a) $N = k$, b) $E_1N = \frac{1}{1-p_1} + \frac{p}{(1-p_1)(1-p_2)}$, c) Pour i, j transients, l'événement $[X_k = j | X_0 = i]$ implique, est inclu et en effet coïncide avec $[N \geq k, X_k = j | X_0 = i]$ d) $Q^2(i, j) = \dots$ e) On devine et comprends facilement que $a_i = Q^k(i, i) = p_i^k, i = 1, 2$ f) La matrice génératrice est

$$(I - xQ)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-xp_1} & \frac{xp}{(1-xp_1)(1-xp_2)} \\ 0 & \frac{1}{1-xp_2} \end{pmatrix}$$

g) En posant $x = 1$, on trouve la matrice fondamentale :

$$(I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-p_1} & \frac{p}{(1-p_1)(1-p_2)} \\ 0 & \frac{1}{1-p_2} \end{pmatrix}$$

$$n_2 = E_2 N = \frac{1}{1-p_2}, n_1 = E_1 N = \frac{1}{1-p_1} + \frac{p}{(1-p_1)(1-p_2)}$$

h) On retrouve $Q^k(1, 1) = p_1^k$, $Q^k(2, 2) = p_2^k$, et on trouve $Q^k(1, 2) = p \left(\sum_{i=0}^{k-1} p_1^i p_2^{k-1-i} \right)$.

Pour interpreter probabilistiquement la formule de $Q^k(1, 2)$, il est utile de remarquer qu'il s'agit de **la distribution phase la plus simple qui n'est ni serie, ni parallèle**

i) $P[N \geq k | X_0 = 1] = Q^k(1, 1) + Q^k(1, 2) = p_1^k + p \left(\sum_{i=0}^{k-1} p_1^i p_2^{k-1-i} \right)$. La somme vérifie la réponse b).

Chapitre 7

Le processus de Poisson

ch:Poi

7.1 La distribution de Poisson

Exercice 7.1 Calculer la fonction génératrice des probabilités $p_X(z) = \mathbb{E}z^X$ d'une variable aléatoire réelle X de loi de Poisson de paramètres $\lambda > 0$. Calculer l'espérance et la variance.

Exercice 7.2 On considère deux variables aléatoires réelles X et Y indépendantes de loi de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ respectivement.

1. Quelle est la loi de $Z = X + Y$? **Indication :** On peut utiliser la fonction génératrice des probabilités $p_X(z) = \mathbb{E}z^X$, ou la fonction génératrice des moments $m_X(s) = \mathbb{E}e^{sX} = p_X(e^s)$.
2. Pour tout entier $n \geq 0$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Z = X + Y = n$.
3. Déterminer $E(X | X + Y)$.

Exercice 7.3 Invariance par rapport aux sommes indépendantes. Trouver la distribution d'une somme de n variables Poisson indépendantes de paramètre $\lambda_i, i = 1, \dots, n$.

Exercice 7.4 Coloriage : Quelle est la distribution de

$$S = \sum_{i=1}^X B_i$$

où B_i sont des variables aléatoires Bernoulli de paramètre p ? Quelle est la loi $\mathcal{L}(S/X)$?

7.2 Processus de comptage et renouvellement en temps continu

s:ren

Motivation : Beaucoup de phénomènes aléatoires demandent l'étude de l'évolution au cours du temps des processus qui comptent le nombre $N_t, t \in \mathbb{R}_+$ des diverses "arrivées" :
• appels arrivant dans un standard téléphonique • arrivées de clients à un guichet • survenue de pannes dans un parc de machines, ...

Définition 7.1 Un processus $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est appelé processus de comptage s'il prend des valeurs dans \mathbb{N} et s'il vérifie les trois propriétés suivantes :

- (i) $0 \leq s \leq t \Rightarrow N_s \leq N_t$
- (ii) N_s a des chemins "cadlag", c.-à-d. continues à droite et avec des limites à gauche
- (iii) $P[N_s - N_{s-} > 1] = 0$

Il s'agit donc des processus non décroissants et qui n'augmentent jamais avec plus d'une unité. Soit $a_i, i = 1, 2, \dots$ les temps entre deux arrivées consécutives.

Définition 7.2 *Un processus de comptage pour lequel les temps entre deux arrivées consécutives sont des variables aléatoires i.i.d. s'appelle processus de renouvellement. Les temps de renouvellement (ou les temps de la n-ième arrivée) sont :*

$$A_n = \sum_{i=1}^n a_i, n = 0, 1, 2, \dots$$

Il est facile de voir que le nombre d'arrivées avant le temps t , c.-à-d. le processus

$$(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+} = \sup_k \{k : A_k \leq t\}$$

est un processus de comptage. Le processus de comptage N_t et le "processus de points" A_k sont intimement liés. Nous regarderons plus en détail ce couple dans le cas des temps a_i à loi exponentielle entre les arrivées.

7.3 Le processus de Poisson unidimensionnel

dP2 **Définition 7.3** *Soit $a_i, i = 1, 2, \dots$ une suite des v.a. i.i.d., à distribution exponentielle de paramètre λ ("interarrivées"), et soit $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ les temps de renouvellement. On appellera processus de Poisson unidimensionnel homogène (en partant de $N_0 = 0$) le processus qui compte le nombre d'arrivées pendant $[0, t]$:*

$$N_{[0,t]} = N_t = \max\{n \in \mathbb{N} : A_n \leq t\}$$

Exercice 7.5 *La loi de A_n est Gamma $\Gamma_{(n,\lambda)}$ de densité $\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda$.*

Une autre définition équivalente du processus de Poisson unidimensionnel est :

dP1 **Définition 7.4** *Un processus pour lequel*

- il existe une constante $\lambda > 0$ tq pour tout $s > 0, t > 0$, les "accroissements/increments" $N_{t+s} - N_s$ suivent une loi de Poisson de paramètre λt , $p_k(t) := \mathbb{P}\{N_{t+s} - N_s = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ $k = 0, 1, 2, \dots$*

2. et qui a des accroissements indépendants (PAI) s'appelle processus de Poisson homogène.

Remarque 7.1 *Le nombre espéré d'arrivées du processus de Poisson dans un intervalle de longueur t est : $E[N(s+t) - N(s)] = \lambda t$. λ est donc le "taux d'arrivées".*

Remarque 7.2 *Cette définition peut être généralisée au cas multidimensionnel - voir Définition 7.5.*

L'idée de la démonstration de l'équivalence des deux définitions (7.4), (7.3), est présentée dans les exercices suivantes :

Exercice 7.6 *Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus défini par la Définition 7.3. Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt , c.-à-d.*

$$p_k(t) = \mathbb{P}\{N_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Demo : Il est naturel d'aborder ce problème par récurrence. Les cas pour $k = 0, 1, 2$ sont simples. Pour $k \geq 2$, on a besoin de conditionner sur $A_k = x$, et donc de s'appuyer sur la densité Gamma $\Gamma(\lambda, k)$ de $A_k, k \geq 2$: $f_{A_k}(x)dx = \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} \lambda dx$. L'intégral qui résulte est juste $\int_0^t x^{k-1} dx, \forall k$; finalement, le raisonnement par récurrence n'est pas nécessaire.

Exercice 7.7 Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus défini par la Définition 7.4. a) Montrez que les variables aléatoires suivantes : a_1 , qui représente le temps jusqu'à la première arrivée, et a_2 , qui représente le temps entre les deux premières arrivées, sont indépendantes et exponentielles de paramètre λ . Outre dit, pour tout $t_1 > 0, t_2 > 0$,

$$\mathbb{P}\{a_1 > t_1, a_2 > t_2\} = e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda t_2}$$

b) Montrez que la distribution du temps de la prochaine arrivée d'un processus de Poisson de paramètre λ après temps t est exponentielle à paramètre λ .

Exercice 7.8 Considérons la distribution du nombre d'accidents de voiture dans une ville, par jour. a. Est-ce que ce nombre d'accidents pourra suivre approximativement une loi de Poisson? b. Trouver i. la probabilité qu'il y ait au plus trois accidents un jour donné. ii. le nombre moyen d'accidents (M) pour lequel la probabilité d'avoir trois accidents ou plus un jour donné est < 0.05 . (On exprimera cette probabilité en fonction de l'inconnue M et on en déduira une équation qu'il faudra résoudre numériquement).

Exercice 7.9 Des clients arrivent dans une banque selon un processus de Poisson $N(t), t \in \mathbb{R}$, de paramètre $\lambda = 1.2$ (l'unité de temps est la minute).

1. Il arrive en moyenne combien de clients en 10 mn?
2. Donnez la loi de probabilité de $N(2)$, le nombre de clients qui arrivent en deux minutes, et esquisser le graphique de $p_k = P[N(2) = k]$, pour $k=0,1,2,3,4,5$.
3. Donnez la probabilité que personne n'arrive durant 2 mn, et après ça que 3 personnes arrivent dans les 4 mn suivantes.
4. Donnez la probabilité q_3 que 3 personnes arrivent en 4 mn, vérifiez que $q_3 = p_0 p_3 + p_1 p_2 + p_2 p_1 + p_3 p_0$, et expliquez pourquoi.

Exercice 7.10 Démontrer l'identité

$$f_{A_k}(t)dt = \mathbb{P}\{N_t = k - 1\} \lambda dt$$

(qui fournit une démonstration directe de l'équivalence entre processus de Poisson et arrivées Gamma).

R : $f_{A_k}(t)dt = \mathbb{P}\{A_{k-1} \leq t, A_k \geq t, A_k \leq t + dt\} = \mathbb{P}\{A_{k-1} \leq t, A_k \geq t\} \lambda dt = \mathbb{P}\{N_t = k - 1\} \lambda dt$.

Exercice 7.11 Montrer que le nb. espéré d'arrivées $E[N_t]$ en $[0, t]$ est λt , ce qui montre que λ est le "taux d'arrivée" (nb. espéré des arrivées par unité de temps).

En conclusion, le processus de Poisson homogène unidimensionnel de taux λ est un processus de comptage, où "l'avancé du compteur" se fait après des temps exponentielles de paramètre λ , et qui a plusieurs propriétés remarquables, comme :

- distribution exponentielle (donc "sans mémoire") de paramètre λ pour les intervalles a_i entre les arrivées
- la propriété de Markov

- Le processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus à accroissements stationnaires et indépendants (A.S.I. en abrégé), c'est-à-dire les variables aléatoires $N_{I_i}, i = 1, \dots, n$ sont indépendantes, si les intervalles $I_i, i = 1, \dots, n$ sont disjoints. En particulier,

$$\forall s, t \geq 0 \text{ avec } s \leq t, N_t - N_s \text{ est indépendante de } N_u \text{ pour tout } u \leq s.$$

- $(N_t)_{t \geq 0}$ est homogène, c'est-à-dire les increments $N_{[s, s+t]} = N_{s+t} - N_s$ ont une distribution indépendante du moment initial s :

$$\forall s, t > 0, \forall k \in \mathbb{N}, P[N_{s+t} - N_s = k] = P[N_t = k] \stackrel{not.}{=} p_k(t).$$

- $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov, et les probabilités de transition satisfont $\mathbb{P}\{N_t = i + k | N_0 = i\} = p_k(t) = e^{-\mu \frac{t}{k!}}, \mu = \lambda t.$

Exemple d'application du processus de Poisson : La pêche ! On note X_t le nombre de poissons pris par un pêcheur à la ligne dans l'intervalle de temps $[0, t]$. On fait les hypothèses suivantes : (h1) il y a un très grand nombre de poissons, de façon à ce qu'une prise n'influe pas sur la suite de la pêche (h2) l'appétit des poissons ne varie pas avec le temps. Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ peut alors être considéré comme un processus de Poisson, car : - $(X_t)_{t \geq 0}$ est bien un processus de comptage (il est assez clair qu'il est très peu probable de pêcher plusieurs poissons au même instant) - $(X_t)_{t \geq 0}$ est homogène d'après (h2) - $(X_t)_{t \geq 0}$ est un P.A.I. d'après (h1).

7.4 La propriété de Markov du processus de Poisson

Théorème 7.1 *La distribution exponentielle et l'indépendance des intervalles a_i entre les arrivées implique la propriété de Markov.*

Dem : Pour être concret, montrons par exemple que :

$$P[N_{t+s} \geq k + 1 | N_t = k, N_{t-s_1} = k, \forall s, s_1 > 0]$$

$$\begin{aligned} P[N_{t+s} \geq k + 1 | N_t = k, N_{t-s_1} = k] &= P[a_{k+1} \leq t + s - A_k | A_k \leq t - s_1, a_{k+1} > t - A_k] \\ &= \frac{P[t - A_k < a_{k+1} \leq t + s - A_k, A_k \leq t - s_1]}{P[A_k \leq t - s_1, a_{k+1} > t - A_k]} \\ &= \frac{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) P[t + s - x \geq a_{k+1} > t - x] dx}{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) P[a_{k+1} > t - x] dx} \\ &= \frac{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) (e^{-\lambda(t-x)} - e^{-\lambda(t+s-x)}) dx}{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) e^{-\lambda(t-x)} dx} = \frac{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) e^{-\lambda(t-x)} (1 - e^{-\lambda s}) dx}{\int_{x=0}^{t-s_1} f_{A_k}(x) e^{-\lambda(t-x)} dx} = 1 - e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

Rq : Pour d'autres distributions, cette miraculeuse simplification n'est pas vraie¹. Par conséquent, le p

1. La réponse dépendra de t et de s_1 (on l'obtient en utilisant la formule $\bar{F}_{a_i}(x) = e^{-\int_0^x h(y) dy}$ où $h(y) = f_{a_i}(y)/\bar{F}_{a_i}(y)$ est le "taux de termination = hazard rate" de a_i).

7.5 Le générateur des transitions du processus de Poisson

Question 1 Comment caractériser un processus de Markov en temps continu, comme par exemple le processus de Poisson ?

R : Comme le temps $t = 1$ ne peut plus suffire, il est naturel de tourner vers les "taux infinitésimales" caractérisant les transitions après des intervalles très petites avec durée $h \rightarrow 0$.

Exercice 7.12 Montrer que pour un processus de Poisson et pour $h \rightarrow 0$ on a :

$$p_k(h) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & \text{si } k = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & \text{si } k = 0 \\ o(h) & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

Introduisons maintenant une matrice génératrice :

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}$$

qui contienne dehors la diagonale les taux d'arrivée, et sur la diagonale ce qu'il faut pour rendre la somme de chaque ligne 0 (explication plus tard). On verra que les probabilités de transition du processus de Poisson (et de chaque processus Markovien en temps continu) peuvent être calculés à partir de cette matrice, par la formule

$$P(t) = e^{tG}.$$

Dans notre cas, le calcul de l'exponentielle $P(t) = e^{tG}$ produit une structure triangulaire supérieure

$$P(t)(i, j) = \begin{cases} p_t(j - i) & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases}, \quad i, j \in \mathbb{N},$$

où $p_t(k) = P[N_\lambda(t) = k] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ sont les probabilités du processus de Poisson en commençant de 0 (la première ligne). **Rq :** La propriété de semigroupe $P_{t+s} = P(t)P_s$, $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$ est équivalente ici au fait que $p_t(k)$ satisfont :

$$p_{t+s}(n) = \sum_{k=0}^n p_s(k)p_t(n - k)$$

Le processus de Poisson est à la fois un des exemples les plus simples d'un processus de sauts Markovien, et aussi un instrument théorique de démonstrations, grâce à la possibilité de construire explicitement toutes les processus de sauts Markovien en partant des processus de Poisson ! C'est aussi un des rares cas où les probabilités de transition ont des formules explicites.

7.6 Le processus de Poisson comme limite des processus de Bernoulli

On peut aborder l'étude du processus de Poisson unidimensionnel en discretisant le temps : on partagera chaque unité de temps en n unités "infinitesimales" de longueur $h = 1/n$, et en ignorant la possibilité des arrivées doubles. ça remplace le processus d'arrivées en temps continu par un processus de Bernoulli (lancés d'une monnaie) en temps discret. En suite, en laissant $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow h \rightarrow 0$, on arrive au processus de Poisson. Le fait que le nombre (binomial) d'arrivées des succès dans un processus de Bernoulli en temps discret converge vers processus de Poisson en temps continu est une conséquence de l'exercice suivant :

Exercice 7.13 *Considérez un processus d'arrivées indépendantes dans des unités de temps de longueur $h = 1/n$, avec la probabilité d'une arrivee par unite de temps égale a λ .*

1. *Calculez les moments translatés et les moments de la distribution de Poisson, en utilisant la fonction génératrice des probabilités.*
2. *Montrez que la limite quand $n \rightarrow \infty$ d'une distribution binomiale $B(n, p)$ avec $p = \frac{\lambda}{n}$ est la distribution de Poisson avec espérance λ , directement et aussi en utilisant la fonction génératrice des probabilités ou des moments.*
3. *Soit $N_n^{(i)}$ $i = 1, 2, \dots$ les nombres d'intervalles separant les arrivées consecutives. Montrez que les temps $T_n^{(i)} = \frac{N_n^{(i)}}{n}$ entre les arrivées consecutives convergent vers des distributions exponentielles de paramètre λ , pour $i = 1, 2$.*
4. *Considérez un processus d'arrivées indépendantes, avec la probabilité d'une arrivee per unite de temps (ou "taux") égale a λ . Trouver la distribution jointe des nombres d'arrivées dans deux unités de temps consecutives, en subdivisant chaque unité en n periodes d'observation et en prenant $n \rightarrow \infty$.*

Théorème 7.2 (admis) *Le seul processus de renouvellement qui est aussi markovien est le processus de Poisson.*

La forme speciale des probabilités de transition du processus de Poisson unidimensionnel (c.-à-d. indicé par \mathbb{R}_+) est une conséquence de la propriété de Markov, et des équations de Chapman Kolmogorov. Mais ce processus est aussi un processus de Levy (c.-à-d. un processus avec des increments independants et stationnaires), avec des valeurs entières, et sans des points doubles. De manière surprenante, ces trois propriétés forcent les increments d'avoir la distribution de Poisson, même dans le cas multidimensionnel !

7.7 Le processus de Poisson multidimensionnel (*)

d:Poim

Définition 7.5 *Soit λ une constante. On appelle champs (ou processus) de Poisson homogène d'intensité λ sur \mathbb{R}^d un ensemble des variable aléatoire $N(A)$ indexées par des sous-ensembles $A \subset \mathbb{R}^d$ tq :*

1. **indépendance** : *si les sous-ensembles $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^d$ sont disjoints, alors les variables $N(A_1), \dots, N(A_k)$ sont indépendantes*
2. **stationarité** : *la distribution des variables $N(A + t), t \in \mathbb{R}^d$ ne dépend pas de t*
3. *$N(A)$ est une variable Poisson d'intensité $c = \lambda m(A)$, où $m(A)$ est la mesure de Lebesgue.*

Remarque 7.3 Un processus ayant les propriétés (1) et (2) s'appelle processus de Levy.

Remarque 7.4 En fait, la troisième condition peut être remplacée par une condition beaucoup plus faible : $N(A) \in \mathbb{N}$, et la probabilité de plus d'un point dans des ensembles petits est négligeable, c.-à-d. $P[N(A) \geq 2] = o(P[N(A) = 1])$, quand $m(A) \rightarrow 0$.

Pour $d = 1$, le cas du processus de Poisson uni-dimensionnel, il suffit d'étudier les variables aleatoires indexées par les intervalles $A = [a, b]$, et on réserve le nom de processus de Poisson pour le processus $N(t), t \in \mathbb{R}_+$, défini par $N(t) := N([0, t])$. Les variables $N(A) = N(b) - N(a)$ sont appelées alors "incrément" du processus $N(t)$.

7.8 Exercices

1. Des voitures passent sur une route selon un processus de Poisson de param. $\lambda = 1/mn$.
 - a. Si 5% des voitures sont des Renault, montrer que le passage de ces voitures suit un processus de Poisson de param. 0.05.
 - b. Sachant que 10 Renault sont passées en une heure, quelle est l'espérance du nombre total de voitures passées durant cette heure ?
 - c. Si 50 voitures sont passées en une heure, quelle est la probabilité que cinq d'entre elles soient des Renault ?

2. Il existe plusieurs objets d'intérêt associés à chaque processus de renouvellement :

- (a) l'âge courant $Z_1(t) = t - A_{N_t}$
- (b) le temps résiduel courant $Z_2(t) = A_{N_t+1} - t$
- (c) le temps total courant $Z(t) = Z_1(t) + Z_2(t) = A_{N_t+1} - A_{N_t}$

Soit $N_\lambda(t)$ un processus de renouvellement de Poisson. a) Quelle sont les probabilités $P[Z_1(t) = t]$, et $P[Z_1(t) \in [s, t], \forall s \leq \infty$? Trouver la densité de $Z_1(t)$. Concluez que l'âge courant satisfait :

$$F_{Z_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda} & \text{pour } x \leq t \text{ et} \\ F_{Z_1}(x) = 1 & \text{outrement} \end{cases}$$

- b) Montrer que le temps résiduel courant a une distribution exponentielle de paramètre λ . c) Calculez l'espérance du temps total courant ; et comparez la à l'espérance des temps entre les arrivées λ .
3. Soient N_t un processus de Poisson homogène, et t_1 l'instant où se produit la première arrivée. a) Déterminer la loi de t_1 , conditionnellement sur $[N_t = 1]$ b) Déterminer la loi de t_1 , conditionnellement sur $[N_t = 2]$
4. Un scribe doit copier n pages d'un manuscrit. Comme il est fatigué, il commet un nombre total d'erreurs distribuées à distribution de Poisson $Po(\lambda)$, qui peuvent se trouver sur n'importe quelle page, avec des probabilités égales. a) Quelle est la probabilité que la première page ne contient pas des erreurs ? b) Quelle est l'espérance du nombre des pages contenant des erreurs ?
5. (a) Quelle est la probabilité qu'un cercle de rayon r autour de l'origine ne contient aucun point d'un processus de Poisson deux-dimensionnel de taux λ ? Autrement dit, calculez la fonction de "survie" ou de "distribution complémentaire" $\bar{F}_D(r) = \mathbb{P}\{D > r\}$, où D est la distance de l'origine jusqu'au point le plus proche d'un processus de Poisson deux-dimensionnel.

- (b) Calculez la fonction de densité $f_D(r)$.
- (c) Calculez le mode de la fonction de densité.
- (d) Calculez par parties l'intégrale $\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$ et montrez que l'espérance est $\mathbb{E}D = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$ (l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \sqrt{\pi/2} = \int_0^\infty \int_{r^2/2}^\infty e^{-s} ds dr$ peut être calculé par le théorème de Fubini)

6. **Le temps jusqu'à la première "arrivée non-découragée" et la dernière "arrivée découragée"**. Soit N une variable géométrique, à distribution $\mathbb{P}\{N = k\} = (1-p)p^{k-1}, k = 1, \dots$, soit $N_0 = N - 1$ la variable géométrique à distribution $\mathbb{P}\{N = k\} = (1-p)p^k, k = 0, 1, \dots$, et soit $T_i, i = 1, 2, \dots$ des variables aléatoires i.i.d. exponentielles à paramètre μ . Soit $T = \sum_{i=1}^N T_i$ le temps jusqu'à la première "arrivée non-découragée", et soit $W = \sum_{i=1}^{N_0} T_i$ le temps jusqu'à la "dernière arrivée découragée".

- (a) Trouvez la fonction génératrice des moments $m_{T_1}(s) = \mathbb{E}e^{sT_1}$ de T_1 ,
- (b) Trouvez les fonction génératrices des moments m_T de $T = \sum_{i=1}^N T_i$ et m_W de $W = \sum_{i=1}^{N_0} T_i$.
- (c) Quelles sont les distributions des variable aléatoires T, W ?

7. Qu'est-ce qu'on obtient en superposant n processus de Poisson à paramètres $\lambda_i, i = 1, \dots, n$?
8. Montrez que la densité du temps de la n -ième arrivée dans un processus de Poisson a la densité

$$f_{T_n}(x)dx = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda dx$$

9. Soit $a_i, i = 1, 2, \dots$ une suite des variable aléatoire i.i.d. positives ("interarrivées"), à distribution exponentielle de paramètre λ , soit $A_n = A_{(n,\lambda)} = \sum_{i=1}^n a_i$, et soit

$$N_\lambda(t) = \max\{n \in \mathbb{N} : A_n \leq t\}$$

le processus de Poisson qui compte le nombre d'arrivées pendant $[0, t]$.

- (a) Quelles sont la moyenne, la variance et le cumulatif d'ordre k de $N_\lambda(t)$?
- (b) Montrer que la loi de $A_n = A_{(n,\lambda)}$ a la densité Gamma $\Gamma_{(n,\lambda)}(t)$.
- (c) Exprimer la probabilité $P[N_\lambda(t) \leq n]$ comme une probabilité faisant intervenir la loi de Gamma.
- (d) Calculer la moyenne de $A_{(\lceil \lambda x \rceil, \lambda)}$, ainsi que sa limite quand $\lambda \rightarrow \infty$.
- (e) On peut montrer, par l'inégalité de Chebyshev, que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \begin{cases} P[N_\lambda(t) > \lambda x] = 0 & \text{si } x > t \\ P[N_\lambda(t) < \lambda x] = 0 & \text{si } x < t \end{cases}$$

Qu'est qu'on peut conclure sur la limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P[A_{(\lceil \lambda x \rceil, \lambda)} \geq t]?$$

- (f) Donnez un argument direct (sans s'appuyer sur la distribution de Poisson) pour calculer la limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P[\Gamma_{(\lambda x, \lambda)} \geq t].$$

10. Soit X_t un processus de Poisson de taux λ , les points duquel sont coloriés en K couleurs, indépendamment avec des probabilités p_1, \dots, p_K , donnant naissance ainsi à K processus de comptage $X_1(t), \dots, X_K(t)$. Montrez que $X_1(t), \dots, X_K(t)$ sont des processus de Poisson indépendants, avec taux $\lambda p_1, \dots, \lambda p_K$.
11. Une banque a deux caissières. Trois personnes (A, B, et C) entrent en même temps; A et B vont directement aux deux caissières libres et C attend. Quelle est la probabilité que A soit toujours dans la banque quand les deux autres sont partis, dans les trois cas suivants :
- (a) Les "temps de service" sont exactement 2 mn pour les deux caissières.
- (b) Pour les deux caissières, ce temps est 1, 2, ou 3 mn, avec probabilités 1/3 pour chaque cas.
- (c) Les "temps de service" sont exponentielles à paramètres c_1, c_2 .

Solutions :

- 1.
- 2.
- 3.
4. a) Les nombres des erreurs N_i sur chaque page i sont des variables de Poisson "coloriée" avec probabilité $1/n$, et donc N_i sont des variables de Poisson de taux λ/n (indépendantes). La probabilité que $N_i \geq 1$ est $1 - e^{-\lambda/n}$. b) En décomposant la variable N comme somme des indicatrices, l'espérance de $N = \sum_{i=1}^n N_i$ est $n(1 - e^{-\lambda/n})$ (en fait, N a une distribution binomiale, car N_i sont indépendants, par le théorème de coloriage des variables Poisson).
5. a) $\bar{F}(r) = e^{-\lambda\pi r^2}$ b) $f_D(r) = 2\lambda\pi r e^{-\lambda\pi r^2}$. c) Le mode de la densité satisfait $(1 - 2\lambda\pi r^2)e^{-\lambda\pi r^2} = 0$, donc $r = \frac{1}{\sqrt{2\lambda\pi}}$. d) $ED = 2\lambda \int_0^\infty r^2 e^{-\lambda\pi r^2} dr$ En posant $\lambda\pi = \frac{1}{2\sigma^2} \Leftrightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\lambda\pi}}$, on s'aperçoit que notre intégrale est de la forme

$$\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma^3}{2}$$

car elle représente une demi de la variance de la distribution Gaussienne. (On peut aussi retrouver ce résultat en utilisant l'intégration par parties, et en calculant l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \sqrt{\pi/2} = \int_0^\infty \int_{r^2/2}^\infty e^{-s} ds dr$ par le théorème de Fubini.) On trouve finalement que l'espérance est

$$\mathbb{E}D = 2\lambda \frac{\sqrt{2\pi}}{4\lambda\sqrt{2\lambda\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$$

6. (a) $m_{T_1}(s) = \frac{\mu}{\mu-s} = \frac{1}{1-s/\mu}$
- (b) $m_T(s) = \sum_{n=1}^\infty (1-p)p^{n-1} \left(\frac{\mu}{\mu-s}\right)^n = (1-p) \frac{\mu}{\mu-s} \frac{1}{1-p\frac{\mu}{\mu-s}} = \frac{(1-p)\mu}{(1-p)\mu-s}$

(c) T est donc une variable aléatoire exponentielle à paramètre $(1 - p)\mu$, qui est précisément le taux des points "acceptés" du processus de Poisson "aminci" des arrivées non-découragées.

7. Il s'agit d'un processus de comptage à inter-arrivées exponentielles, donc d'un processus de Poisson, a paramètre $\lambda = \sum_i \lambda_i$.

8.

9. (a) $\mathcal{K}_k(N_\lambda(t)) = \lambda t$.

(b) $P[N_\lambda(t) \leq n] = P[A_{n+1} > t]$.

(c) $E[A_{(\lceil \lambda x \rceil, \lambda)}] = \frac{\lceil \lambda x \rceil}{\lambda} \rightarrow x$

(d) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P[A_{(\lceil \lambda x \rceil, \lambda)} \geq t] = \mathbb{I}_{[0, x]}(t)$

Chapitre 8

Les processus markoviens de saut, en tem

Les chaînes de Markov constituent un objet mathématique versatile, mais leur puissance de modélisation atteint son vrai potentiel seulement si on permet aux temps de transition d'un état à l'autre d'être des variable aléatoire (plutôt que prendre toujours la valeur 1. On arrive ainsi à la modélisation en temps continu.

8.1 La propriété de Markov

Définition 8.1 -Propriété de Markov Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ en temps continu et a espace d'états \mathcal{E} a la propriété de Markov si, et seulement si ses probabilités conditionnelles ne dépend pas du passé que par le passé immédiat, c.-à-d. $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < t$, $t_i \in \mathbb{R}$, et $\forall e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_i \in \mathcal{E}$

$$P([X_t = e_i] | [X_{t_0} = e_{i_0}, \dots, X_{t_k} = e_{i_k}]) = P([X_t = e_i] | [X_{t_k} = e_{i_k}])$$

Un processus ayant la propriété de Markov s'appelle processus de Markov.

Interprétation de la propriété de Markov : si on considère que le processus est indicé par le temps, cette propriété traduit le fait que le présent ne dépend du passé qu'à travers le passé immédiat.

Remarque 8.1 Un processus de sauts avec des temps de sauts nonexponentiels n'a pas la propriété de Markov.

Définition 8.2 Matrices de transition Pour tous $0 \leq s \leq t$, pour tous i, j dans I , et pour chaque processus de Markov, on définit les probabilités de transition par :

$$p_{ij}(s, t) = P([X_t = e_j] | [X_s = e_i]).$$

Définition 8.3 Homogénéité des transitions Un processus est dit homogène si, et seulement si :

$$\forall i, j \in I, \forall 0 \leq s \leq t, p_{ij}(s, t) = p_{ij}(0, t - s).$$

On note alors $p_{ij}(s, t) = \underline{p_{ij}(t - s)}$, et la matrice $p_{ij}(t)$ est appelée matrice de transition après temps t .

Hypothèse de travail : **(H1) On ne considérera ici que des processus homogènes.**

Un processus de Markov homogène est uniquement spécifié par ses des probabilités de transition après temps t . Pour tout $t \geq 0$, on note par

$$P(t) = (p_{ij}(t))_{i, j \in I}$$

la matrice des probabilités de transition après temps t .

Remarque 8.2 $\forall t \geq 0$, $P(t)$ est une matrice stochastique (c.-à-d. $\forall i, j \in I$, $p_{ij}(t) \geq 0$ et $\forall i \in I$, $\sum_{j \in I} p_{ij}(t) = 1$).

8.2 Les semigroupes de Markov homogènes

En temps discret, a cause de l'équation de Chapman-Kolmogorov, les matrices de probabilités de transition après temps n avait une structure de semigrupp P^n , qui était engendré par la matrice P de transition après temps 1. On retrouve la même structure dans le cas continu :

Théorème 8.1 Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus Markovien homogène, à temps continu $t \in \mathbb{R}_+$. Alors, les operateurs de transition $(P(t))_{t \geq 0}$ forment un semi-groupe stochastique, c'est-à-dire :

1. $P(0) = I_d$
2. $\forall s, t \geq 0$,

$$P(t + s) = P(t)P(s)$$

(équations de Chapman-Kolmogorov)

Définition 8.4 Une famille des operateurs satisfaisant les propriétés (1) et (2) du théorème 8.2 est appelée **semi-groupe**.

Rappelons que dans les semigroupes discrètes de matrices stochastiques indicé par $t \in \mathbb{N}$ sont engendrés par $P(1)$ (par la formule $P(n) = [P(1)]^n$).

8.3 La dérivée du semi-groupe en 0 (matrice génératrice) engendre le semi-groupe

Pour les processus de Markov en temps continu, il n'existe plus un "temps minimal" d'observation (comme le $t = 1$ du cas discrète) ; il est donc moins evident comment générer le semi-groupe des matrices de transition. Il se trouve que les semigroupes de matrices stochastiques en temps continu sont aussi engendrés par une seule matrice. Comme les propriétés (1) et (2) du théorème 8.2 sont celles d'une fonction exponentielle, on peut s'attendre par analogie avec le cas scalaire que la représentation désirée sera de la forme

$$P(t) = e^{tG} \tag{8.1}$$

Exercice 8.1 Montrer, en utilisant (8.1), que la probabilité de se retrouver au point de départ au temps t pour le processus avec $G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est $\frac{1+e^{-2t}}{2}$ §.

La matrice G , appelée **générateur** est liée aux matrices de transition infinitesimale P_h , avec $h \rightarrow 0$.

§. Pour le calcul de l'exponentielle d'une matrice, on pourrait utiliser la décomposition de Jordan, ou la serie de Taylor, ou une resolution du systeme différentiel : $M_t = e^{tG} \Leftrightarrow M_0 = I$ et $M'(t) = G M(t)$. La meilleure approche est de remplacer la fonction exponentielle par le polynôme qui l'interpole dans les valeurs propres de G (au lieu d'utiliser Taylor, qui interpole en 0) ; on vera que cette méthode (qui est spécifique pour la matrice G en question) est en fait exacte !

Définition 8.5 On appelle *générateur* d'un semigroupe de Markov sur un espace d'états fini où dénombrable la matrice G donnée par :

$$G = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P(t) - I_d}{t} = P'(0) \Leftrightarrow P(t) \approx I + tG, \text{ pour } t \rightarrow 0_+ \quad (8.2)$$

(dérivée de $t \mapsto P(t)$ en 0)[§].

Plus précisément, la matrice G de "taux de transition" infinitesimales, ou "générateur", en partant d'un état initial arbitraire $X_0 = i$, est définie par :

$$\begin{cases} g_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(t)}{t} & \text{quand } i \neq j \\ -g_{ii} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} & \text{quand } i = j \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{ij}(t) = g_{ij}t + o(t) & \text{quand } i \neq j \\ p_{ii}(t) = 1 + g_{ii}t + o(t) \end{cases}$$

Remarque 8.3 On vérifie facilement que $G\mathbf{1} = \mathbf{0}$, (ou $g_{i,i} = -\sum_{j \neq i} g_{i,j}$) ssi $e^{tG}\mathbf{1} = \mathbf{1}$ (en utilisant le développement $e^{tG} = I + tG + \frac{t^2}{2}G^2 + \dots$).

Ainsi, pour $j \neq i$ alors $g_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(t)}{t} \geq 0$ est le **taux de passage** de l'état e_i à l'état e_j , et on a $g_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$. Pour $j = i$, $-g_{ii} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} \geq 0$ est le **taux de sortie** de l'état e_i , pour $t \rightarrow 0$.

Définition 8.6 a) Une matrice G satisfaisant $g_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$ est appelée *essentiellement nonnegative*. b) Une matrice G essentiellement nonnegative satisfaisant

$$g_{i,i} = -\sum_{j \neq i} g_{i,j} = 0, \forall i$$

sera appelée **matrice génératrice**. c) Une matrice G essentiellement nonnegative et satisfaisant

$$\sum_j g_{i,j} \leq 0$$

sera appelée **sous-générateur**.

Remarque 8.4 En utilisant les équations différentielles du théorème 8.2, on peut vérifier que les éléments de e^{tG} sont nonnegatives ssi G est une matrice essentiellement nonnegative.

Remarque 8.5 Chaque matrice génératrice G sur un espace d'états fini définit un processus de Markov de sauts X_t (qui choisit son prochain état $j \neq i$ à partir de $X_t = i$ avec probabilités proportionnelles à $g_{i,j}$, $j \neq i$, après un temps exponentiel de paramètre $\lambda_i = \sum_{j \neq i} g_{i,j}$), avec semigroupe e^{tG} .

§. Nous supposons toujours la continuité du semigroupe en 0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P(t) \rightarrow I_d \quad (8.3)$$

ou I_d denote l'identité, dans quel cas le semi-groupe $(P(t))_{t \geq 0}$ est dit standard.

Exercice 8.2 Donner la matrice de transition G pour un processus de Markov modélisant la "compétition de n exponentielles/dernière ampoule à s'éteindre" décrite dans l'exercice ???. Soit T le temps quand la dernière ampoule s'éteint. a) Calculez directement $F_T(t)$, dans le cas des taux différents. b) En utilisant un logiciel symbolique, comparez avec le résultat donné par e^{tG} , dans le cas des taux identiques. c) Calculez aussi la fonction de répartition du temps T_1 jusqu'au moment quand il reste une seule ampoule, dans le cas des taux identiques (*). d) Expliquez pourquoi le cas des taux différents demande un processus de Markov avec espérance de dimension 2^n .

R : c) $F_{T_1}(t) = (1 - e^{-t})^n + ne^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1} = (1 - e^{-t})^{n-1}(e^{-t}(n-1) + 1)$

Exercice 8.3 a) Pour une matrice (sous)stochastique arbitraire, la matrice $G = P - I$ est une matrice (sous) génératrice. b) La matrice $G = P - I$ a les mêmes vecteurs propres comme P , et que ses valeurs propres sont translatées par -1 .

Remarque 8.6 Les résultats de la théorie des chaînes de Markov en temps discret (comme les systèmes de Dirichlet –voir ci dessous) peuvent être formulés également en termes de P ou de G Mais, l'avantage de la dernière formulation est qu'elle unifie les cas continu et discret.

8.4 Le calcul de l'exponentielle des matrices : développement limités, la résolvante, et la décomposition spectrale

Exercice 8.4 Calculer la puissance n , l'exponentielle ainsi que la résolvante pour une matrice de rang 1,

$$A = \mathbf{b}\boldsymbol{\beta},$$

où $\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}$ sont respectivement des vecteurs colonne et ligne de taille n .

R : L'exponentielle est $e^{tA} = I + \frac{e^{kt}-1}{k}\mathbf{b}\boldsymbol{\beta} = I + \frac{e^{kt}-1}{k}A$, où $k = \boldsymbol{\beta}\mathbf{b}$.

Exercice 8.5 a) Calculer la décomposition spectrale pour une matrice de rang 1,

$$A = \mathbf{b}\boldsymbol{\beta},$$

où $\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}$ sont respectivement des vecteurs colonne et ligne de taille n . b) (***) En suite recalculer l'exponentielle en utilisant la décomposition spectrale.

Sol : a) Comme le déterminant de A est 0, 0 est une valeur propre de A , avec multiplicité $n - 1$ en effet ! Il est aussi facile à vérifier que $\boldsymbol{\beta}$ et \mathbf{b} sont des vecteurs propres pour la valeur propre $k = \boldsymbol{\beta}\mathbf{b}$. Rappelons la décomposition en matrices de rang 1

$$A = \sum_i \lambda_i \mathbf{d}_i \mathbf{g}_i$$

où λ_i sont les valeurs propres, qui est valable pour chaque matrice A de dimension n ayant un ensemble de n vecteurs propres à droite indépendants \mathbf{d}_i (et donc aussi un ensemble de n vecteurs propres à gauche indépendants \mathbf{g}'_i). Cela suggère que pour une matrice de rang 1, la

décomposition spectrale est $A = D \text{Diag}(k, 0, \dots, 0) D^{-1} := (\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n) \text{Diag}(k, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix}$

où $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}$, où $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ pourrait-etre des vecteurs colonne arbitraires, comme ils finiront multipliées par 0. Par contre, en choisissant une base orthogonale dans l'espace perpendiculaire à \mathbf{b} simplifiera le calcul des lignes $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ de la matrice $G = D^{-1}$. Comme elles doivent satisfaire $\beta_i b_j = \delta(i - j)$, le choix d'une base orthogonale pour \mathbf{b}_i permet de choisir tout simplement $\beta_i = \mathbf{b}_i, i \geq 2$. Finalement, pour satisfaire $\beta_1 \mathbf{b} = 1$, on est obligé de choisir $\beta_1 = k^{-1} \beta$. b) L'exponentielle est $e^{tA} = \frac{e^{kt}}{k} \mathbf{b} \beta + \sum_{i=2}^n \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^t$. Pour recuperer la reponse anterieure, il faut encore utiliser la décomposition spectrale $I = \mathbf{b} k^{-1} \beta + \sum_{i=2}^n \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^t$.

Exercice 8.6 Calculer la puissance k , la "résolvante" $(sI - A)^{-1}$, ainsi que l'exponentielle $P(t) = e^{tA}$, pour une matrice de taille $n \times n$, (par exemple $n = 3$) $A = \mu I + \lambda U$, où $U_{i,j} = 1_{j=i+1}$. En deduire les formules pour

1. $\lambda = 1, \mu = 0$; commenter sur la relation avec le théorème Cayley Hamilton.
2. Un bloc de Jordan ($\lambda = 1$)
3. la matrice génératrice G d'un processus "série" avec n étapes (ou de Poisson absorbé en n), où $\mu = -\lambda$.

8.5 Le calcul de l'exponentielle des semigroupes : les équations de Kolmogorov

Une troisième méthode de calcul de l'exponentielle exploite la presence de la variable t , et des équations différentielles ci-dessous. Cela nous permet par exemple de calculer e^{tG} numériquement, en augmentant t à partir de $t = 0$ (cette méthode peut servir aussi pour calculer e^A pour une matrice constante A , en calculant d'abord e^{tA} et en posant en suite $t = 1$).

t:CK **Théorème 8.2** Pour tout $t \geq 0$, le semigroupe des matrices de transition $P(t)$ satisfait

1.
$$\begin{cases} P(t)' = P(t) G & (\text{équation Kolmogorov avant}) \\ P(t)' = G P(t) & (\text{équation Kolmogorov arriere ou rétrograde}) \end{cases}$$

où G est le générateur, et $P(0) = I$. Chaque'une de ces deux équations est équivalente à

$$P(t) = e^{tG}.$$

2. La transformée de Laplace $P^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} P(t) dt$ satisfait

$$sP^*(s) - I_d = GP^*(s) = P^*(s)G \Leftrightarrow P^*(s) = (sI_d - G)^{-1}, \forall s > 0.$$

tc

La dernière formule est appelé **résolvante** de G , dans la théorie des operateurs.

Dem :

$$P'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = P(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(h) - I}{h} = P(t)G$$

Remarque 8.7 Il y a deux cas qui nous interessent : celui des semigroupes stochastiques, satisfaisant $P_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$, et celui des semigroupes sous-stochastiques, satisfaisant $P_t \mathbf{1} < \mathbf{1}$ (avec G matrice sous-générateur). Le résultat de la partie 2) est aussi vrai en $s = 0$ dans le deuxième cas (et ne peut pas être vrai en $s = 0$ dans le cas contraire). Cela sera utile pour calculer la distribution et les moments de temps d'atteinte τ .

- Remarque 8.8** 1. Les équations de Kolmogorov, formulées ci-dessus dans le cas le plus simple de processus de sauts (c.-à-d. avec des espaces d'états E finis ou dénombrables, dans quel cas $P(t), G$ sont des matrices), sont valables dans un sens approprié pour tous les processus de Markov (par exemple pour les processus de Lévy, qui sont parmi les outils de modélisation les plus utiles).
2. Dans le cas dénombrable, il faudra ajouter des conditions qui assurent que les sommes, intégrales, etc., soient bien définis. Une telle condition est $\sup_{i \in I} (-G_{ii}) < +\infty$.
3. Comme les matrices $P(t) = e^{tG}$ doivent être stochastiques pour chaque t , il découle que la partie réelle des valeurs propres de G doit être nonpositive.
4. Pour le cas des espaces d'états finies, les équations différentielles de Kolmogorov pour $P(t)$ calculent la fonction exponentielle matrice e^{tG} , et donc admettent toujours des solutions explicites en fonction des valeurs/vecteurs propres de G . En plus, la fonction exponentielle de matrice est mise en œuvre numériquement dans toutes les logiciels modernes. Par contre, pour les espace d'états dénombrables, le calcul explicite de $P(t)$ devient difficile, même pour le cas le plus simple de la file $M/M/1^1$. Ils restent toujours les approches numériques, et il y en a beaucoup, comme pour témoigner sur la difficulté du problème.
5. Pendant que le calcul du semigroupe suppose la connaissance du spectre, celui de la résolvante ne le demande pas. Par conséquent, une méthode possible pour le calcul du semigroupe est de commencer par la résolvante, et ensuite l'inverser numériquement (ou analytiquement parfois, par exemple en utilisant la décomposition en fractions simples, dans le cas rationnel).

8.6 Ou sautera la sauterelle ?

Pour comprendre les déplacements d'un processus des sauts en temps continu, (par exemple pour simuler le processus), il est nécessaire de répondre à deux questions :

1. Ou on va ?
2. Quand on va ?

La première question ramène à l'étude de la **chaîne sous-jacente/discretisée** \widehat{X}_n obtenue en regardant seulement où est le processus après les moments des transitions $A_i, i = 1, 2, \dots$. Ce processus est évidemment une chaîne de Markov (et il peut être markovien, même quand le processus initial ne l'est pas).

Exercice 8.7 Soit

$$X_t = N_{1,\lambda}(t) - N_{2,\mu}(t)$$

une marche aléatoire qui saute en haut/bas with taux λ/μ . Soit A le moment du premier saut. a) Quelle est la probabilité que $X_{A^+} - X_A = 1$? b) Quelle est la probabilité $P[A \geq t | X_{A^+} - X_A = 1]$?

R : a) Supposons que $X_0 = 0$, et que, plus généralement, n types de saut sont possibles, c.-à-d.

$$X_t = \sum_{i=1}^n s_i N_{i,\lambda_i}(t)$$

1. Dans ce cas, la transformé de Laplace de $P(t)$ est explicite, et on peut l'inverser, en arrivant à des combinaisons des fonctions Bessel.

Soit $\{a_i, i = 1, \dots, n\}$ des temps exponentielles indépendantes à paramètres $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, correspondant à la première arrivée du processus de sauts de type i . Alors la variable $a = \min\{a_i, i = 1, \dots, n\}$ a une distribution exponentielle de paramètre $\lambda = \sum_i \lambda_i$, et la distribution de la variable I qui donne le type qui réalise le minimum prend la valeur j a.p.

$$\lambda_j / \sum \lambda_k. \quad (8.4)$$

Pour la file M/M/1, la chaîne discretisée a aussi une structure très simple :

Exercice 8.8 Montrez que pour la file M/M/1 : a) $\mathbb{P}\{\tilde{X}_{n+1} = j | \tilde{X}_n = i\}$, quand $i \geq 1$ est donné par $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ et $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ si $j = i \pm 1$ et par 0 autrement, et $\mathbb{P}\{\tilde{X}_{n+1} = j | \tilde{X}_n = 0\}$ est 1 si $j = 1$ et 0 autrement (plus tard nous allons généraliser cet exercice et donner une formule (8.5) pour la chaîne discretisée d'un processus des sauts en temps continu arbitraire. b) Le temps d'attente entre les transitions est exponentiel à paramètre $\lambda + \mu$ conditionnellement sur $\tilde{X}_n = i$ quand $i \geq 1$, est exponentiel à paramètre λ conditionnellement sur $\tilde{X}_n = 0$.

En conclusion, la "chaîne discretisée" de la file M/M/1 a comme matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \frac{\mu}{\mu+\lambda} & 0 & \frac{\lambda}{\mu+\lambda} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\mu}{\mu+\lambda} & 0 & \frac{\lambda}{\mu+\lambda} & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

ce qui vérifie la formule générale (8.5) ci-dessus.

Exercice 8.9 a) Soit X_t un processus des sauts à trois états. Les taux de transition à partir de 1 sont $\lambda_i, i = 2, 3$, à partir de 2 elles sont $\mu_i, i = 1, 3$, et à partir de 3 elles sont $\nu_i, i = 1, 2$, Montrez que :

$$\mathbb{P}\{\tilde{X}_{n+1} = j | \tilde{X}_n = i\} = \begin{cases} \frac{\lambda_j}{\sum_k \lambda_k}, & \text{si } i = 1, \\ \frac{\mu_j}{\sum_k \mu_k}, & \text{si } i = 2, \\ \frac{\nu_j}{\sum_k \nu_k}, & \text{si } i = 3 \end{cases}$$

b) Plus généralement, montrer que pour des processus de sauts Markoviennes en temps continu arbitraires, la chaîne discretisée prend la valeur j a.p.

$$g_{i,j} / \sum_{j \neq i} g_{i,j}. \quad (8.5)$$

8.7 Résolution des équations Chapman-Kolmogorov pour le processus de Markov à deux états

On suppose que $(X_t)_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $E = \{e_1, e_2\}$, de générateur $G = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \geq 0$. On est bien dans les conditions d'application du théorème 1-2 (E est fini). La chaîne étant simple, on peut résoudre des équations de Kolmogorov en diagonalisant G . Le polynôme caractéristique P_G de G est donné par : $P_G(\lambda) = \det(G - \lambda I_2) = \lambda(\alpha + \beta + \lambda)$. \rightarrow 1^{er} cas : $\alpha = \beta = 0$ On a $G = 0$

donc $e^{tG} = I_2$ pour tout $t \geq 0$. \rightarrow 2-ième cas : $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ La matrice G admet 2 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable. Les valeurs propres sont 0 (avec $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre associé) et $-(\alpha + \beta)$ (avec $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$ pour vecteur propre associé). En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$G = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha + \beta) \end{pmatrix}.$$

En utilisant $e^{tD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(\alpha + \beta)t} \end{pmatrix}$ on trouve :

$$P_t = e^{tG} = Pe^{tD}P^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha e^{-(\alpha + \beta)t} & \alpha - \alpha e^{-(\alpha + \beta)t} \\ \beta - \beta e^{-(\alpha + \beta)t} & \alpha + \beta e^{-(\alpha + \beta)t} \end{pmatrix}$$

(on peut remarquer que P_t est bien une matrice stochastique). En posant $\lambda = -(\alpha + \beta)$ on arrive à :

$$P_t = e^{tG} = I + \frac{e^{t\lambda} - 1}{\lambda} G \quad (8.6)$$

8.8 Résolution des équations de Chapman-Kolmogorov par la méthode de différences finies de Newton (Putzer) (*)

La formule (8.6) de la section précédente se généralise en fait pour chaque matrice finie G :

$$P_t = e^{tG} = I + \frac{e^{t\lambda_1} - 1}{\lambda_1} G + \exp(t\lambda)[0, \lambda_1, \lambda_2]G(G - \lambda_1) + \dots \exp(t\lambda)[0, \lambda_1, \dots, \lambda_j]G(G - \lambda_1)\dots(G - \lambda_{j-1})$$

où les différences finies d'une fonction $f(x)[x_1, \dots, x_k]$ sont définies par

$$f(x)[x_1] = f(x_1), \quad f(x)[x_1, \dots, x_k] = \frac{f(x)[x_1, \dots, x_{k-1}] - f(x)[x_2, \dots, x_k]}{x_1 - x_k}$$

et le nombre des termes dans la somme est égal au degré du polynôme caractéristique de G .

Exercice 8.10 Montrez que

$$\lim_{x_1 \rightarrow z, \dots, x_k \rightarrow z} f(x)[x_1, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(z)}{k!}$$

Rq : 1) La formule (8.7) est valable avec des λ_i distincts ou pas. Quand il y a confluence des certaines valeurs propres, les différences finies deviennent des dérivées. En conclusion, l'exponentielle matricielle est donné par un polynome explicite, quand les valeurs propres sont connues (par exemple pour des matrices triangulaires ou cycliques). 2) La démonstration de ce théorème superpuissant est immédiate ! Il suffit de remarquer que le polynôme dans le

côté droit de (8.7) interpole la fonction exponentielle $e^{t\lambda}$ dans les points $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n$, et que si deux fonctions f et g (l'exponentielle et le polynôme) coïncident sur "toutes les valeurs propres" d'une matrice A , alors $f(A) = g(A)$! 3) On peut écrire (8.7) aussi dans la forme :

$$e^{tG} = \sum_{i=1}^n r_i(t) \prod_{j=1}^{i-1} (G - \lambda_j)$$

où r_i satisfait

$$\begin{aligned} r'_1 &= \lambda_1 r_1, r_1(0) = 0, \\ r'_2 &= \lambda_2 r_2 + r_1, r_2(0) = 0 \\ &\dots \\ r'_n &= \lambda_n r_n + r_{n-1}, r_n(0) = 0 \end{aligned}$$

appelée formule de Putzer.

Exercice 8.11 Déduisez la distribution cumulative complémentaire de Erlang.

8.9 Résolution des équations de Chapman-Kolmogorov pour le processus de Poisson ; le calcul de l'exponentielle des matrices triangulaires

Exercice 8.12 la distribution d'Erlang pour le passage par n phases exponentielles a) Calculer la matrice $e^{tG} = \begin{pmatrix} e^{tB} & \mathbf{F}_\tau(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un réseau de n serveurs exponentiels en série identiques, avec temps de service $\text{Expo}(\lambda)$, et donc matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) En déduire la fonction de répartition du temps de passage d'un client avec distribution initiale $(1, 0, 0, \dots, 0)$ (la loi d'Erlang), en utilisant la formule $F_\tau(t) = e^{tG}(1, n+1)$.

Ind : a) On peut calculer e^{tB} par les équations différentielles de Kolmogorov en raisonnant par récurrence, ou utiliser le fait que les deux composantes de $G = \lambda T - \lambda(I - E_{n+1})$ commutent!

Considérons le processus de Poisson Markov homogène $(X_t)_{t \geq 0}$ d'intensité $\lambda \geq 0$, de

générateur $G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$ Fixons l'état initial $i = 0$ et posons $P_{0,j}(t) =$

$p_j(t)$. Les équations de Kolmogorov avant $P' = PG$ pour la première ligne sont

$$p'_j(t) = \sum_{k \neq j} p_k(t) g_{k,j} - p_j(t) \sum_{k \neq j} g_{j,k}$$

Note : En écrivant ces équations comme $p_j(t+h) = \sum_{k \neq j} p_k(t) g_{k,j} h + p_j(t)(1-h \sum_{k \neq j} g_{j,k})$ on voit que c'est encore des équations de conditionnement. Pour le processus de Poisson, ces équations sont :

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ p_j'(t) = \lambda(p_{j-1}(t) - p_j(t)) \text{ si } j \neq 0 \end{cases}$$

On sait aussi que $p_j(0) = 0$ si $j \neq 0$ et $p_0(0) = 1$. On a donc un système différentiel pour déterminer les p_j , qui peut être résolu **recursivement** : \rightarrow Pour $j = 0$:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ p_0(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{p_0(t) = e^{-\lambda t}}$$

\rightarrow Pour $j = 1$:

$$\begin{cases} p_1'(t) = \lambda(p_0(t) - p_1(t)) \\ p_1(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1'(t) + \lambda p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} \\ p_1(0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$t \mapsto \lambda t e^{-\lambda t}$ est une solution particulière de (*) et $t \mapsto C e^{-\lambda t}$ (où $C \in \mathbb{R}$) est la solution générale de $p_1'(t) + \lambda p_1(t) = 0$ donc $t \mapsto (C + \lambda t) e^{-\lambda t}$ est la solution générale de (*). De plus, on doit avoir $p_1(0) = 0$ donc $C = 0$ et on a $\underline{p_1(t) = e^{-\lambda t} \lambda t}$. \rightarrow Raisonnons alors par récurrence. Supposons que pour j dans \mathbb{N} , $p_j(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$ et déterminons p_{j+1} . On a :

$$\begin{cases} p_{j+1}'(t) = \lambda(p_j(t) - p_{j+1}(t)) \\ p_{j+1}(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{j+1}'(t) + \lambda p_{j+1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{j+1} t^j}{j!} \\ p_{j+1}(0) = 0 \end{cases} \quad (**)$$

$t \mapsto K e^{-\lambda t}$ (où $K \in \mathbb{R}$) est la solution générale de $p_{j+1}'(t) + \lambda p_{j+1}(t) = 0$ et $t \mapsto \frac{\lambda^{j+1} t^{j+1}}{(j+1)!} e^{-\lambda t}$ est une solution particulière de (**), donc $t \mapsto \left(K + \frac{\lambda^{j+1} t^{j+1}}{(j+1)!}\right) e^{-\lambda t}$ est la solution générale de (**). Or $p_{j+1}(0) = 0$ d'où $K = 0$ et on obtient : $\underline{p_{j+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{j+1}}{(j+1)!} e^{-\lambda t}}$ ce qui récupère la distribution Poisson (en éclaircissant la provenance de la terminologie "processus de Poisson"). Nous venons de redémontrer que pour un processus de Poisson $(X_t)_{t \geq 0}$ d'intensité $\lambda > 0$, la variable aléatoire X_t suit pour tout $t > 0$ une loi de Poisson de paramètre λt .

Exercice 8.13 Recalculez les probabilités de transition du processus de Poisson par la méthode des fonctions génératrices.

Remarque : 1) La solution recursive ci-dessus s'appuie sur la structure triangulaire du générateur, et peut-être aussi implémenté pour tout processus de "Poisson composé de naissance pure" (permettant la naissance de jumeaux, etc). Le calcul peut-être simplifié en commençant par la substitution $p_k(t) = e^{-\lambda_k t} P_k(t)$, où λ_k est le taux total de naissance en état k . Il s'avère que $P_j(t)$ sont des polynômes, faciles à obtenir recursivement.

Exercice 8.14 Recalculez les probabilités de transition du processus de Poisson par cette substitution.

Solution : Les équations de Kolmogorov pour le processus de Poisson deviennent après la substitution :

$$\begin{cases} P_0'(t) = 0, P_0(0) = 1 \\ P_j'(t) = \lambda P_{j-1}(t), P_j(0) = 0 \text{ si } j \neq 0 \end{cases}$$

Il suit que $P_0(t) = 1$, et intégrations successives donnent $P_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}$.

Chapitre 9

Les processus de naissance et de mort et

Les processus Markoviens de saut les plus simples sont les processus "de naissance et de mort", qui n'augmentent et ne diminuent jamais avec plus d'une unité, et qui se déplacent sur \mathbb{Z} et \mathbb{N} toujours aux voisins, "sans sauter position". La notation traditionnelle des taux de naissance (ou de croissance) est λ_i et celle des taux de mort (ou de décroissance) μ_i . La façon la plus simple de définir de processus de Markov en temps continu est à travers leurs **taux de transition**, analogues au taux λ du processus de Poisson.

Définition 9.1 On appelle processus de naissance et mort une chaîne de Markov homogène à temps continu $(X_t)_{t \geq 0}$, à valeurs dans \mathbb{N} telle que :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \forall h > 0,$$

$$P_{ij}(h) = P([X_{t+h} = j] | [X_t = i]) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h) & \text{si } j = i + 1 \\ \mu_i h + o(h) & \text{si } j = i - 1 \\ 1 - (\lambda_i + \mu_i) h + o(h) & \text{si } j = i \\ o(h) & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, le générateur d'un processus de naissance et mort de taux de naissance λ_i et de taux de mort μ_i est donné par une **matrice tridiagonale** :

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}$$

(dans le cas $i \in \mathbb{N}$ la matrice G est "semi-infinie", et dans le cas $i \in \mathbb{Z}$ elle est infinie).

• Si tous les λ_i sont nuls, on parle de processus de mort. • Si tous les μ_i sont nuls, on parle de processus de naissance.

Exemple 9.1 Le processus de Poisson d'intensité λ ($\forall i \in \mathbb{N}, \lambda_i = \lambda$).

Dans les applications on rencontre surtout le cas où $X_t \in \{0, 1, 2, \dots\}$, un exemple proéminent étant le nombre de clients qui attendent leur service à un guichet, ou dans un centre d'appels (comme ces processus sont à valeurs dans \mathbb{N} , on a forcément $\mu_0 = 0$). Un autre domaine où on utilise les processus de naissance et mort sont les **modèles de population**, qui modélisent l'effectif X_t d'une population à l'instant t . Par exemple, pour modéliser une croissance/décroissance linéaires avec (ou sans) immigration et avec (ou sans) émigration, on

utilisera : $\rightarrow \forall i \in \mathbb{N}, \lambda_i = \lambda i + a$ avec $\lambda > 0$ et $a > 0$ (processus avec immigration) ou $a = 0$ (processus sans immigration) $\rightarrow \forall i \in \mathbb{N}^*, \mu_i = \mu i + b$ avec $\mu > 0$ et $b > 0$ (processus avec émigration) ou $b = 0$ (processus sans émigration).

Exemple 9.2 Le cas des taux constants $\lambda_i = \lambda, \mu_i = \mu, \forall i \in \mathbb{Z}$ donne des marches aléatoires X_t en temps continu (analogues des marches aléatoires simples discrètes). Ces processus peuvent être décomposés comme une somme

$$X_t = N_{1,\lambda}(t) - N_{2,\mu}(t)$$

où les deux composantes sont indépendantes, ce qui implique une formule explicite de convolution pour les probabilités de transition

$$P_0[X_t = k] = \sum_{l=0}^{\infty} P[N_{1,\lambda}(t) = k + l] + P[N_{2,\mu}(t) = l]$$

Les cas $\lambda > \mu$ et $\lambda < \mu$ sont transients (avec "fuite" vers ∞ et $-\infty$, respectivement), et le cas $\lambda = \mu$ est null-recurrent, (avec "fuite" vers $\pm\infty$, et "retour").

9.1 Les files d'attente

Parmi les modèles Markoviens les plus étudiés sont les files d'attente $M(\lambda)/M(c)/s/s+K$, où s représente le nombre des serveurs, $K \in \mathbb{N}$ est le nb des places d'attente disponibles, et la lettre M (pour Markov) indique une distribution exponentielle de temps de service et entre les arrivées. Les taux de transition sont $g_{i,i+1} = \lambda_i, g_{i,i-1} = \mu_i = \min(s\mu, i\mu)$.

Le problème est le suivant : des "clients" arrivent en suivant une certaine loi de probabilité pour obtenir un "service" dont la durée est elle-même modélisée par une autre loi de probabilité. La file dispose d'un nombre $1 \leq s \leq \infty$ des "serveurs" et de K places supplémentaires d'attente (ainsi, la capacité totale du système est $s + K$). Dans cette application, la modélisation stochastique est plus aisée en temps continu. Soit $N_t \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$ le nombre total des clients dans le système (en attente ou en service) à l'instant t . Pour une file d'attente, les seules transitions possibles de N_t sont l'ajout/départ d'un client. **Notation de Kendall.** Kendall appelle un processus $N_t \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$ "file M/M/s/K" si N_t est un processus de naissance et mort, et - il y a s serveurs - la taille de la salle d'attente est de K places. - les temps A_i entre les arrivées des clients et les temps de service B_i suivent des lois exponentielles (traditionnellement, le taux d'arrivée/départ sont notés par λ, μ) et sont indépendantes, le M étant une abbreviation de Markovien. Si les temps d'arrivée sont simplement indépendantes, on remplace le M par G(énérale), et s'ils sont de type phase, on remplace le M par Ph(ase). La file d'attente M/M/1 a, en plus par rapport au processus de Poisson, aussi des "morts", le taux desquelles est traditionnellement noté par μ . Ainsi, elle est caractérisée par les taux infinitésimales $g_{i,i+1} = \lambda, g_{i,i-1} = \mu, g_0 = \lambda, g_i = \lambda + \mu$ et sa matrice génératrice est :

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple 9.3 La matrice génératrice de la file $M/M/2$ est :

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \\ \mu & -\lambda - \mu & \lambda & 0 & \\ 0 & 2\mu & -\lambda - 2\mu & \lambda & 0 \\ \vdots & 0 & 2\mu & -\lambda - 2\mu & \lambda \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple 9.4 La matrice génératrice de la file $M/M/3$ est :

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \\ \mu & -\lambda - \mu & \lambda & 0 & \\ 0 & 2\mu & -\lambda - 2\mu & \lambda & 0 \\ \vdots & 0 & 3\mu & -\lambda - 3\mu & \lambda \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Les distributions stationnaires des files d'attente sont assez faciles à calculer, mais les probabilités de transition sont (relativement) simples seulement dans les cas $s = \infty$ et $s = 1$.

Autres exemples : 1) Pour la file $M/M/1/K$ on a $\lambda_i = \lambda, i = 0, 1, \dots, K, \lambda_{K+1} = 0$. 2) Pour la file $M/M/s/K$, on a $\mu_i = i\mu, i = 1, \dots, s, \lambda_i = \lambda, i = 0, 1, \dots, s + K - 1, \lambda_{s+K} = 0$

Rémarque : Dans tous ces cas, le générateur est donné par une **matrice tridiagonale "presque" Toeplitz**, c.-à-d. avec diagonales constantes, au moins à une certaine distance des frontières.

9.2 Distribution stationnaire et comportement asymptotique

Proposition 9.1 Un processus de naissance et mort de taux de naissance $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$ et de taux de mort $\mu_i, i \in \mathbb{N}$ est irréductible si, et seulement si :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \lambda_i \neq 0 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}^*, \mu_i \neq 0.$$

Démonstration : si $\forall i \in \mathbb{N}, \lambda_i \neq 0$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mu_i \neq 0$ alors toutes les transitions sont possibles. Par contre, si l'un des réels λ_{i_0} ou μ_{i_0} est nul, une des transitions devient impossible, et on voit que la réunion des classes de communication contenant des éléments à gauche de i_0 et celle contenant des éléments à droite de i_0 ne peuvent pas communiquer. Alors, l'ensemble des classes de communication a au moins deux éléments.

La distribution stationnaire est une des caractéristiques les plus faciles à calculer des processus de Markov.

Définition 9.2 On dit qu'un vecteur $\pi = (\pi_i)_{i \in I}$ est une distribution stationnaire si, et seulement si (1) π est un vecteur de probabilité, c'est-à-dire :

$$\forall i \in I, \pi_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i \in I} \pi_i = 1$$

(2) $\forall t \geq 0, \pi = \pi P_t$.

Théorème 9.1 (admis) Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus Markovien de sauts en temps continu, homogène, de semi-groupe $P_t = e^{tG}$ "régulier" (qui saute p.s. un nb. fini des fois en chaque interval fini).

1. Pour tout $t \geq 0$, il y a équivalence entre :

- (1) $\forall t \geq 0$, $\pi = \pi P_t$ (π vecteur propre de P_t à gauche pour la valeur propre 1)
- (2) $\pi G = 0$ (π vecteur propre de G à gauche pour la valeur propre 0).

2. Si le semigroupe est aussi "mélangeant", c.-à-d. si :

$$\exists t > 0 \text{ tel que } p_{ij}(t) > 0, \forall i, j \in I$$

(ça implique la nonperiodicité et irréductibilité) $(P_t)_{t \geq 0}$, alors (3) Si π est une distribution stationnaire alors (le cas érgodique) on a : $\forall i, j \in I$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$ (4) S'il n'existe pas de distribution stationnaire alors : $\forall i, j \in I$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ij}(t) = 0$

Démonstration : 1) : $\pi G = 0 \Rightarrow \forall n \geq 1$, $\pi G^n = 0$ donc $\forall t \geq 0$ $\pi \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} G^n = 0$ d'où : $\pi e^{tG} = \pi P_t = \pi$ Réciproquement, supposons que $\forall t \geq 0$, $\pi P_t = \pi$. On a alors : $\forall t \geq 0$, $\pi P_t = \pi e^{tG} = \pi$. En dérivant par rapport à t , on obtient : $\pi G e^{tG} = 0$ et en prenant $t = 0$, on en déduit que $\pi G = 0$ d'où $\pi G = 0$. **Remarques** : 1) Pour un espace d'états fini, l'existence des solutions du système linéaire $\pi G = 0$, ou π est un vecteur des probabilités, est toujours garantie par le théorème de Perron-Frobenius. 2) Le deuxième cas ci-dessus (qui n'apparaissait pas pour les espace d'états finis) arrive toujours si la loi des grands nombres implique une "fuite" du processus vers l'infini, et aussi dans le cas des processus recurents nuls. Reciproquement, pour pour un espace d'états infini, l'existence des solutions nonnulles (cas 1. ci-dessus) est assurée si le système "ne s'enfuit pas vers ∞ ". 3) Les équations de stationarité dans la forme

$$\sum_{j \neq i} \pi_j G_{j,i} = -\pi_i G_{i,i} = \pi_i \sum_{j \neq i} G_{i,j} \quad (9.1)$$

ont l'interpretation d'une égalité entre le "flux entrant" en i et le "flux sortant" de i , où "flux" designe le taux de passage en/de i . 4) Parfois, un système plus simple "d'équilibre partiel/local/ réversible"

$$\pi_i G_{i,j} = \pi_j G_{j,i} \quad (9.2)$$

est satisfait. Ces équations ont l'interpretation d'une égalité entre le flux de i a j et celui de j a i . Evidemment, ce système implique (9.1) et donc l'équilibre global $\pi G = 0$. Le système d'équilibre local est beaucoup plus simple à résoudre (quand il admet des solutions). Pour les processus de naissance et mort par exemple, le calcul de la distribution stationnaire se réduit toujours aux équations d'équilibre local (9.2). On a une récurrence de premier ordre, avec solution explicite :

$$\pi_n \lambda_n = \pi_{n+1} \mu_{n+1} \Leftrightarrow \pi_{n+1} = \pi_n \rho_{n+1} \Leftrightarrow \pi_n = \pi_0 \prod_{i=1}^n \rho_i, \quad \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

Exercice 9.1 Calculez la distribution stationnaire du nombre de clients dans les files suivantes.

1. $M/M/1$ ($R : \pi_n = (1 - \rho)\rho^n$, $\rho < 1$)

2. (*) Recalculez la distribution stationnaire précédente par la méthode des fonctions génératrices. ($R : \pi(z) = \pi_0 \frac{\mu(z^{-1}-1)}{\mu(z^{-1}-1)\lambda(z-1)} = \pi_0 \frac{\mu}{\mu-\lambda z} = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$, car $\pi(1) = 1$).

3. $M/M/2/0$ ($R : \pi_n = \frac{\rho^n/n!}{\sum_{j=0}^2 \rho_j/j!}, n = 0, 1, 2$)

L'étude de files d'attente a commencé par le calcul d'Erlang (1907) de la probabilité de perte de la file $M/M/s/0$. En terminologie moderne, ça revient au calcul de la probabilité stationnaire $\pi(s)$ de cette file.

Exercice 9.2 Calculez la distribution stationnaire du nombre de clients dans les files suivantes.

1. $M/M/s/0$ ($R : \pi_n = \pi_0 \frac{\rho^n}{n!} = \frac{\rho^n/n!}{\sum_j \rho_j/j!}, n = 0, \dots, s$)

2. $M/M/s/\infty$ ($R : \pi_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}, \rho > 0$)

Un mécanisme de stabilisation des files instables est le rejet des clients. Une méthode possible est le rejet aléatoire, avec une probabilité b_n dépendant du nombre n des clients présents.

Exercice 9.3 Calculez la distribution stationnaire du nombre de clients dans la file $M/M/1/\infty$ avec rejet ("balking"), avec probabilité d'entrer $a_n = 1 - b_n = \frac{1}{n+1}$ (*) Montrez que cette file est stable si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Exercice 9.4 (*) Calculez la distribution stationnaire des files $G/M/1$ et $M/G/1$ en temps discret, par la méthode des fonctions génératrices.

Notes : 1) Rémarques : Il est souvent plus convenable d'utiliser la "forme opératoire" du générateur :

$$(Gv)(x) = \lambda_i(v(x+1) - v(x)) + \mu_i(v(x-1) - v(x))$$

2) La file $M/M/1$ est "stable" (c.-à-d. a une distribution stationnaire de masse finie) ssi $\rho < 1 \Leftrightarrow EZ_i = \lambda - \mu < 0$. Cette condition est déjà évidente pour la chaîne en temps discret $X_n = \sum_1^n Z_i$, où $Z_i = \pm 1$ avec probabilités λ, μ tq $\lambda + \mu = 1$, et avec l'incrément Z_i "censuré", i.e obligé d'être 0 au lieu de -1 , quand $X_n = 0$. Le manque d'ergodicité est assurée si $\lambda > \mu$, par la loi des grandes nb. 3) En généralisant, une marche $X_n = \sum Z_i$ en temps discret contrainte de rester en \mathbb{N} sera stable ssi $EZ_i = \sum kp_k < 0$, et la condition analogue $\sum k\lambda_k < 0$ assure la stabilité en temps continu. 4) La file $M/M/\infty$ est toujours stable.

Exercice 9.5 Soit X, X_q le nombre stationnaires de clients dans une file $M/M/1$, et le nombre de clients qui attendent d'être servis dans la file. Calculez $EX, EX_q, \text{Var } X$ et $\text{Var } X_q$.

9.3 Mesures de performance des files d'attente

Quelques variables aléatoires intéressantes pour les files d'attente qu'on veut étudier sont :

1. La **longueur de la file d'attente** $N_q(t)$ (des "clients" qui n'ont pas encore commencé leur service) à l'instant t
2. le **nombre total des clients dans le système** $N(t)$ (en attente ou en service) à l'instant t . Dans le cas Markovien, ces deux variables sont des processus de naissance et mort.
3. La longueur du **temps d'attente dans la file** $W_q(t)$ (avant de commencer le service).

4. La **longueur totale du temps dans le système** $W(t)$ (attente dans la file + service).

Pour ces quantités et aussi d'autres, on s'intéresse en :

1. la distribution stationnaire, trouvé par "les équations d'équilibre" $\pi G = 0$.
2. les distributions "transientes" au temps t , trouvé par "les équations de semigroupe de Kolmogorov"
3. mesures de performance **nonstationnaires**, consistants des diverses "coûts" dépendant de l'état initial x , jusqu'aux certains temps d'arrêt T importants, comme :
 - (a) le temps de premier passage par 0, défini par $T_0 = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq 0\}$. Par exemple, on s'intéresse en le "**coût totale de vidage**" $c(x) = E_x \int_0^{T_0} X_s ds$, et en le **coût de vidage discompté** $c_\delta(x) = E_x \int_0^{T_0} e^{-\delta s} X_s ds$. Pour $x = 1$, le temps T_0 s'appelle periode occupé ("busy period").
 - (b) le temps de premier passage par la capacité maximale K de la salle d'attente, défini par $T_K = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq K\}$.

Ces quantités sont trouvé par "les équations de Dirichlet/Feynman-Kac" : prix-final (homogène), coût cumulative (non homogène), coût cumulative discompté, et d'autres...

Les distributions transientes sont assez difficiles a trouver (sauf par des approches numériques). Quand le but est d'obtenir une compréhension qualitative (l'influence des diverses paramètres) des phénomènes d'attente, les objets principaux d'étude sont les mesures de performance stationnaires et nonstationnaires.

Exercice 9.6 Calculez la fonction de survie $\bar{F}(x) = \bar{F}_W(x)$ (probabilité que la variable soit plus grande que x) **stationnaire** du temps total de service et la fonction de survie $\bar{F}_q(x) = \bar{F}_{W_q}(x)$ du temps d'attente dans la file, ainsi que leurs transformées de Laplace et les délais moyens (espérances) dans les files : a) $M/M/1$ ($\bar{F}(x) = e^{(\lambda-\mu)x}$, $\bar{F}_q(x) = \rho e^{(\lambda-\mu)x}$, $EW = \frac{1}{\mu-\lambda}$, $EW_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$) b) $M/M/c$ ($\bar{F}_q(x) = \pi_c \frac{1}{1-\rho/c} e^{(\lambda-c\mu)x}$)

Solution : a)

$$\begin{aligned} \bar{F}_q(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \bar{E}_k^{(\mu)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k e^{-\mu x} \sum_{0 \leq i \leq k-1} \frac{(\mu x)^i}{i!} \\ &= e^{-\mu x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^i}{i!} \sum_{k \geq i+1} \pi_k = \rho e^{-\mu x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!} = \rho e^{(\lambda-\mu)x} \end{aligned}$$

b) Soit $\mu_c := c\mu$, $\rho_c := \frac{\lambda}{\mu_c}$.

$$\begin{aligned} \bar{F}_q(x) &= \sum_{l=c}^{\infty} \pi_l \bar{E}_{l-c+1}^{(\mu_c)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{c+k} e^{-\mu_c x} \sum_{0 \leq i \leq k} \frac{(\mu_c x)^i}{i!} \\ &= e^{-\mu_c x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu_c x)^i}{i!} \sum_{k \geq i} \pi_c \rho_c^k = \pi_c \frac{1}{1-\rho_c} e^{-\mu_c x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!} = \pi_c \frac{1}{1-\rho/c} e^{(\lambda-\mu_c)x} \end{aligned}$$

Notes : Ces calculs sont basés sur la disponibilité des distributions jointes $P_S[N(t) = k, W_q \in [x, x + dx]] = \lambda(1-\rho) e^{-\mu x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}$. 2) Clairement, les attentes dans la file $M/M/c$ sont distribuées effectivement comme dans une file $M/M/1$ avec paramètre μ_c , qui est active seulement une proportion π_c de temps.

Remarque 9.1 On peut vérifier dans ces exemples les égalités

$$\bar{N} = \lambda \bar{W}, \bar{N}_q = \lambda \bar{W}_q, E[\text{nb. des serveurs utilisés}] = \lambda E[S] = \rho$$

Ces sont des cas particuliers de la **loi de Little** (qui est valable aussi pour les files avec clients refusés, juste en remplaçant λ par $\lambda_{\text{accepté}}$).

9.4 Problèmes de premier passage pour la file M/M/1

ex:MM1

Exemple 9.5 Quelques problèmes de premier passage pour la file M/M/1.

1. **"Coût de congestion stationnaire"** de la file M/M/1. Calculez le coût de congestion moyen stationnaire $\gamma = E_{\text{ss}} X_t$ de la file M/M/1.
2. **"Coût de vidage espéré"** la file M/M/1. Obtenez et résolvez l'équation de récurrence pour le coût de vidage $c(x) = E_x \int_0^T X_s ds$, ou $T = T_0$. Montrez que

$$c(x) = t(x) \left(\frac{x+1}{2} + \gamma \right)$$

ou $\gamma = E_{\text{ss}} X_t$ est le coût moyen stationnaire de la file M/M/1. Donnez une interprétation probabiliste de la partie $w(x) = t(x) \frac{x+1}{2} = c(x) - \gamma t(x)$.

3. Obtenez et résolvez l'équation de récurrence pour le **coût de vidage discompté**

$$c_\delta(x) = E_x \int_0^T e^{-\delta s} X_s ds$$

Trouvez aussi la limite $b(x)$ ("biais") de la dernière fonction quand $\delta \rightarrow 0$. Est-ce que la limite commute avec l'espérance ?

4. Calculez pour la file M/M/1 le "coût relatif" au coût stationnaire $c_r(x)$, c.-à-d. la solution de l'équation de Poisson

$$\mathcal{G}c_r(x) + (x - \gamma) = 0 \quad \forall x, \quad c_r(0) = 0, \quad c_r(x) \text{ ("tempérée à } \infty \text{")}$$

et comparez avec la limite précédente $b(x)$.

5. Calculez la **mesure d'occupation**

$$m_x(k) = E_x \int_0^{T_0} 1_{\{X_t=k\}} dt$$

Indication : Obtenez d'abord la fonction génératrice $M(x) = \sum_k z^k m_x(k) = E_x \int_0^{T_0} z^{X_t} dt$.

6. Calculez la **mesure d'occupation relative** $m_{r,x}(k)$, en commençant par la solution de l'équation de Poisson

$$\mathcal{G}M_r(x) + (z^x - E_{\text{ss}} z^{X_t}) = 0 \quad \forall x, \quad M_r(0) = 0, \quad M_r(x) \text{ ("tempérée à } \infty \text{")}$$

et comparez avec le résultat précédent.

7. Calculez, en conditionnant après un petit intervalle dt , ou après le temps de la première arrivée en 0, le **"coût total discompté"** $v_\delta(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\delta s} X_s ds$, et la limite $\lim_{\delta \rightarrow 0} v_\delta(x)$.

Solution : Soit $(\mathcal{G}p)_x = \lambda(p_{x+1} - p_x) + \mu(p_{x-1} - p_x)$ En conditionnant apres un petit intervalle dt , on trouve :

1. En utilisant $\gamma = \sum_i i(1 - \rho)\rho^i$ où $\rho = \lambda/\mu$, on trouve :

$$\gamma = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

2. Pour $c(x) = E_x[\int_0^T X(t)dt]$ (coût totale de stockage) on trouve

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}c)(x) + x &= 0 \\ c(0) &= 0 \\ c(x) &\text{ accroit non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{G}x = \lambda - \mu$ et $\mathcal{G}x^2 = 2x(\lambda - \mu) + \lambda + \mu$, on trouve par la méthode des coefficients indeterminés que la solution est $c(x) = \frac{x^2}{2(\mu - \lambda)} + \frac{x(\mu + \lambda)}{2(\mu - \lambda)^2}$. On trouve que $c(x) = c_r(x) + \gamma t(x)$. **Interpretation :** La première partie, $c_r(x) = t(x)(\frac{x+1}{2})$ est la solution "fluide", qui utilise precisement la moyenne arithmetique des valeurs $(x, x - 1, \dots, 1)$, comme si avant le vidage on aurait visité seulement ces valeurs, pour des durées de temps égaux. La deuxième partie suggère un "remplacement de la valeur moyenne a long terme 0 ("vue de loin") dans la solution fluide par la valeur moyenne réelle a long terme γ .

3. Pour $c_\delta(x) = E_x \int_0^T e^{-\delta s} X_s ds$ on trouve

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}c)(x) - \delta c + x &= 0 \\ c(0) &= 0 \\ c(x) &\text{ accroit non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

avec la solution $c_\delta(x) = \frac{x}{\delta} + \frac{\lambda - \mu}{\delta^2}(1 - z^x)$, ou $z = E_1 e^{-\delta T_0}$. Pour la limite, on utilise $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1-z}{\delta} = \frac{1}{\mu - \lambda}$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1-z^i}{\delta} = \frac{i}{\mu - \lambda}$. Alors

$$\begin{aligned} b(x) = \lim c_\delta(x) &= \frac{x + (\lambda - \mu) \frac{1-z}{\delta} \frac{1-z^x}{1-z}}{\delta} \\ &\approx \frac{\sum_{i=0}^{x-1} (1 - z^i)}{\delta} = \frac{x(x-1)}{2(\mu - \lambda)} \end{aligned}$$

4. Pour $v_\delta(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\delta s} X_s ds$ on trouve

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}v)(x) - \delta v(x) + x &= 0 \\ v(0) &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} v(1) \\ v(x) &\text{ accroit non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Tenant compte de $v_\delta(x) = c_\delta(x) + z^x v(0)$, on trouve que $v(0) = \frac{\lambda(1-z)}{\delta^2}$ et finalement

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{x}{\delta} + \frac{\lambda - \mu}{\delta^2} + z^x \frac{\mu - \lambda z}{\delta^2} = \frac{x}{\delta} + \frac{\lambda - \mu}{\delta^2} + \frac{z^{(x+1)}}{\delta(1-z)} \\ &= \frac{x}{\delta} + \frac{\lambda - \mu}{\delta^2} + z^x \frac{\mu - \lambda z}{\delta^2} = \delta^{-1} \left(\sum_{i=1}^x (1 - z^i) - 1 \right) + \frac{\lambda - \mu}{\delta^2} + \frac{1}{\delta(1-z)} \\ &= \delta^{-1} \left(\sum_{i=1}^x (1 - z^i) \right) + \frac{\lambda - \mu}{\delta^2} + \frac{\delta z}{\delta^2(1-z)} \\ &= w(x) ??? \end{aligned}$$

5. Comme en 1a), en utilisant aussi l'équation "de continuation" en 0 $\lambda c_r(1) = \gamma$, on trouve $c_r(x) = \frac{x(x+1)}{2(\mu-\lambda)}$. Ainsi, $\boxed{c_r(x) = b(x+1)}$ et on trouve aussi $\boxed{c_r(x) = c(x) - \gamma t(x)}$ (on peut calculer γ plus directement, en partant de propriétés de $c_r(x)$, comme le minimum a $x = -1/2$???)

6. Pour $M(x) = E_x \int_0^T z^{X_s} ds, z \leq 1$ on trouve :

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}M)(x) + z^x &= 0 \\ mu(0) &= 0 \\ M(x) &\text{ accroit non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{G}z^x = z^x(\lambda(z-1) + \mu(z^{-1}-1)) := z^x \kappa(z)$ où $\kappa(z) := (\lambda(z-1) + \mu(z^{-1}-1)) = (\mu z^{-1} - \lambda)(1-z) = z^{-1}(\mu - \lambda z)(1-z)$, on trouve que :

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{1 - z^x}{\kappa(z)} = \frac{z - z^{x+1}}{(\mu - \lambda z)(1-z)} = \frac{z - z^{x+1}}{\mu - \lambda} \left(\frac{1}{1-z} - \frac{\lambda}{\mu - \lambda z} \right) \\ &= \frac{z - z^{x+1}}{\mu - \lambda} \left(\frac{1}{1-z} - \frac{\rho}{1-\rho z} \right) = \frac{z - z^{x+1}}{\mu - \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} z^k (1 - \rho^{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^x z^k \frac{1 - \rho^k}{\mu - \lambda} + \sum_{k=x+1}^{\infty} z^k \frac{\rho^{k-x} - \rho^k}{\mu - \lambda} \end{aligned}$$

En conclusion, en inversant la transformé on voit que la mesure d'occupation est croissante et approximativement uniforme $m_x(k) \approx \frac{1-\rho^k}{\mu-\lambda}$ sur $\{1, x\}$, et la différence entre une géométrique déplacé en $x+1$ et une géométrique (donc approximativement 0) sur $\{x+1, \infty\}$. On a obtenu donc ici et un raffinement exact de l'approximation fluide!

Exercice 9.7 Repetez les questions de l'exemple 9.5 pour la file $M/M/\infty$.

Exercice 9.8 Repetez les questions de l'exemple 9.5 pour une file Brownien $B_{\mu, \sigma^2}(t)$ (directement, ou en choisissant des paramètres $\lambda, \mu \rightarrow \frac{1}{2}$ tel que la file $M/M/1$ approxime un mouvement Brownien).

Exercice 9.9 Repetez les questions de l'exemple 9.5 pour un réseau des deux files $M/M/1$ en tandem.

Le temps d'attente offert On peut obtenir une formule générale pour le "temps d'attente offert (travail qui reste) stationnaire" $W(t)$ dans la file $M/G/1$ ($W(t)$ est un processus de Lévy réfléchi). On obtient la fameuse formule de Benes-Pollaczek-Khinchin, que nous verrons aussi dans le contexte de l'actuariat.

9.5 Les formules d'Erlang A,B,C (*)

Le premier resultat resultat d'interet pratique dans la theorie des files d'attente est due a **Erlang** (1921), qui a calcule la probabilité de perte (que les nouveaux arrivés ne trouvent pas de place) pour la file M/M/s/0.

Exercice 9.10 Calculez la distribution stationnaire du nombre de clients dans les files suivantes. En particulier, obtenez la probabilité $\alpha := P[W_q > 0]$ qu'une nouvelle arrivée doit attendre (c.-à-d. que le système n'a pas des serveurs libres), comme fonction de "l'intensité du trafic offert" $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Trouvez aussi le nombre moyen de clients en attente et dans la file.

a) M/M/s/0 b) M/M/s c) M/M/s/K

Solutions : a) M/M/c/0.

$$B(c, \rho) := \pi_c = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{n=0}^c \frac{\rho^n}{n!}}$$

Cette "probabilité de perte" obtenue par Erlang(1921), est appelée la formule Erlang-B. b) M/M/c.

$$\pi_n = \begin{cases} \pi_c \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c}, & n \geq c \\ \pi_0 \frac{\rho^n}{n!}, & n \leq c, \end{cases}$$

où $\pi_0^{-1} = \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{1}{1-\rho/c} \sim e^\rho$ pour grand c , et "l'intensité du trafic offert per serveur" satisfait $\rho_c := \frac{\rho}{c} \leq 1$. Pour $n \leq c, c \rightarrow \infty, \pi_n \sim e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}$, c.-à-d. le nb. des clients=nb. des serveurs utilisés est approximativement Poisson !

$$\alpha = C(c, \rho) := \frac{\frac{\rho^c}{c!} \frac{1}{1-\rho/c}}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{1}{1-\rho/c}} = \frac{\frac{\rho^c}{(c-1)!} \frac{1}{c-\rho}}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{(c-1)!} \frac{1}{c-\rho}} = \frac{1}{1 + (1 - \rho/c)B(c-1, \rho)^{-1}}$$

La "probabilité d'attendre" α est appelée la formule Erlang-C, et elle sert de "base" dans d'autres formules. Par exemple,

$$\begin{aligned} EN_q &= C(c, \rho) \frac{\rho}{c - \rho} \\ EN &= \rho + C(c, \rho) \frac{\rho}{c - \rho} \end{aligned}$$

et le temps moyen d'attente est $EW_q = C(c, \rho) \frac{\mu^{-1}}{c-\rho}$ (par la formule de Little).

Exercice 9.11 a) Quelles sont les limites $\lim_{\rho \rightarrow 0} B(c, \rho), \lim_{\rho \rightarrow \infty} B(c, \rho)$ quand c est fixe ?
b) Déterminez la limite de $B(c, \rho = \psi c)$ quand $c \rightarrow \infty$ et ψ est fixe, dans les cas $\psi < 1 (c > \rho), \psi > 1 (c < \rho)$. c) Déterminez la limite de $B(c, \rho)$ et l'approximation asymptotique de $\alpha = P[W > 0]$ quand $\rho = c - \beta\sqrt{c}$, avec β fixe.

Sol : b) Par l'approximation normale,

$$B(c, \rho) = \frac{P[P_\rho = c]}{P[P_\rho \leq c]} \sim \frac{P\left[N \in \left[\frac{c-.5-\rho}{\sqrt{\rho}}, \frac{c+.5-\rho}{\sqrt{\rho}}\right]\right]}{P\left[N \leq \frac{c+.5-\rho}{\sqrt{\rho}}\right]} = \frac{\phi\left(\frac{c-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)}{\sqrt{\rho}\Phi\left(\frac{c-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)}$$

Pour $\frac{c-\rho}{\sqrt{\rho}} = \beta$, $\psi < 1$, $\psi > 1$, on trouve respectivement

$$B(c, \rho) \sim \begin{cases} \frac{\phi(\beta)}{\sqrt{\rho} \Phi(\beta)} \\ \frac{\phi(\infty)}{\sqrt{\rho} \Phi(\infty)} = \frac{0}{\infty \times 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\phi(x)}{-x \Phi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x \Phi(x)} = 1 \end{cases}$$

c) par l'approximation normale,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{1 + (1 - \rho/c)B(c-1, \rho)^{-1}} \\ &\sim \frac{1}{1 + \frac{\beta \Phi(\beta) \sqrt{c}}{\phi(\beta)}} = \frac{1}{1 + \beta \frac{\Phi(\beta)}{\phi(\beta)}} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Exercice 9.12 Montrez que $B(c, \rho)^{-1} = \rho^{-c-1} e^{\rho} \bar{\gamma}(s+1, \rho)$ où $\bar{\gamma}(s+1, \rho) = \int_{\rho}^{\infty} u^s e^{-u} du$. Reobtenez la limite de $B(c, \rho)$ quand $c \rightarrow \infty$ et $\rho = c - \beta\sqrt{c}$ avec β fixe, par la méthode d'approximation de Laplace.

La question cruciale pour une file est le choix du nb des serveurs c qui seront affectés. Pour stabilité, dans l'absence des abandons, il est nécessaire que $\rho \leq c$. Pour $\beta, \epsilon = 1 - \psi$ fixes, les "staffing rules"

$$c = \begin{cases} \rho + c\epsilon \\ \rho - c\epsilon (\text{possible dans la presence des abandons}) \\ \rho + \sqrt{\rho}\beta \end{cases} \quad (9.4)$$

sont appelés respectivement "QD" (Quality Driven), "ED" (Efficiency Driven) et "QED" (Quality and Efficiency Driven). Dans le premier regime, le nb. des serveurs utilisés S est asymptotiquement Poisson avec moyenne ρ (avec une proportion $1 - \frac{\rho}{c} = \beta$ des serveurs nonutilisés); dans le dernier, la file est bien approximé par une diffusion affine OU en mode nonsaturé et, par une diffusion avec tendance constante en mode saturé (essentiellement, on remplace la distribution Poisson par son approximation normale). Cela nous permet dans ce regime de quantifier approximativement la relation entre le "staffing" paramètre β est la probabilité d'avoir à attendre

$$\alpha = P_S[W > 0] = P[S \geq c] = P\left[\frac{S - \rho}{\rho} \geq \beta\right] = \bar{\Phi}(\beta),$$

dans l'absence des abandons. Cette relation a été peaufiné à (9.3) par Halfin et Whitt (1981). Recemment, Garnett & al (2002) ont fourni une généralisation (9.5) tenant compte des abandons.

Exercice 9.13 Calculez la distribution stationnaire du nombre de clients dans la file avec abandon exponentiel Erlang A (ou $M/M/c/+M$).

Solution : Soit $\mu_c = c\mu$. En utilisant les taux de départ $\mu_{c+j} = \mu_c + j\theta$, $j = 1, 2, \dots$, on obtient

$$\pi_{c+k} = \pi_c \prod_{i=1}^k \frac{\lambda}{\mu_c + j\theta} = \pi_0 \frac{\rho^c}{c!} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda}{\mu_c + j\theta}$$

avec la constante de normalization

$$\pi_0^{-1} = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda/\theta}{\mu_c/\theta + j} = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^c}{c!} {}_1F_1 \left(\left(\begin{matrix} 1 \\ \mu_c/\theta + 1 \end{matrix} \right), \frac{\lambda}{\theta} \right)$$

étant une serie hypergeometrique. Pour le calcul, on peut profiter de l'identité

$${}_1F_1 \left(\left(\begin{matrix} 1 \\ a + 1 \end{matrix} \right), x \right) = ae^x x^{-a} \gamma(a, x)$$

où $\gamma(a, x)$ est la fonction γ incomplète. **Note :** La relation asymptotique en regime QED obtenue par Garnett et al, et généralisée plus tard pour la file M/M/c+G par Mandelbaum et Zeltyn est :

$$\alpha = \left[1 + \sqrt{\theta/\mu} \frac{h(\beta/\sqrt{\theta/\mu})}{h(-\beta)} \right]^{-1} \quad (9.5)$$

Comme la formule exacte est déjà assez compliquée pour la file M/M/c+M, il devient intéressant d'utiliser l'approximation de diffusion pour la file M/M/c+G, et d'utiliser la distribution stationnaire de la limite (Garnett). Mais, la méthode d'approximation de Laplace reste compétitive (Mandelbaum et Zeltyn).

Exercice 9.14 Calculez la distribution stationnaire du nombre de clients dans une file avec service "bulk" de maximum b clients.

Exercice 9.15 a) Formulez les équations d'équilibre pour la distribution stationnaire du nombre de clients en attente dans une file $M(\lambda_1)/M(\lambda_{-1})/1$, où il y aussi des arrivées des couples, avec taux λ_2 . b) Donner la condition de stabilité. c) (*) Résolvez les équations d'équilibre.

Rappelons que la distribution stationnaire du nombre de clients dans la file avec abandon exponentiel Erlang A (ou M/M/c/+M) est :

$$\pi_{c+k} = \pi_c \prod_{i=1}^k \frac{\lambda}{\mu_c + j\theta} = \pi_0 \frac{\rho^c}{c!} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda}{\mu_c + j\theta}, k = 1, \dots,$$

avec la constante de normalization

$$\pi_0^{-1} = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda/\theta}{\mu_c/\theta + j} = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^c}{c!} {}_1F_1 \left(\left(\begin{matrix} 1 \\ \mu_c/\theta + 1 \end{matrix} \right), \frac{\lambda}{\theta} \right)$$

où

$${}_1F_1 \left(\left(\begin{matrix} 1 \\ a + 1 \end{matrix} \right), x \right) = ae^x x^{-a} \gamma(a, x)$$

Les probabilités d'être servi $P_j(S_r)$ satisfont des équations harmoniques faciles à résoudre :

$$P_j[Src] = \frac{\mu_c + j\theta}{\mu_c + (j+1)\theta}, P_{j-1}[Src] = \dots = \frac{\mu_c}{\mu_c + (j+1)\theta}, \quad j \geq 1.$$

Les probabilités d'abandon sont $P_j(Ab) = 1 - P_j(S_r) = \frac{(j+1)\theta}{\mu_c + (j+1)\theta}, j \geq 0$. Par contre, la fonction de distribution complémentaire $\bar{F}(x)$ stationnaire du temps d'attente V est plus difficile. En regime "saturé", nous avons toujours une file avec taux de service $\mu_c := c\mu$, mais la distribution des temps $T_{k,k-1}$ auxquelles le nombre des clients initiaux a changé à $k - 1$ est maintenant exponentielle avec paramètre $\mu_c + k\theta$. En denotant toujours par \bar{E}_k la distribution complémentaire du temps de vidage conditionné par k clients en attente, nous avons toujours :

$$\bar{F}_q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{c+k} \bar{E}_k(x)$$

9.6 Chaînes et processus a espace d'états infini

Note : Dans le cas des processus a espace d'états dénombrable, c'est possible a priori qu'il y'ait des éléments e_i de E tel que $g_{ii} = -\sum_{j \neq i} g_{i,j} = -\infty$; un tel état e_i est dit instantané (parce-que, comme on a vue, $g_i = -g_{ii}$ est precisement le taux du temps de sortie exponentiel $T^{(i)}$, et alors $g_{ii} = -\infty$ entraîne $T^{(i)} = 0$). L'interet principal en les chaînes avec espace d'etats infini est dans le cas d'une seule classe de communication. Pour les chaînes irréductible avec espace d'etats fini, tous les états sont récurrents. Par contre, pour les chaînes infinis, la communication des états ne suffit pas (elle peut encore cacher des comportements diverses), et il convient d'adopter une nouvelle classification des etats (plus fine).

9.7 Récurrence des chaînes à espace d'états denombable

Pour les chaînes avec espace d'etats fini qui communique tous, toutes les états sont récurrents. Par contre, pour les chaînes infinis, la communication des états peut toujours cacher des comportements diverses, et il convien d'adopter une nouvelle classification des etats (plus fine). Pour les chaînes avec espace d'états discret (fini où dénombrable), posons

$$f_{i,j} = \mathbb{P}_i\{\exists t \geq 1 : X_t = j\}$$

On peut vérifier que pour les chaînes avec espace d'etats fini qui communique tous, on a $f_{i,j} = 1, \forall i, j$.

Définition 9.3 Soit e_i dans E . L'état e_i est dit récurrent si, et seulement si : $f_{i,i} = 1$ Dans le cas contraire, e_i est dit transient (ou transitoire)². Pour les états récurrents, on pose T_i pour le temps du premier retour en i ; on distingue encore entre états récurrents positifs, pour les quels $E_i T_i < \infty$, et états nul-récurrents, pour les quels $E_i T_i = \infty$

Autrement dit : e_i est récurrent si, et seulement si : en partant de e_i , on est (presque) sûr d'y revenir en un temps fini (et donc par conséquent un nombre infini de fois); et il est récurrent positif ssi en plus l'espace d'états du temps du premier retour est fini.

Remarque 9.2 La récurrence et la transience ne dépendent que de la classe. On parle alors des classes récurrentes ou transitoires.

2. Pour un espace d'états continu, on etudie plutot la récurrence/transience des ensembles.

Théorème 9.2 Dans le cas récurrent positif, on a (comme dans le cas d'espace d'états fini) pour les chaînes en temps discret

$$\pi(i) = \frac{1}{ET_i}$$

où T_i est le temps total de retour au état i , et pour les processus en temps continu

$$\pi(i) = \frac{1}{1 + ER_i}$$

où R_i est le temps de retour au état i , en partant du moment qu'on le quitte. Par contre, dans le cas récurrent nul, il n'y a pas de distribution stationnaire, et la distribution limite, si elle existe, est identiquement 0.

Rapellons qu'un état i est appelé transient ssi sa probabilité de retour P_i satisfait $P_i < 1$, ou si l'espérance du nb. des visites dans ce point (qui a une distribution geometrique) satisfait $N_i = 1/(1 - P_i) < \infty$. Dans le cas contraire, état est appelé récurrent. Pour la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} , il est facile de calculer $P = 2 \min(p, q)$; en conclusion, il y a récurrence ssi $p = q$. On verifie facilement que le temps espéré de retour est ∞ (ce cas peut apparaitre seulement sur les espace d'états infinis, et s'appelle nul recurrent). Dans le cas, appelé récurrent positif, des marches récurrentes avec temps espérés de retour $E_i < \infty$, on peut vérifier que la distribution stationnaire est $\pi_i = E_i^{-1}$. Pour la marche simple, on peut aussi calculer N par la décomposition

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} P[S_{2k} = 0] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} (pq)^k = 1/(1 - 4pq)^{1/2} = |2p - 1|^{-1} = |p - q|^{-1}.$$

Le resultat est obtenu en verifiant le quotient des termes consecutifs dans la serie ci-dessus; on aperçoit alors qu'on a a faire avec la serie hypergeometrique ${}_1F_0[-^{1/2}; -4pq] = \frac{1}{(1-z)^{1/2}}$ (ce genre des sommes ont des formules explicites, qu'on peut decouvrir facilement avec un logiciel symbolique, assez souvent)³. **Rm** : La dernière expression est valable aussi pour la marche paresseuse avec $p + q < 1$.

9.8 Réseaux de Jackson

Dans le cas multidimensionnel, les distributions stationnaires sont très difficiles a calculer, avec l'exception remarquable des réseaux de Jackson, qui ont des distributions stationnaires produits $\prod_{k=1}^K (1 - \rho_k) \rho_k^{n_k}$ où $\rho_k = \frac{a_k}{\mu_k}$, et a_k sont les flots d'entrée moyens, déterminés par l'égalité des flots d'entree et de sortie – voir <http://daniel.flipo.free.fr/cours/ffa.pdf> pour une introduction.

Exercice 9.16 Calculer la distribution stationnaire d'un tandem défini par les paramètres $\lambda_2 = 0$, $P = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On peut aussi utiliser la representation $P_k = Coef(0, Ez^{S_k})$. On trouve $N = \sum_{k=0}^{\infty} Coef(0, Ez^{S_k}) = Coef(0, \sum_{k=0}^{\infty} (pz + qz^{-1})^k) = Coef(0, \frac{z}{z - pz^2 - q}) = Coef(0, \frac{1}{p-q} (\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-pz/q})) = \dots$, ou l'inversion de la transformée de Fourier. Cette méthode aboutisse aussi en deux dimensions, en ramenant a des intégrales elliptiques

Sol : L'égalité des flots d'entrée et de sortie donne

$$a_2 = pa_1, a_1 = \lambda_1 + a_2, a_1 = \frac{\lambda_1}{1-p}, a_2 = \frac{\lambda_1 p}{1-p}$$

ça explose pour $p = 1$, car dans ce cas aucun client ne part pas.

9.9 Les probabilités transitoires des processus de naissance et mort (*)

Le calcul de la distribution stationnaire des processus de naissance et mort de générateur

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & \vdots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \mu_2 & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

est très simple, en utilisant le système d'équilibre local :

$$\pi_n \lambda_n = \pi_{n+1} \mu_{n+1} \Leftrightarrow \pi_{n+1} = \pi_n \rho_{n+1} \Leftrightarrow \pi_n = \pi_0 \prod_{i=1}^n \rho_i$$

Par contre, les probabilités transitoires sont déjà assez compliquées à obtenir analytiquement même dans le cas le plus simple de la file M/M/1 (la marche aléatoire simple en temps continu sur \mathbb{N}), pour la quelle ils impliquent des fonctions de Bessel. On peut quand même obtenir facilement les transformées de Laplace des probabilités transitoires. Illustrons maintenant le calcul des transformées de Laplace, à partir des équations de Chapman-Kolmogorov. Soit $p_j(t) := P_{0,j}(t)$ les probabilités transitoires en partant de l'état initial $i = 0$, et soit $p_j := p_j^*(s), j = 0, 1, 2, \dots$ leurs transformées de Laplace. Les équations de Kolmogorov $P' = PG$ pour la première ligne sont

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), & p_0(0) &= 1 \\ p_j'(t) &= \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t), & p_j(0) &= 0, j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Les transformées de Laplace $p_j^*(s)$ satisfont une récurrence **de deuxième ordre** :

$$\begin{aligned} \lambda_{j-1} p_{j-1}^* - (s + \lambda_j + \mu_j) p_j^* + \mu_{j+1} p_{j+1}^* &= 0, & j &= 1, 2, \dots \\ \mu_1 p_1^* - p_0^* (s + \lambda_0) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

La résolution des récurrences de deuxième ordre (même avec coefficients non-constants) est toujours possible en itérant. On reorganise la récurrence comme : "désiré" + "reporté" = "connu", en l'occurrence : $p_j^*(s + \lambda_j + \mu_j - \mu_{j+1} \frac{p_{j+1}^*}{p_j^*}) = \lambda_{j-1} p_{j-1}^* \Leftrightarrow \frac{p_j^*}{p_{j-1}^*} = \frac{\lambda_{j-1}}{s + \lambda_j + \mu_j - \mu_{j+1} \frac{p_{j+1}^*}{p_j^*}}$. On arrive ainsi au système :

$$\begin{aligned} p_0^* &= \frac{1}{s + \lambda_0 - \mu_1 \frac{p_1^*}{p_0^*}} \\ \frac{p_j^*}{p_{j-1}^*} &= \frac{\lambda_{j-1}}{s + \lambda_j + \mu_j - \mu_{j+1} \frac{p_{j+1}^*}{p_j^*}}, & j &= 1, \dots, \end{aligned}$$

En itérant ces récurrences, et en posant $\sigma_j = \lambda_j + \mu_j, j = 0, \dots, \gamma_j = \lambda_{j-1}\mu_j, j = 1, \dots, \gamma_0 = 1$, on obtient une **fraction continue** pour la transformée de la probabilité de retour en 0 :

$$\begin{aligned}
 p_0^*(s) &= \frac{1}{s + \sigma_0 - \frac{\gamma_1}{s + \sigma_1 - \frac{\gamma_2}{s + \sigma_2 - \mu_3 \frac{p_3^*}{p_2^*}}}} = \Phi_{j=0}^{\infty} \frac{\gamma_j}{s + \sigma_j} \\
 &= \frac{1}{s + \lambda_0 - \frac{1}{\lambda_0^{-1}(1 + (s + \lambda_1)/\mu_1) - \frac{1}{\lambda_0\mu_1\lambda_1^{-1}(1 + (s + \lambda_2)/\mu_2) - \dots}}}
 \end{aligned} \tag{9.6}$$

où Φ denote fraction continue. En tronquant la fraction continue au niveau n , et en écrivant ceci comme une fraction, on arrive au approximant de Padé. Ou, au lieu de tronquer la fraction continue au niveau n , assurons le fait que 0 soit un pole de $p_0^*(s)$ (ce qui est nécessaire, car $\lim_{s \rightarrow 0} sp_0^*(s) = \pi_0$), en choisissant $\frac{p_{n+1}^*}{p_n^*}$ comme l'unique constante γ_n qui rend s une racine du denominateur. Un calcul simple montre que cette constante doit être $\rho_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}$, tel que le dernier denominateur inclu soit $s + \mu_n$. Les fractions ainsi obtenues seront de la forme

$$\frac{A_n}{s} + \frac{a_{n-1}(s)}{b_n(s)} \tag{9.7}$$

où $A_n = (1 + \rho_1 + \rho_1\rho_2 + \dots \prod_{i=1}^n \rho_i)^{-1}$ sont des approximations de la probabilité stationnaire π_0 et les transformées inverses de $\frac{a_{n-1}(s)}{b_n(s)}$ approximent la partie transitoire.

Exemple 9.6 Pour le cas de la file $M/M/1$ avec coefficients constants $\lambda_i = \lambda, \forall i \geq 0, \mu_i = \mu, \forall i \geq 1$, on a $\mu p_1^* - p_0^*(s + \lambda) + 1 = 0$, la normalisation

$$\sum_n p_n^*(s) = 1/s$$

et la récurrence pour $j \geq 1$ est :

$$\mu p_{j+1}^* - (s + \lambda + \mu) p_j^* + \lambda p_{j-1}^* = 0.$$

Comme une des racines de $\mu\alpha^2 - (\mu + \lambda + s)\alpha + \lambda = 0$ est toujours plus grande que 1, on conclut que

$$p_n^*(s) = p_0^*(s)\alpha_1(s)\alpha(s)^{n-1}$$

où $\alpha_1(s) = \frac{p_1^*(s)}{p_0^*(s)}$, et $\alpha(s)$ est l'unique racine de $\mu\alpha^2 - (\mu + \lambda + s)\alpha + \lambda = 0$ qui est plus petite que 1 pour chaque $s \geq 0$ (et qui coïncide avec la transformée de Laplace $V^*(s)$ de la "période occupée" multipliée par $\mu\lambda^{-1}$). Finalement, tenant compte de la normalisation et de la première équation, on trouve : $\alpha_1 = \frac{\lambda(1-\alpha)}{s+\mu(1-\alpha)} = \alpha$, et

$$p_n^*(s) = \frac{(1-\alpha)\alpha(s)^n}{s}, \quad p_0^*(s) = \frac{1-\alpha(s)}{s} = \frac{\alpha}{\lambda - \mu\alpha} = \mu^{-1} \frac{V^*}{1 - V^*}$$

Rémarquons aussi que la fraction continue est périodique :

$$p_0^*(s) = \frac{1}{s + \lambda - \mu \frac{\lambda}{s + \lambda + \mu - \mu \frac{\lambda}{s + \lambda + \mu - \mu \frac{p_3^*}{p_2^*}}}} = \frac{1}{s + \lambda - \mu \alpha(s)}$$

où α satisfait comme avant

$$\alpha(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda + \mu - \mu \alpha(s)}$$

Cette approche pourrait rendre possible l'analyse stationnaire et transitoire des marches unidimensionnels nonreversibles (voir Kovchegov (2008) pour le cas réversible, correspondant aux opérateurs G symétrisables), généralisant l'approche de Karlin et McGregor !

Exercice 9.17 Calculer les transformées de Laplace $p_j^*(s), s \in \mathbb{N}$, des probabilités transitoires pour une marche sur les nombres naturels, avec la distribution de chaque pas donnée par (p_1, p_{-1}, p_{-2}) . Comparer avec (7).

Note : Dans le cas multidimensionnel, les distributions stationnaires des réseaux de Jackson sont calculables explicitement (même que les marches associées ne sont pas réversibles), mais les probabilités transitoires sont connues dans très peu de cas ! Illustrons maintenant le calcul des transformées de Laplace, à partir des équations de Chapman-Kolmogorov, pour les probabilités $q_j(t) = P_j[\tau_0 \leq t]$. Les équations de Kolmogorov $P' = PG$ pour la première ligne sont

$$\begin{aligned} q_1'(t) &= \mu_1 - (\lambda_1 + \mu_1) q_1(t) + \lambda_1 q_2(t), & q_1(0) &= 0 \\ q_j'(t) &= \mu_j q_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) q_j(t) + \lambda_j q_{j+1}(t), & q_j(0) &= 0, j = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Les transformées de Laplace $p_j^*(s)$ satisfont une récurrence de deuxième ordre :

$$\begin{aligned} -\mu_j q_{j-1}^* + (s + \lambda_j + \mu_j) q_j^* - \lambda_j q_{j+1}^* &= 0, & j &= 2, 3, \dots \\ (s + \lambda_1 + \mu_1) q_1^* - \lambda_1 q_2^* - \mu_1/s &= 0 \end{aligned}$$

9.10 Problèmes de Dirichlet/première passage en temps continu et la formule de Feynman-Kac

Les problèmes de Dirichlet/première passage sont parmi les problèmes les plus faciles à résoudre pour les processus de Markov.

Exemple 9.7 Soit N_s le nombre de personnes en attente dans une file $M/M/1/$, soit $T = T_0$ le temps de vidage de la file (appelé aussi **période occupée/busy period** si $N_0 = 1$) et $T = \min[T_0, T_K]$ (où K peut-être la taille d'une salle d'attente).

1. Calculez la **distribution d'arrêt** $p(x) = P_x[N(T) = K]$, $q(x) = P_x[N(T) = 0]$. Indication : On peut conditionner après un petit intervalle dt , ou après le temps de la première transition.
2. **"Temps de vidage"**. Montrez que si $K = \infty$ et $\lambda < \mu$, alors le **temps de vidage espéré** $t(x) = E_x T_0$ est de la forme $t(x) = \tau x$; déterminez τ . Donnez l'interprétation probabiliste de τ .

3. Montrez que la transformée de Laplace du temps de vidage $d(x) = E_x e^{-\delta T_0}$, $\delta > 0$ est de la forme $d(x) = z^x$; déterminez z . Donnez l'interprétation probabiliste de z .

Calculez aussi la transformée de Laplace du "temps de repos" - "idle-time".

Solution :

(d) $p_x = P_x[X(T) = K]$ satisfait :

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}p)_x &= 0 \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ p_K &= 1 \\ p_0 &= 0 \end{aligned}$$

Comme c'est une equation homogene, et les racines de l'equation auxiliare sont $\frac{\mu}{\lambda}$ and 1, on obtient $p_x = A_1 + A_2(\frac{\mu}{\lambda})^x = \frac{1 - (\frac{\mu}{\lambda})^x}{1 - (\frac{\mu}{\lambda})^K}$.

2. $t_x = E_x[T]$ (temps d'arret espéré) satisfait une equation nonhomogène

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}t)_x + 1 &= 0 \\ t_0 &= 0 \\ t_x &\quad \text{accroit non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Comme c'est une equation nonhomogene, on obtient $t_x = p_x + \tilde{t}_x$, ou $\tilde{t}_x = \tau x$. La solution particulière est $\tilde{t}_x = \frac{x}{\mu - \lambda}$, la condition a ∞ annule le terme $A_2(\mu/\lambda)^x$ et la condition initiale annule A_1 , et alors la solution de l'equation nonhomogene est $t(x) = \tau x = \frac{x}{\mu - \lambda}$, où τ represente le temps espéré de la "busy period" = periode occupé avec un seul client present au début = une periode de decroisement par 1 de la file.

3. $d(x) = E_x e^{-sT}$ satisfait :

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}d)(x) - sd(x) &= 0 \\ d(0) &= 0 \\ d(\infty) &\leq 1 \end{aligned}$$

C'est une equation homogene, et l'equation auxiliare

$$\lambda a^2 - (\lambda + \mu + s)a + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu(a^{-1} - 1) + \lambda(a - 1) = (1 - a)\frac{\mu - a\lambda}{a} = s$$

a exactement une racine z qui n'est pas plus grande que 1 (par exemple, avec $\delta = 0$ on obtient $z = 1$). On obtient

$$d(x) = z(s)^x,$$

où $z(s)$ est la transformé de Laplace d'une periode de decroisement par 1 de la file (on peut aussi interpreter z comme la valeur actualisée par rapport au taux s d'une unite monetaire qu'on recevra quand la file diminue par 1).

Remarque : La distribution de la période de décroisement par 1 de la file ("busy period") est importante justement à cause des structures additive/multiplicative signalé ci-dessus. Soit τ le temps de sortie d'un processus de Markov de son domaine \mathcal{E} , soit $c(x)$ défini sur le domaine et $b(x)$ défini sur le domaine complémentaire ∂ , et soit

$$f(x) = E_x \left[\int_0^\tau c(X(t)) dt + b(X_\tau) \right]$$

Exercice 9.18 Montrez, en conditionnant sur la position au moment $t+h$, pour h très petit, que $f(x)$ satisfait les équations de Dirichlet :

$$\begin{aligned} (Gf)(x) + c(x) &= 0 & \text{si } x \in \text{int}(\mathcal{E}) \\ f(x) &= b(x) & \text{si } x \in \partial \end{aligned}$$

Rémarque : Le problème de Dirichlet pour une chaîne discrète est obtenu en remplaçant le générateur G par son analogue discret $\frac{P-I}{1} = P - I$, où P est la matrice de transition de la chaîne discrète (la démonstration directe de ce cas est pareille, est plus facile que celle du cas continu).

Théorème 9.3 Etant donné un processus de Markov en temps continu X_u avec domaine \mathcal{E} et générateur G , l'espérance du gain actualisé

$$f(x) = E_x \left[e^{-\int_0^\tau r(X_u) du} b(X_\tau) + \int_0^\tau e^{-\int_0^t r(X_u) du} c(X(t)) dt \right]$$

satisfait :

$$(Gf)(x) - r(x)f(x) + c(x) = 0$$

avec $f = b$ sur la frontière.

Note : Ces problèmes ont aussi des versions à durée finie T , où on s'intéresse en :

$$f(x, T) = E_x \left[e^{-\int_0^{\min[\tau, T]} r(X_u) du} b(X_{\min[\tau, T]}) + \int_0^{\min[\tau, T]} e^{-\int_0^t r(X_u) du} c(X(t)) dt \right]$$

Cette fois-ci, le gain espéré f dépend aussi du temps qui reste T , et on arrive à la solution d'une EDP à conditions initiales et de frontière :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} f + (Gf)(x) - r(x)f(x) + c(x) &= 0 & \text{si } x \in \text{int}(\mathcal{E}) \\ f(x) &= b(x) & \text{si } x \in \partial \text{ ou } T = 0 \end{aligned}$$

Chapitre 10

Les lois de type exponentielle de matrice et de type phase

10.1 Aperçu historique

La loi exponentielle, avec fonction de survie $\bar{F}(t) = e^{bt} \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$, $b < 0$, est la loi la plus importante parmi les lois concentrées sur \mathbb{R}_+ . Elle a été du début une grande favorite dans les probas appliquées (files d'attente, actuariat, fiabilité, etc), par exemple pour la modélisation des temps d'atteinte, grâce à ses propriétés spéciales, comme l'absence de mémoire. Mais, comme typiquement il n'est pas possible d'ajuster une distribution exponentielle aux données, des alternatives ont été proposées du début.

Série des "phases" exponentielles. Erlang (1905), a proposé de modéliser les temps d'atteinte par sommes des v.a. exponentielles i.i.d. du même taux λ , qu'il voyait comme des "séries des phases exponentielles" (chaque phase ayant la remarquable propriété de manque de mémoire).

Exercice 10.1 1. Montrer que La transformée de Laplace de la loi d'Erlang $E_{n,\lambda} = \sum_{i=1}^n E_\lambda^{(i)}$ est

$$\left(\frac{1}{1 + s/\lambda}\right)^n.$$

2. Calculer la moyenne, variance et coefficient de variation $c_v^2 = \frac{\text{Var}(X)}{(E[X])^2}$ de la loi d'Erlang $E_{n,\lambda}$.
3. Calculer le mode de la densité.
4. Tracer approximativement les graphes des densités $E_{k,\frac{k}{2}}$ pour $k = 3$ et $k = 7$.
5. (*) Montrer que le coefficient de variation d'une convolution de deux lois ayant coefficient de variation plus petit que 1 est plus petit que 1 et plus grand que $\frac{1}{2}$.

Une autre famille très importante est celle des lois "hyperexponentielles", avec densité

$$f(t) = \sum \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \lambda_i > 0, \alpha_i > 0, \sum \alpha_i = 1,$$

qui peuvent-etre vues comme le résultat d'un choix avec probabilités α_i d'une entre plusieurs phases avec taux λ_i .

Exercice 10.2 Calculer

1. les moments d'ordre $n, n = 1, 2, \dots$ et
2. le coefficient de variation $c_v^2 = \frac{\text{Var}(X)}{E(X)^2}$ d'une variable aléatoire hyperexponentielle, d'ordre k .

La classe \mathcal{R} des lois avec transformées de Laplace rationnelles. D.R. Cox (1955) étudie les lois series et hyperexponentielles, qu'il regarde comme temps de passage par un réseau des phases parallèles, et aussi des lois obtenues en composant des phases en série et/ou en parallèle. Il identifie comme propriété analytique essentielle le fait que leurs transformées de Laplace sont rationnelles

$$f^*(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m p_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i s^i}, \quad p_0 = q_0, \quad (10.1)$$

et il introduit dans l'article phare "A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes" la classe des densités \mathcal{R} ayant des transformées de la forme (10.1). En particulier, une densité $f(t)$ de cette classe est facilement obtainable à partir de sa transformée de Laplace $f^*(s)$ (qui est souvent plus facile à trouver), par décomposition en fractions simples, et inversion des transformées simples de la forme $(\frac{1}{1+s/\lambda})^n$. Chaque densité de la classe \mathcal{R} peut-être décomposée ainsi comme une combinaison des densités exponentielles et d'Erlang, sauf que les exposants λ_i peuvent être complexes.

Exercice 10.3 a) Montrez que si une variable continue X à valeurs en sur \mathbb{R}_+ a une densité avec transformée de Laplace rationnelle (10.1), alors $m \leq n - 1$, et $a_0 = b_0$.

b) Montrez que si X est continue, sauf un possible atom en 0 avec masse a_{-1} , alors $a_0/b_0 + a_{-1} = 1 \implies a_0 \leq b_0$, et $m \leq n$.

R : a) $m \leq n - 1 \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow I} f^*(s) = 0$, qui est une conséquence du théorème de convergence dominée.

Remarque 10.1 La classe \mathcal{R} est incontournable dans des nombreuses applications, apparaissant par exemple comme resultat des approximations de Padé de la transformée de Laplace, ou par la méthode des moments.

Remarque 10.2 Il a été longtemps un problème ouvert (sauf les cas $n = 2$ et $n = 3$) de décider quand une combinaison d'exponentielles est nonnegative (ou quand une transformée de Laplace rationnelle (10.1) a une inverse nonnegative). La commande *CheckMEPositive* de *BUTools* offre aujourd'hui cette possibilité, et aussi le programme *SOPE*, dans le cas des exposants réels (par contre *SOPE* permet aussi la resolution des problèmes d'optimisation convexe).

Représentations matricielles. En même temps avec Cox, Jensen (1954) étudie les lois des temps d'absorption τ des processus de sauts Markoviens, ou de passage par des réseaux, appelées aujourd'hui lois de type phase (\mathcal{PH}). Il trouve qu'elles ont la représentation (10.2) ci-dessous – voir Section 10.2 :

Définition 10.1 Densités de type phase et de type exponentielle de matrice. a) Une densité $f(t), t \in [0, \infty)$ est appelée de type phase si :

$$f(t) = \beta e^{Bt} \mathbf{b}, \quad \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \hat{f}(s) = \beta (sI - B)^{-1} \mathbf{b}, \quad (10.2)$$

où B est une matrice sous-génératrice satisfaisant $B_{ij} \geq 0$ for $i \neq j$, $B\mathbf{1} \leq \mathbf{0}$, β est un vecteur ligne, et $\mathbf{b} = -B\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ sont des vecteurs colonne. Ces hypothèses impliquent $f(t) \geq 0, \forall t \geq 0, \int_0^\infty f(t)dt = 1$.

b) Une densité qui a une représentation (10.2), mais avec des composantes β, B, \mathbf{b} qui ne sont pas nécessairement comme en part a), est appelée densité de type exponentielle de matrice.

Exemple 10.1 Une représentation de la densité d'Erlang $E_{n,\lambda}$ est obtenue avec $\beta = (1, 0, 0, \dots)$ et

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \lambda \\ \vdots & & \vdots & \ddots & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Remarque 10.3 La densité et la fonction de survie d'un temps d'arrêt τ d'un processus de Markov absorbant en temps continu ont toutes les deux des représentations matricielles :

$$\bar{F}_\tau(t) = \beta e^{tB}\mathbf{1} \Leftrightarrow f(t) = \beta e^{tB}\mathbf{b}, \mathbf{b} = -B\mathbf{1}. \quad (10.3)$$

La transformée de Laplace est rationnelle, de la forme

$$f^*(s) = \beta(sI - B)^{-1}\mathbf{b} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i s^i}$$

Si une telle représentation est disponible avec B étant une matrice sous-génératrice, et β nonnegatif, aucun besoin de vérifier que $f(t)$ est nonnegative, cela étant automatique.

Des représentations matricielles sont aussi possibles pour la classe \mathcal{R} de Cox (en utilisant la "matrice compagnon" du polynôme $q(s)$ au dénominateur), et donc $\mathcal{PH} \subset \mathcal{R}^\S$. Les lois de la classe \mathcal{R} avec transformées de Laplace rationnelles sont aussi nommées exponentielles de matrice ou matrice-exponentielle.

Remarque 10.4 Pour qu'une densité $f(t)$ soit de type matrice-exponentielle, il est nécessaire que :

§. Si la transformée d'une fonction est rationnelle :

$$f^*(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i s^i}, \quad (10.4)$$

alors l'inverse peut être représentée comme $f(t) = \beta e^{tB}\mathbf{e}_n$, où $\beta = (p_0, \dots, p_{n-1})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ -q_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -q_{n-1} \end{pmatrix}$ est la "matrice compagnon" du polynôme $q(s)$ au dénominateur. En effet,

on vérifie d'abord que (10.4) implique $b(D)[f(t)] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f}'(t) = B\mathbf{f}(t)$, où $\mathbf{f}(t)$ est le vecteur formé par $f(t)$ et ses premières $n-1$ dérivées. La condition initiale est fournie par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ q_{n-1} & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ q_{n-2} & q_{n-1} & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1 & q_2 \cdots & q_{n-1} & 1 & \vdots \end{pmatrix} \mathbf{f}'(0) = \mathbf{b}$.

Résolvant le système EDO linéaire avec cette condition produit la représentation désirée.

1. Toutes ses valeurs propres satisfont $\Re(\sigma_i) < 0, \forall i$, et il existe une valeur propre réelle σ_1 tq $\max_i \Re(\sigma_i) = \sigma_1$ (ce qui est facile à vérifier en calculant les racines du dénominateur), et
2. $f(t) \geq 0, \forall t$, qui est un problème ouvert pour $n \geq 4$.

Dans le cas des densités de type phase, ces contraintes sont satisfaites automatiquement, mais pour les densités de type matrice-exponentielle elles doivent être vérifiées cas par cas, ce qui est tout à fait difficile pour la deuxième propriété.

s:Mabs

10.2 Processus de Markov avec un état absorbant

Exercice 10.4 Le serveur sans mémoire. Pour un processus de Markov en temps continu à deux états $\{1, \partial\}$ avec $G_{\partial,1} = 0$ (∂ est absorbant), $G_{1,\partial} = \lambda$, soit τ temps d'absorption.

1. Calculer $P_t = e^{tG}$, par exemple par les équations de Kolmogorov $P'_t = P_t G$, et remarquez que

$$e^{tG} = \begin{pmatrix} \bar{F}_\tau(t) & F_\tau(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer la résolvante/transformée de Laplace du semigroupe $\int_0^\infty e^{-st} e^{tG} dt = (sI - G)^{-1}, \forall s > 0$.
3. (*) Calculer l'espérance de τ , et la transformée de Laplace $E[e^{-s\tau}]$, en conditionnant sur toutes les possibilités après un intervalle infinitésimal dt ("conditionnement sur le premier pas"). Rederiver $E[\tau]$, en utilisant $Ee^{-s\tau} = \int_0^\infty e^{-st} f_\tau(t) dt = 1 - sE[\tau] + \dots$

r:Ff

Remarque 10.5 La transformée de Laplace $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ est très importante en probabilités, par exemple pour calculer les moments (pour cela, il est plus convenable d'utiliser la fonction génératrice des moments $\phi(s) = \int (e^{st} f(t) dt = \hat{f}(-s)$). Il est facile de vérifier que les transformées des fonctions de répartition $F(t)$ et survie $\bar{F}(t)$ sont respectivement

$$\hat{F}(s) = \frac{f(s)}{s}, \quad \hat{\bar{F}}(s) = \frac{1 - f(s)}{s}$$

L'exercice ci-dessus illustre le fait que la densité exponentielle peut être vue comme le temps d'absorption d'un processus de Markov avec matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par : $G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$. La possibilité de donner ce genre de représentation définit la classe des densités de type phase.

Motivés par cette relation, considérons le problème de caractériser la distribution du temps de passage τ par un réseau Markovien général, jusqu'à l'absorption dans un état "cimetière" absorbant.

Soit G la matrice génératrice (de taux de transitions) d'un processus ayant un état absorbant :

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (-\mathbf{B})\mathbf{1},$$

et soit $B = \tilde{G}$ la matrice sous-stochastique obtenue en effaçant la ligne et colonne de l'état absorbant dans la matrice stochastique G du semigroupe stochastique initial. B est une matrice sous-stochastique (ayant la somme de chaque ligne ≤ 1 , avec au moins une ligne où l'inégalité est stricte). Réciproquement, chaque matrice sous-stochastique a une extension

unique a une matrice stochastique, obtenue par l'ajout d'une ligne de 0 et d'une colonne qui complete la somme de chaque ligne à 1.

Le prochaine théorème fournit la relation entre les semigroupes (sous)stochastiques e^{tG} , e^{tB} , et le temps d'arrêt τ obtenu en arretant le processus au moment de son arrivée dans l'état absorbant (qui peut être choisi arbitrairement).

exe:phase

Théorème 10.1 Soit τ le temps d'absorbtion d'un processus de Markov avec un état absorbant, à matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (-\mathbf{B})\mathbf{1}$$

a) Alors,

$$e^{tG} = \begin{pmatrix} e^{t\mathbf{B}} & \mathbf{1} - e^{t\mathbf{B}}\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\mathbf{B}} & (P_i(\tau \leq t), i \in \mathcal{T}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{cases} P_i(\tau \leq t) = (e^{tG})_{i,n+1} \\ P_i(\tau > t) = \mathbf{e}_i e^{t\mathbf{B}} \mathbf{1} = (e^{t\mathbf{B}} \mathbf{1})_i \end{cases}$$

En forme vectorielle, les fonction de survies des temps d'absorbtion sont :

$$\bar{\mathbf{F}} = (\bar{F}_i(t) = \mathbb{P}_i[\tau > t], i \in \mathcal{T}) = e^{t\mathbf{B}}\mathbf{1}$$

et les densités sont

$$\mathbf{f} = e^{t\mathbf{B}}\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = (-\mathbf{B})\mathbf{1} \quad (10.5)$$

Avec une distribution initiale β concentré sur les états transitoires, on a

$$P\beta(\tau > t) = \beta e^{t\mathbf{B}} \mathbf{1}$$

b) La relation entre les résolvantes est :

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} = \begin{pmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} & s^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & s^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dem : a) Un moment de reflexion nous montre qu'en effet la matrice

$$\mathbf{P}_t = (P_t(i, j) = \mathbb{P}_i[t < \tau, X_t = j], i, j \in \mathcal{T}) = e^{t\mathbf{B}}$$

contienne les probabilités de survie jusqu'au temps t , jointes avec la position finale j , et conditionnées par les positions de départ i . Les probabilités de survie jusqu'au temps t , conditionnées par les positions de départ i , sont donc

$$\mathbf{e}_i e^{t\mathbf{B}}\mathbf{1}$$

En tenant compte des probabilités de départ, on trouve :

$$\bar{F}_\tau(t) = \beta e^{t\mathbf{B}}\mathbf{1}$$

b) Par définition, la dernière colonne de e^{tG} est $F_\tau(t)$ et sa transformée $\hat{F}_\tau(s) = s^{-1}Hf_\tau(s) = s^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{b}$ où on a utilisé la remarque 10.5 et (10.5).

Corollaire 10.1 Les caractéristiques fondamentales des distributions de type phase (ou matrice-exponentielle). a) La matrice des transformées de Laplace $P^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_i dt$ des probabilités de survie conditionnées par les positions de départ et jointes avec la position d'arrivée au temps t vaut

$$P^*(s) = (sI - B)^{-1}$$

Soit

$$l = (l_i(s) = E_i e^{-s\tau} = \int_0^\infty e^{-st} f_i(t) dt = \hat{f}_i(s), i \in \mathcal{T})$$

les transformés de Laplace du temps d'absorption, conditionné par la position de départ. Alors

$$l = (sI - B)^{-1}b.$$

b) Avec une distribution initiale β concentré sur les états transitoires, on trouve

$$E\beta e^{-s\tau} = \beta(sI - B)^{-1}b.$$

c) le vecteur t d'espérances de τ , à partir de tous les états transients, est

$$t = E[\tau] = (-B)^{-1}\mathbf{1},$$

et le vecteur des moments d'ordre k est

$$E[\tau^k] = k!(-B)^{-k}\mathbf{1}$$

Dem : a) Soit

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} B & b \end{pmatrix}$$

la matrice rectangulaire obtenu en effaçant la ligne de l'élément absorbant. On peut appliquer le conditionnement sur la position après un intervalle infinitesimal. Posant $\tilde{l} = (l, 1)$, les équations sont

$$\begin{cases} l_\partial = 1 \\ \tilde{G}\tilde{l} - sl = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow B\mathbf{l} + b - sl = 0, \quad l = (sI - B)^{-1}b$$

c) Pour $k = 1$, le resultat suit directement de l'équation $Bt + \mathbf{1} = 0$ ■

Remarque 10.6 En utilisant la décomposition de Jordan, on voit que dans le cas "générique" des distributions de type phase diagonalisable, ces distributions peuvent-etre décomposées comme combinaisons (possiblement nonconvexes) des exponentielles.

Exercice 10.5 Pour les processus absorbants "serie" en temps continu a trois états 1, 2, ∂ définis respectivement par

$$a)G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b)G = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et distribution initiale $(1, 0, 0)$, calculer :

1. la "résolvante"

$$(sI - G)^{-1} = \begin{pmatrix} (sI - B)^{-1} & \frac{1}{s} \mathbf{f}^*(s) \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (sI - B)^{-1} & \mathbf{F}^*(s) \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix},$$

2. le vecteur des transformées de Laplace $\mathbf{l}(s) = (sI - B)^{-1} \mathbf{b}$ et le vecteur $\mathbf{f}(t) = e^{tB} \mathbf{b}$ des densités du temps d'absorption τ .

3. Le vecteur d'espérances de τ $\mathbf{t} = (-B)^{-1} \mathbf{1}$.

Sol : a)

$$(sI - B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+\lambda} & \frac{\lambda}{(s+\lambda)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+\lambda} \end{pmatrix} \quad \mathbf{l}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2} \\ \frac{\lambda}{s+\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_{E_{2,\lambda}}(t) \\ f_{E_{1,\lambda}}(t) \end{pmatrix}, (1, 0) \mathbf{f}(t) = f_{E_{2,\lambda}}(t)$$

b)

$$(sI - B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+\lambda_1} & \frac{\lambda_1}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} \\ 0 & \frac{1}{s+\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} \\ \frac{\lambda_2}{s+\lambda_2} \end{pmatrix}$$

On obtient une distribution "hypoexponentielle/Erlang généralisé/série/convolution d'exponentielles", aussi exprimable comme mélange nonconvex d'exponentielles

$$f(t) = (1, 0) \mathbf{f}(t) = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Remarque 10.7 Les transformées de Laplace des réseaux serie. *Rémarquons que les transformées de Laplace ci-dessus peuvent être obtenues sans calcul, en prenant les produits des transformées pour les phases qui restent jusqu'à l'absorption. Cette remarque reste évidemment vraie pour les réseaux serie de dimension arbitraire. Pour un réseau série avec matrice sous-génératrice*

$$B = \text{Bidiag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -\lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\lambda_n \end{pmatrix},$$

le vecteur des transformées de Laplace est

$$\mathbf{l}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2) \dots (s+\lambda_n)} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_{n-1} \lambda_n}{(s+\lambda_{n-1})(s+\lambda_n)} \\ \frac{\lambda_n}{s+\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Les moments sont aussi explicites. Pour $n = 3$, on trouve :

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} \\ 2 \left(\frac{1}{\mu_1 \mu_3} + \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_3^2} + \frac{1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{1}{\mu_3 \mu_2} + \frac{1}{\mu_2^2} \right) \\ 3! \left(\frac{1}{\mu_1^3} + \frac{1}{\mu_2^3} + \frac{1}{\mu_3^3} + \frac{1}{\mu_2 \mu_1^2} + \frac{1}{\mu_3 \mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2 \mu_3} + \frac{1}{\mu_2 \mu_3^2} + \frac{1}{\mu_2^2 \mu_1} + \frac{1}{\mu_3^2 \mu_1} + \frac{1}{\mu_2 \mu_3 \mu_1} \right) \end{pmatrix} \quad \text{Avec } \mu_i = \mu, \forall i \text{ les formules simplifient : } m_1 = n\mu^{-1}, m_2 = n(n+1)\mu^{-2}, m_3 = n(n+1)(n+2)\mu^{-3}, \dots$$

Les réseaux série sont très importants dans la modélisation des temps d'atteinte.

Exercice 10.6 Les réseaux parallèle. *Pour le processus absorbant en temps continu défini par*

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calculer :

1. la "résolvante transiente" $(sI - B)^{-1}$,
2. la transformée de Laplace du temps d'absorption τ , avec distribution initiale $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$
3. la densité de τ
4. le vecteur \mathbf{t} d'espérances de τ , à partir de tous les états transients.
5. Calculez la transformée de Laplace du temps d'absorption τ pour un processus avec un état absorbant, ayant une diagramme parallèle arbitraire.

Conclusion : Les lois des temps de passage par des réseaux markoviennes sont des mélanges d'exponentielles et des lois d'Erlang avec des exposants possiblement complexes. Dans le cas des réseaux sans cycles – voir exercices ci-dessus – les exposants sont réels.

10.3 Sous-classes importantes des distributions exponentielle de matrice (*)

Rappelons que pour qu'une densité soit de type matrice-exponentielle il est nécessaire que toutes ses valeurs propres satisfont $\Re(\sigma_i) < 0, \forall i$, et il existe une valeur propre réelle σ_1 tq $\max_i \Re(\sigma_i) = \sigma_1$. La possibilité la plus simple est que toutes les valeurs propres soient réelles négatives.

Théorème 10.2 *Supposons que $f(x)$ est une fonction de type exponentielle de matrice, avec toutes les valeurs propres satisfaisant $\sigma_i < 0, \forall i$, et que $f(x) > 0, \forall x > 0$. Alors, $f(x)$ admet une représentation comme temps d'absorption d'un processus de Markov avec graphe de communication série (ce qui est équivalent au fait qu'un peut ordonner les états tq la matrice de transition soit bidiagonale)[§]. Une telle densité avec valeurs propres réelles négatives s'appellent acyclique/Coxienne/série/Erlang généralisé.*

Au cas où on a aussi des racines complexes, on est obligé d'utiliser des graphes qui contiennent aussi des cycles. L'idée la plus simple serait d'utiliser des matrices circulantes $B = \text{Circ}(-\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda > \sum_i \lambda_i$, mais il se trouve que ces matrices représentent seulement la loi exponentielle (en particulier, leurs moments sont $m_k = k!(-\mathbf{B})^{-k} \mathbf{1} = k!(\lambda - \sum_i \lambda_i)^{-k}$).

Exercice 10.7 *Vérifier cette affirmation en BUTools, avec $n = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$.*

Remarque 10.8 *Mocanu et Commault ont montré qu'on peut toujours trouver des représentations de forme "série des blocs", avec chaque bloc représentant séparément une valeur propre réelle, ou une paire de valeurs propres complexes, par des lois d'"Erlang généralisé avec de feedback" (représentation monocyclique).*

§. Ce théorème est déjà intéressant avec un graphe de communication acyclique (ce qui est équivalent au fait qu'un peut ordonner les états tq la matrice de transition soit triangulaire). Dans ce cas, il assure qu'on peut trouver une autre représentation bidiagonale, de dimension plus grande.

Exercice 10.8 a) Montrez que les statistiques d'ordres de n variables exponentielles i.i.d. ont des distributions d'Erlang généralisés, et déterminer leurs paramètres. b) (*) Investiguez le cas des statistiques d'ordres de n variables exponentielles indépendants, mais avec des paramètres différents.

Ind : a) Utilisez la propriété de manque de memoire. b) Considérez le cas $n = 2$.

10.4 La positivité des combinaisons linéaires d'exponentielles

s:posc

Définition 10.2 Une densité (c.-à-d. une fonction nonnegative et intégrable, avec intégrale 1) de la forme :

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^K w_k e^{-c_k t} \geq 0, & \forall t \geq 0 \\ 0, & \forall t < 0, \end{cases} \quad (10.6)$$

sera appelée hyperexponentielle généralisée (GHE). Si tous les coefficients w_k sont positifs, $f(t)$ sera appelée hyperexponentielle.

Exercice 10.9 Est-ce que la fonction

$$f(t) = 2(e^{-t}) - 6(2e^{-2t}) + 5(3e^{-3t}) = 2e^{-t}g(t)$$

est positive sur $t \in [0, \infty)$, et donc une densité ?

R : Non, car la valeur minimale $g(t) = 2 - 12e^{-t} + 15e^{-2t}$ obtained when $e^{-t^*} = \frac{2}{5}$, is $g(t^*) = -\frac{2}{5} < 0$.

Remarque 10.9 Cette approche marche toujours pour trois termes. Pour quatre et cinq termes, déjà dans le cas des exposants en progression arithmétique, on arrive au pb. de positivité sur $[0, 1]$ des polynômes de degré 3 et 4, qui ne sont pas faciles. Le cas général des progressions arithmétiques est abordable numériquement en utilisant des représentations matricielles et la programmation semi-définie.

Exercice 10.10 Est-ce que la fonction

$$f(t) = \frac{1}{4}e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t}$$

est non-négative sur $t \in [0, \infty)$?

Exercice 10.11 Montrer que pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la fonction

$$f(t) = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

est une densité, en calculant sa transformée de Laplace $f^*(s)$.

R :

$$f^*(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1}{\lambda_1 + s} - \frac{1}{\lambda_2 + s} \right) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + s}.$$

Il suit que $f(t)$ est la densité d'une somme de deux variable aléatoire exponentielles, indépendantes.

Remarque 10.10 La transformée de Laplace, ainsi que la densité, sont des différences divisées de Newton.

$$f^*(s) = -\lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{1}{\lambda + s} \right)_{[\lambda_1, \lambda_2]} \implies f(t) = -\lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda t})_{[\lambda_1, \lambda_2]} = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 t})$$

Cela continue d'être vrai (démonstration par récurrence) pour des sommes de n variable aléatoire exponentielles, indépendantes, et nous fournissons des exemples des densités qui ne sont pas hyper-exponentielles, mais avec positivité évidente dans le «monde de Laplace».

Définition 10.3 La loi d'une somme indépendante des n variables exponentielles avec taux $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ est appelée Erlang généralisée. Sa transformée de Laplace est $\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{s + \lambda_i}$.

Exercice 10.12 Écrivez la fonction

$$f(t) = \frac{5}{6}e^{-t} - \frac{2}{6}e^{-2t} + e^{-3t}$$

avec transformée de Laplace

$$f^*(s) = \frac{9s^2 + 35s + 36}{6(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{5}{3(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{4}{3(s+2)(s+3)} + \frac{3}{2(s+3)} \quad (10.7)$$

comme une combinaison d'Erlang généralisé $E(1, 2, 3)$, $E(2, 3)$ et $E(3)$. Est-ce que cette fonction est une densité ?

R : $f(t) = \frac{5}{18}E(1, 2, 3) + \frac{4}{18}E(2, 3) + \frac{1}{2}E(3)$ est un mélange convexe d'Erlang généralisé, donc une densité.

Définition 10.4 Nous appellerons une décomposition de type (??) d'une transformée de Laplace rationnelle avec singularités réelles décomposition de Cuman/Coxiennne.

Exercice 10.13 a) Écrivez comme combinaison d'exponentielles la fonction $b(t)$ avec transformée

$$b^*(s) = \frac{6}{13} \frac{2s^2 + 10s + 13}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

b) Est-ce une densité ?

R : a) La décomposition en fractions simples donne $b(t) = \frac{15}{13}e^{-t} - \frac{3}{13}(2e^{-2t}) + \frac{1}{13}(3e^{-3t}) \Leftrightarrow \bar{B}(t) = \frac{15}{13}e^{-t} - \frac{3}{13}e^{-2t} + \frac{1}{13}e^{-3t}$ et montre que ce n'est pas une densité hyperexponentielle.

b) Oui, car les coefficients $\alpha_i = \frac{\beta_i}{\prod_{j=i}^n \lambda_j}$ de la décomposition Coxiennne sont $\alpha = \left\{ \frac{5}{13}, \frac{4}{13}, \frac{4}{13} \right\}$, donc positifs. Vérifier la réponse avec le package BUTools, en utilisant la commande : `APHRepresentation([15/13, -3/13, 1/13], diag([-1, -2, -3]))`

Remarque 10.11 L'exercice antérieur suggère que les lois d'Erlang généralisées fournissent une meilleure base pour démontrer la positivité que les hyper-exponentielles.

Exercice 10.14 Montrer que la fonction

$$f(t) = 3(e^{-t}) - 3(2e^{-2t}) + 3e^{-3t}$$

est une densité, en calculant la transformée de Laplace et sa décomposition Coxiennne. Donner le vecteur initial et la matrice bidiagonale A dans la représentation Coxiennne de $f(t)$.

Exercice 10.15 a) Montrer que la fonction

$$2e^{-t} - 6e^{-2t} + 6e^{-3t} = 2e^{-t} - 3(2e^{-2t}) + 2(3e^{-3t}) = 2e^{-t}g(t)$$

est une densité.

b) La transformée de Laplace est

$$f^*(s) = \frac{2(s^2 + 2s + 3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{2}{3} \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} - \frac{1}{3} \frac{6}{(s+2)(s+3)} + \frac{2}{3} \frac{3}{s+3}$$

Donner des bornes inférieures et supérieures pour l'ordre d de la représentation Coxiennne minimale, en utilisant `BuToolsVerbose = 1` `CheckMEPositive[α, A]` de `BUTools`.

R : a) $g(t) = e^t f(t)/2 = 1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t}$. $g'(t) = 3e^{-t} - 6e^{-2t} = 3e^{-t}(1 - 2e^{-t}) = 0 \Leftrightarrow t_* = \ln[2] > 0$. $g(t_*) = \frac{1}{8} > 0$ donc $g(t) > 0$ et $f(t)$ est une densité. b) $4 \leq d \leq 5$ (`BUTools` ne détermine pas l'ordre de la représentation minimale, qui est 4).

Exercice 10.16 Est-ce que la fonction

$$f(t) = 4(e^{-t}) - 6(2e^{-2t}) + 3(3e^{-3t})$$

est une densité? Est-ce une densité de type phase? Verifier la reponse en `BUTools` avec `CheckMEPositive[α, A]`.

Exercice 10.17 (*) Est-ce que la fonction

$$\bar{F}[t] = \frac{21}{5}e^{-2x} - \frac{35}{4}e^{-3x} + \frac{77}{12}e^{-4x} - \frac{13}{15}e^{-7x}$$

est une fonction de survie? S'agit-il d'une loi Coxiennne, et si oui, de quel ordre?

R : En tentant notre chance avec la décomposition Coxiennne, on découvre que l'ordre est 4.

Exercice 10.18 (*) Ecrivez des équations déterminant les coefficients β_i dans la décomposition Coxiennne

$$\frac{N[s]}{[s - \gamma_1][s - \gamma_2][s - \gamma_3][s - \gamma_4]} = \frac{\beta_1}{[s - \gamma_1][s - \gamma_2][s - \gamma_3][s - \gamma_4]} + \frac{\beta_2}{[s - \gamma_2][s - \gamma_3][s - \gamma_4]} + \frac{\beta_3}{[s - \gamma_3][s - \gamma_4]} + \frac{\beta_4}{s - \gamma_4}$$

[utilisée pour décomposer la transformée de Laplace]. Donner des formules pour les β_i .

R : $N(s) = \beta_1 + \beta_2(s - \gamma_1) + \beta_3(s - \gamma_1)(s - \gamma_2) + \beta_4(s - \gamma_1)(s - \gamma_2)(s - \gamma_3)$. Cette expansion est appelée le développement de «différences divisées» de Newton <http://fr.wikipedia.org/wiki/Interpolation>. En posant $s = \gamma_1, \gamma_2, \dots$, on obtient :

$$\begin{cases} \beta_1 = N[\gamma_1] \\ \beta_1 + \beta_2[\gamma_2 - \gamma_1] = N[\gamma_2] \\ \beta_1 + \beta_2[\gamma_3 - \gamma_1] + \beta_3[\gamma_3 - \gamma_2][\gamma_3 - \gamma_1] = N[\gamma_3] \\ \beta_1 + \beta_2[\gamma_4 - \gamma_1] + \beta_3[\gamma_4 - \gamma_2][\gamma_4 - \gamma_1] + \beta_4[\gamma_4 - \gamma_3][\gamma_4 - \gamma_2][\gamma_4 - \gamma_1] = N[\gamma_4] \end{cases}$$

$$\beta_1 = N[\gamma_1], \beta_2 := N[\gamma_1, \gamma_2] = \frac{N[\gamma_2] - N[\gamma_1]}{\gamma_2 - \gamma_1}, \beta_3 := N[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \frac{N[\gamma_1, \gamma_3] - N[\gamma_1, \gamma_2]}{\gamma_3 - \gamma_2},$$

$$\beta_4 := N[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4] = \frac{N[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4] - N[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]}{\gamma_4 - \gamma_3}.$$

β_i sont les «différences divisées» de Newton.

10.5 Une relation entre les distributions de type phase en temps discret et en temps continu

Considerons les formules

$$\begin{aligned} \varphi_Q(z) &= \mathbf{E}z^N = \boldsymbol{\alpha}(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1} \\ f_B^*(s) &= \mathbf{E}e^{-sN} = \boldsymbol{\alpha}(s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = (-\mathbf{B})\mathbf{1} \end{aligned} \quad (10.8)$$

des fonctions génératrices de moments des distributions de type phase en temps discret, et des transformées de Laplace des distributions de type phase en temps continu.

Remarque 10.12 Si on choisit comme variable z^{-1} dans le premier cas, les deux définitions coïncident, sauf la formule du vecteur \mathbf{a} .

Lemme 10.1 Pour chaque distribution de type phase en temps discret associé à une matrice sous-stochastique \mathbf{Q} , il est possible de définir une famille des distributions de type phase en temps continu, avec matrices génératrices :

$$\mathbf{B}_c = c(\mathbf{Q} - \mathbf{I}), \quad c > 0 \quad (10.9)$$

Les fonction generatrices correspondants satisfont

$$\varphi_Q\left(\frac{c}{c+s}\right) = f_{B_c}(s).$$

Exemple 10.2 Pour la loi géométrique de paramètre p , $\varphi_G(z) = z(1 - pz)^{-1}(1 - p)$, les lois continues associées sont exponentielles de paramètre $\mu_c = c(1 - p)$, $c > 0$. Réciproquement, à la loi exponentielle de paramètre μ , $f_X^*(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$, on peut associer des lois géométriques de paramètre $p = 1 - \frac{\mu}{c}$, $c > \mu$.

10.6 Exercices

- Calculer "l'exponentielle après" P_t plus précisément la solution de $P'_t = AP_t, P_0 = I$ pour $A = \begin{pmatrix} -2 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et "l'exponentielle avant" Q_t , plus précisément la solution de $Q'_t = Q_t A, Q_0 = I$. Est-ce qu'elles coïncident? Est-ce que une d'elles fournit un semigroup stochastique?
- Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ une chaîne de Markov en temps continu sur l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$. Supposons que la matrice infinitésimale (de taux de transitions) de X est donnée par

$$G = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

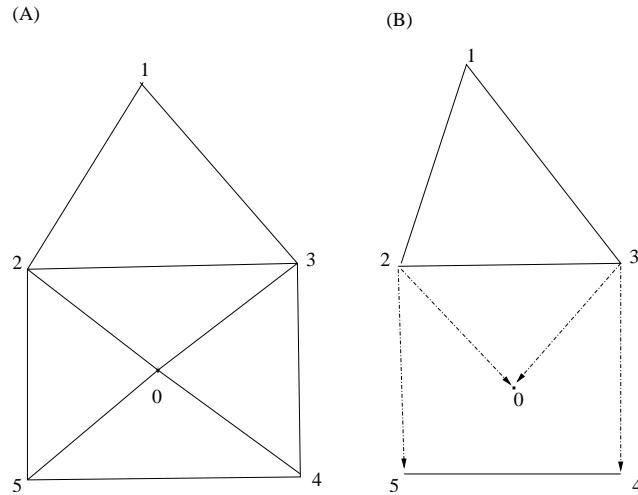
- Donnez la formule exacte, ainsi qu'une approximation des probabilités de transition infinitésimales $\mathbb{P}_i\{X_{dt} = j\}$ de la chaîne.
 - Quelles sont **approximativement** les probabilités de transition de la chaîne discrétisée associée au temps .1?
 - Quelles sont les probabilités de transition de la chaîne discrétisée associée aux temps de saut?
 - Trouvez la distribution stationnaire de ce processus.
 - Quelle est la loi conditionnelle de $T_3 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 3 | X_0 = 3\}$, en sachant que $X_0 = 3$?
 - Posant $T^{(3)} = \inf\{t > T_3 : X_t = 3\}$, donnez un système des équations pour $x_1 = E[T^{(3)} | X_0 = 1]$ et $x_2 = E[T^{(3)} | X_0 = 2]$. Résolvez les équations.
 - Calculez $E[T^{(3)} | X_0 = 3]$
 - Calculez, pour le processus absorbé en 3, $P_{i,j}(t) = \mathbb{P}[t \leq T^{(3)}, X(t) = j | X_0 = i], i = 1, 2$.
 - Calculez $\bar{P}_1(t) = \mathbb{P}[T^{(3)} \geq t | X_0 = 1]$ et $\bar{P}_2(t) = \mathbb{P}[T^{(3)} \geq t | X_0 = 2]$ à partir des équations de Chapman-Kolmogorov et à partir de la réponse précédente et vérifiez que les réponses coïncident. Vérifiez que $x_i = \int_0^\infty \bar{P}_i(t) dt, i = 1, 2$.
 - Soit $\widehat{X}_i, i \in \mathbb{N}$ la chaîne sous-jacente. Calculez les distributions de $T_{3,2} = \inf\{t \geq 0 : X_t = 2 | \widehat{X}_0 = 3, \widehat{X}_1 = 2\}, T_{3,1} = \inf\{t \geq 0 : X_t = 1 | \widehat{X}_0 = 3, \widehat{X}_1 = 1\}, T_{i,j} = \inf\{t \geq 0 : X_t = j | \widehat{X}_0 = i, \widehat{X}_1 = j\}$.
- Obtenez les équations de Chapman-Kolmogorov pour un processus des sauts Markovien, en conditionnant sur le moment de la première transition.
 - Obtenez les équations de Chapman-Kolmogorov, en conditionnant sur la position au moment $t+h$, pour h très petit. *Ind* : Commencez par le cas du processus de Poisson.
 - Soit X_t une file $M(\lambda)/M(\mu)/1$.
 - Donnez la matrice génératrice G pour le processus X_t .
 - Indiquer les valeurs des probabilités p et q pour que le nombre des clients augmente/diminue, au moments du premier saut à partir d'un état $n \geq 0$.

- (c) Calculez la distribution stationnaire de X_t .
- (d) Calculez, l'espérance t_i en sortant de $i \geq 1$ du temps T_0 jusqu'à la première arrivée en 0 ("busy period"), en utilisant le système de conditionnement $1 + \sum_j G(i, j)t_j = 0, \forall i \geq 1$.
- (e) Calculez l'espérance en sortant de 0 du temps \tilde{T}_0 jusqu'au premier retour en 0.
- (f) Calculez l'espérance $T_{0,s} = E_\pi[T_0]$ du temps stationnaire (c.-à-d. avec la distribution initiale stationnaire π) jusqu'à la première arrivée en 0.
5. Supposons que le nombre de clients X_s en attente dans une file $M(\lambda)/M(\mu)/1$ a atteint à un temps fixé 0 sa distribution stationnaire, c.-à-d. $\mathbb{P}[X_0 = k] = \rho^k(1-\rho), k = 0, 1, 2, \dots$, où $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Un client qui arrive au temps 0 restera dans le système pour un temps total (attente + service) $T = \sum_{i=1}^{X_0+1} S_i$, où $S_i, i = 1, \dots, X_0 + 1$ sont les temps de services du client et de ceux qu'il trouve en attente dans la file. a) Calculez la transformée de Laplace, l'espérance et la distribution du temps T dans le système du client qui arrive au temps 0. b) (*) Il s'avère que les clients en attente dans le tampon au temps 0 ont été infestés chacun par des extraterrestres, de telle manière que chacun donnera naissance tout au long de son attente à des nouveaux extraterrestres, après des temps exponentiels de taux λ . Soit $B_i(t)$ le nombre d'extraterrestres produits par le client i . Quel est l'espérance du nombre total $Z(t) = \sum_{i=1}^{X_0} B_i(t)$ des extraterrestres produits du temps 0 au temps t par les clients infestés ?
6. Pour X_s un processus Poisson à taux λ , conditionné sur $X_0 = x$, et T le temps de la première arrivée, calculez la transformée de Laplace $\hat{f}_T[\delta] = Ee^{-\delta T}$, $\delta \geq 0$ et le coût total de stockage discompté

$$v_\delta(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\delta s} X_s ds$$

Indication : Utilisez la décomposition $X_s = x + Y_s$, où Y_s est un processus Poisson conditionné sur $Y_0 = 0$. Soit $T^{(0)}$ le moment du premier saut. Alors, $Y_{T^{(0)}+s} = 1 + Y_s$.

7. Calculez la la distribution stationnaire du nombre de clients dans la file $M/M/s$ ($\pi_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}, n = 0, \dots, s; \pi_{n+k} = \pi_n \left(\frac{\rho}{s}\right)^k, k = 0, \dots, \pi(s) = \frac{Po(\rho, s-1)}{Po(\rho, s-1) + e^{-\rho} \frac{\rho^s}{s!(1-\rho/s)}}$)
8. Trouvez la distribution stationnaire du temps d'attente W dans les file $M/M/s, M/M/\infty$, et leurs transformées de Laplace.
9. Trouvez la fonction génératrice des moments du temps de séjour total d'un client dans une file $M(\lambda)/M(\mu)/1$, en supposant que la file est en regime stationnaire. *Indication : Utilisez la distribution stationnaire de la file $M(\lambda)/M(\mu)/1$, et la question précédente.*
10. Est-ce-que l'espérance stationnaire du séjour totale d'un client dans une file $M(\lambda)/M(2\mu)/1$ est plus grande que celle d'un client dans une file $M(\lambda)/M(\mu)/2$? Justifiez votre réponse.
11. Considérez une particule effectuant une **marche aléatoire simple** $X_t, t = 0, 1, 2, \dots$ sur le graphe (A) ci-dessous : c.-à-d. à chaque moment $t = 1, 2, \dots$, la particule se déplace vers l'un de ses voisins sur le graphe à sa position actuelle, avec la même probabilité pour chaque choix.
- (a) Calculer :



- i. L'espérance en sortant de 1 du nombre de pas T_0 jusqu'au noeud 0. *Indication* : Utiliser la symmetrie.
 - ii. L'espérance en sortant de 0 du nombre de pas \tilde{T}_0 jusqu'au premier retour en 0.
 - iii. Les probabilités stationnaires de chaque noeud. *Indication* : On peut utiliser les equations d'équilibre détaillé.
 - iv. La probabilité $x_2 = \mathbb{P}_2\{X_T = 1\}$, où $T = \min[T_1, T_0]$.
 - v. Les probabilités p_k en partant de 1 que la marche visite 0 exactement k fois ($k = 0, 1, 2, \dots$) avant le premier retour en 1.
- (b) À un moment donné, le passage sur certains arrêts du graphe devient impossible, ou possible seulement dans une direction, comme indiqué par des flèches dans le graphe (B). Plus précisément, la particule continue de choisir des destinations suivant le graphe (A) ("aveuglement"), mais les choix qui ne sont plus disponibles résultent dans un pas annulé, donc sur place.
- i. Donnez la matrice de transition de la marche.
 - ii. Identifiez les classes de la chaîne, et classifiez les en récurrentes et transitoires.
 - iii. Trouvez la distribution stationnaire de chaque classe récurrente.
 - iv. Est-ce que la limite au sens de Caesaro quand $n \rightarrow \infty$ de la matrice de transition apres n étapes P^n existe? Le cas échéant, trouvez-la.
12. Une particule décrit une marche aléatoire sur $E = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$: si la particule est en $i < n$, alors elle se déplace en $j = i + 1$, et si la particule est en $i > n$, alors elle se déplace en $j = i - 1$; si la particule est en $i = n$, alors elle se déplace en une position j choisie avec probabilités égales parmi les elements de E différentes de n . La position X_k au temps k constitue une chaîne de Markov.
- (a) Donner la matrice de transition.
 - (b) Déterminer la loi invariante de la chaîne.
 - (c) Calculer la position moyenne de la particule en regime stationnaire.
 - (d) Calculer l'espérance du temps de retour d'une particule qui part de n .

13. Soit une chaîne absorbante définie par la matrice de transition $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & | & 1 - p_1 - p_2 \\ 0 & p & | & 1 - p \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$ et la distribution initiale (α_1, α_2) . Trouvez l'espérance et la distribution du nombre des pas N jusqu'à l'absorption.
14. Des femmes et des hommes arrivent dans un magasin, après des temps fixes, unitaires. Chaque instant, une femme arrive avec probabilité λ_F , ou un homme arrive avec probabilité λ_H , ou il n'y a pas d'arrivée, avec probabilité $q = 1 - \lambda_F - \lambda_H$. a. Trouver la probabilité qu'une femme entre avant un homme. *Indication* : Conditionnez sur le premier instant, ou sur le nombre d'instant sans arrivées. b. Trouver la probabilité que deux femmes entrent avant un homme. c. Quelle est la probabilité qu'au moins deux hommes soient entrés consécutivement (pas forcément aux moments consécutifs), avant que trois femmes ne soient entrées consécutivement (pas forcément aux moments consécutifs). *Indication* : Considérez un processus de Markov sur l'espace des états : $(H1, H2, H3, \dots) \cup (F1, F2, F3, \dots)$, qui enregistre la longueur k du nombre des clients $k \in \{1, 2, \dots\}$ du même sexe entrés consécutivement jusqu'au temps t , et leur sexe (H/F); formulez des équations d'arrêt pour les états d'arrêt indiqués.
15. a) Une mouche effectue une marche cyclique sur les sommets $\{1, 2, 3\}$ d'un triangle, avec matrice de transition "circulante"

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \geq 0$ et $a + b + c = 1$. Il est facile de vérifier que la matrice de transition P^n est aussi "circulante" (c.-à-d. chaque ligne est déduite de la ligne précédente par une permutation cyclique de ses éléments vers la droite) et on dénote par (a_n, b_n, c_n) les éléments de sa première ligne.

- (a) Quelles sont les valeurs limites de (a_n, b_n, c_n) quand $n \rightarrow \infty$?
- (b) On cherche une formule explicite, aussi simple que possible, pour la probabilité $a_n = P^n(1, 1)$ qu'après n étapes, la mouche soit retournée au sommet 1 d'où elle est partie. Soit $v_n = (b_n, c_n)$. Trouvez une récurrence pour le vecteur v_n .
- (c) Résolvez cette récurrence et trouvez a_n , au cas $a = b = c = 1/3$ et au cas $b = c = 1/2$.
- (d) Résolvez la récurrence, au cas où la mouche a deux fois plus de chances de sauter dans le sens des aiguilles d'une montre, c.-à-d. $b = 2/3, c = 1/3$.
- (e) Généraliser au cas d'une marche cyclique sur les sommets d'un polygone avec k sommets (utilisant éventuellement votre langage formel de choix, comme `xmaxima,...`). *Ind* : Cela nous ramène à étudier, éventuellement l'aide de Maxima, les puissances des matrices circulantes stochastiques : $A := \text{matrix}([1-b-c, b, c], [c, 1-c-b, b], [b, c, 1-c-b])$; Vérifier que la matrice est entrée correctement en calculant $A1 = \text{subst}(1, b, A)$; $A2 = \text{subst}(0, b, A1)$; $A2^3$; **Note** : Maxima n'est pas capable maintenant de calculer puissances matricielles symboliques, et elle refuse de faire même les matrices diagonales; mais elle accepte les produits de Hadamard symboliques, et comme les deux coïncident, elle réussit aussi les produits matricielles symboliques,

avec un peu d'aide : V :eigenvectors(A) ; $V1$:V[2] ; $V2$:V[3] ; $V3$:V[4] ; VD :transpose(matrix(V1,V2, V3)) ; M :ratsimp(invert(VD).A.VD) ; An :ratsimp(VD.M^n.invert(VD

16. a) Quelle est la probabilité que la marche aléatoire simple est de retour en 0 après $2n$ pas ? b) Approximer cette quantité par la formule de Stirling $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$.
 c) (*) Démontrez la formule de Stirling.
17. (*) Marc et un groupe de $n - 1$ amis jouent un jeu. Chacun met un euro, et ensuite lance une monnaie biaisée, avec une probabilité de sortir "face" égale à p . La totalité de l'argent est partagé également entre ceux qui ont obtenu face (s'il n'y a aucune, l'argent est donné à une oeuvre charitable), et les piles perdent leur argent. a) Quelle est l'espérance du capital de Marc, après un tour ? b) (*) Quelle est l'espérance du capital après un tour pour un joueur choisi aléatoirement ?
18. Ruegg, 2.9 :10,5,6,14,13,11.

Solutions

1. (a) i. Soit

$$t_i = E_i T_0 = E_i[\text{nombre de pas jusqu'au noeud } 0]$$

La symétrie implique $t_2 = t_3$, $t_5 = t_4$, donc trois équations suffiront (au lieu de 5). En conditionnant sur le premier pas, on trouve que t_i satisfont :

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 + t_2 \\ t_2 &= 1 + \frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_2 + \frac{1}{4}t_5 \\ t_5 &= 1 + \frac{1}{3}t_5 + \frac{1}{3}t_2 \end{aligned}$$

ça donne : $t_5 = \frac{11}{3}$, $t_2 = \frac{13}{3}$, $t_1 = \frac{16}{3}$

- ii. $E\tilde{T}_0 = 1 + \frac{1}{4}(t_2 + t_3 + t_4 + t_5) = 1 + \frac{12}{3} = 5 (= \frac{1}{\pi_0})$
 iii. π_i sont proportionnels aux degrés v_i des sommets, c.-à-d. $\pi_i = \frac{v_i}{\sum_j v_j}$, donnant
 $(\pi_1 = 2/(2 + 4 * 3 + 3 * 2) = \frac{1}{10}, \pi_2 = 4/20 = \frac{1}{5}, \pi_0 = \frac{3}{20})$ (en vérifiant ainsi le théorème $E\tilde{T}_0 = \frac{1}{\pi_0}$).
 iv. Le système d'absorption, tenant compte de $x_2 = x_3$, $x_4 = x_5$ est :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4} \\ x_4 &= \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \end{aligned}$$

ça donne : $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_4 = \frac{1}{5}$.

v. $p_k = (\frac{2}{5})^k \frac{3}{5}$.

- (b) i. après la détérioration, la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Sans les pas sur place, elle serait

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ii. classes recurrentes : $\{0\}, \{4, 5\}$; classe transiente : $\{1, 2, 3\}$.
- iii. les distributions stationnaires des classes recurrentes : 1 et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- iv. Le système d'absorption pour les probabilités d'absorption dans la classe 0 est :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4} \\ x_3 &= \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

et $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$. La matrice des distributions asymptotique :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. (a) La matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) $\pi_k = \frac{k}{2(n-1)}\pi_n, \forall k < n$ et la symmetrie $\pi_k = \pi_{2n-k}$ impliquent $\pi_n(1 + \frac{(n-1)n}{2(n-1)}) = \pi_n(1 + \frac{n}{2}) = 1$ et $\pi_n = \frac{2}{2+n}, \pi_k = \frac{k}{(n+2)(n-1)}$
 - (c) $E_S[X_n] = n$
 - (d) $t_n = \frac{1}{\pi_n} \frac{2+n}{2}$
3. (a) La probabilité p_F satisfait

$$p_F = \lambda_F + (1 - \lambda_F - \lambda_H)p_F \Leftrightarrow p_F = \frac{\lambda_F}{\lambda_F + \lambda_H}$$

(b) \bar{p}_F^2

(c) Considerons la chaîne de Markov en temps discret qui enregistre la longueur du nombre des clients du même sexe entrés consecutivement et le type, ayant comme espace des états les suites $(H1, H2, H3, \dots) \cup (F1, F2, F3, \dots)$. En prenant en consideration seulement les temps quand la chaîne saute, pn a une marche aléatoire qui "avance" sur les hommes/femmes a.p. $p_H = 1 - p_F$ et p_F , et "change de sexe" outrement. Par exemple, si $\lambda_F = 2\lambda_H$, les deux probas sont $p_H = \frac{1}{3}, p_F = \frac{2}{3}$. En denotant par x_i, y_i la probabilité de notre événement en partant d'une suite des i femmes hommes, il faudra resoudre :

$$\begin{aligned} y_1 &= p_H + p_F x_1 \\ x_1 &= p_H y_1 + p_F x_2 \\ x_2 &= p_H y_1 \end{aligned}$$

Generalisant pour m hommes et n femmes et posant $S_{F,k} = \sum_{i=1}^k p_F^i, S_{H,k} = \sum_{i=1}^k p_H^i$, nous trouvont

$$y_1 = \frac{p_H^{m-1}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}, x_1 = \frac{p_H^m S_{F,n-2}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

et finalement

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^m (1 + p_F S_{F,n-2})}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}} = \frac{p_H^m S_{F,n-1}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

Pour $m = 2, n = 3$, on trouve :

$$y_1 = \frac{p_H}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}, x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$

et

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F + p_F^2)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$

5) a) L'équation de Chapman-Kolmogorov donne immédiatement une formule explicite : $P^n(1, 1)$. On note aussi que les marches cycliques ont la matrice de transition P circulante, et donc nous avons une décomposition spectrale bien-connue explicite, qui utilise les racines (complexes) de l'unité. Mais, on peut faire mieux. La matrice P^n est aussi circulante, et contient donc seulement deux inconnues : $b_n = P^n(1, 2), c_n = P^n(1, 3)$. Soit $b = P(1, 2), c = P(1, 3), a = P(1, 1) = 1 - b - c$ les probabilités après un pas. On trouve la récurrence : $\begin{pmatrix} b_{n+1} - 1/3 \\ c_{n+1} - 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & c - b \\ b - c & a - c \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} b_n - 1/3 \\ c_n - 1/3 \end{pmatrix}$ Le cas $b = c = 1/2$ et $a = b = c = 1/3$ donnent des récurrences "decouplées". Le cas $b = 2/3, c = 1/3$ est plus difficile. En utilisant l'ordinateur, on remarque que :

$$(b_n - 1/3, c_n - 1/3) = (1/3, 1/3) + 3^{-1-n/2} v_n$$

où $v_n = v_{n+12}$ est périodique.

- (d) a) X , le nombre total des faces a une distribution binomiale $B(n, p)$. Il y a deux possibilités : - que Marc tire une pile et perd, dans quel cas son gain sera 0, et qu'il tire une face, dans quel cas le gain sera $Y = \frac{n}{1+X'}$ où X' a une distribution binomiale $B(n, p)$. Donc, l'espérance du gain est

$$\begin{aligned} Y &= pE \frac{n}{1+X'} = p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} = p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} p^k q^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{1+k} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-1-k} = \sum_{j=1}^n C_n^j p^j q^{n-j} = 1 - q^n \end{aligned}$$

- b) Le gain espéré d'un "joueur aléatoire" $Y = Y(X)$ est 0 si $X = 0$, a.p. q^n . Au cas contraire, le "joueur aléatoire" est gagnant avec probabilité $\frac{X}{n}$ et perdant avec probabilité $1 - \frac{X}{n}$. Le gain espéré est toujours $(1 - q^n)E[\frac{X}{n}] = (1 - q^n)$. Finalement, cet exercice suggère la question générale du calcul des "sommes binomiales", comme par exemple

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2} C_{n-1}^i x^i$$

où $x = \frac{p}{q}$. Parfois, ces sommes peuvent être déduites à partir de l'identité $(1+x)^m = \sum_{i=0}^m C_m^i x^i$ en dérivant ou en intégrant. Mais, le proces d'intégration n'aboutit pas toujours à des sommes closes. Une somme $S_n = \sum_1^n f_n$ est une solution d'une relation de récurrence de premier ordre $S_n - S_{n-1} = f_n$ et donc la question de l'existence des formules closes pour f_n polynômes ou fonctions rationnelles est un cas particulier de la question de l'existence des formules closes pour les récurrences avec coefficients polynomiaux. Cette question est assez difficile, et le plus efficace est d'utiliser un logiciel symbolique. Ceux-ci nous informent s'il y a des formules closes dans la famille relativement simple des solutions "d'Alembertiennes", ou si non.

4. Soit X_t une chaîne de Markov absorbante, soit ∂ l'ensemble de ses états absorbantes, soit B, A une décomposition de l'ensemble des états transitoires, et soit

$$\mathbf{p}(k, B) = (p_x(k, B), x \notin \partial)$$

où

$$p_x(k, B) := \mathbb{P}_x \{ \text{exactement } k \text{ visites en } B \text{ avant l'absorbation en } \partial \}, x \notin \partial$$

- (a) Quel type de distribution on trouve pour $p_x(k, B)$, quand $B = \{x\}$? (Spécifiez les

paramètres). Quel est le résultat pour la chaîne associé à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-a & a & 0 \\ 1-b & 0 & b & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & x_4 & 1-x_1-x_2-x_4 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $B = \{3\}$, et en particulier pour $a = b = c = 1/2, x_1 = x_2 = x_4 = 1/4$ ("le papillon").

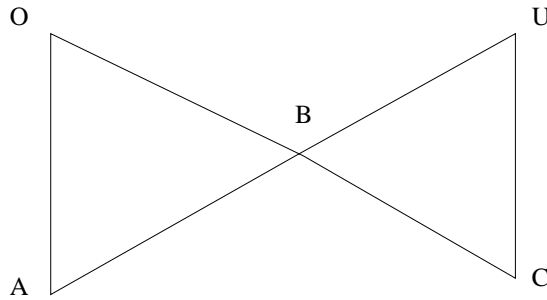


FIGURE 10.1 – Marche aléatoire simple sur le graphe papillon

- (b) Pour B quelconque, en conditionnant sur le premier pas, trouvez une relation entre les variables $p_x(k, B)$, $x \in A$, $k \in \mathbb{N}$, et finalement une récurrence vectorielle $\mathbf{p}(k) = M\mathbf{p}(k - 1)$, en spécifiant comment obtenir la matrice M à partir de la matrice P de transition de la chaîne. Vérifiez votre formule avec le cas $B = A$.
- (c) Retrouvez le résultat pour le "papillon généralisé" ci-dessus, dans le cas qu'on cherche la probabilité p_k en partant de $U = 5$ que la marche visite $O = 1$ exactement k fois ($k = 0, 1, 2, \dots$) avant le premier retour à U (les autres sommets seront libelés $A = 2, B = 3, C = 4$), **à partir de la formule générale**.
- (d) Considérez aussi le "papillon généralisé", en prenant $B = \{1, 2, 3\}$. Vérifiez pour cet exemple que la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(i, B) = 1, \forall i \in \{1, 2, 3\}$.
- (e) Ecrivez un program dans votre langage de choix qui calcule $\mathbf{p}(k, B)$ et une approximation $\mathbf{p}(k, B) \approx c\lambda^k$ pour une chaîne et ensemble B arbitraires et démontrez sa performance sur les exemples 3.5, 3.6 (pages 23-24) et ensembles B de votre choix.

Exercice 10.19 Une particule décrit une marche aléatoire sur $E = \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1, 2n\}$: si la particule est en $i < n$, alors elle se déplace en $j = i + 1$, et si la particule est en $i > n$, alors elle se déplace en $j = i - 1$; si la particule est en $i = n$, alors elle se déplace en 0 avec probabilité a , en $2n$ avec probabilité b , et avec probabilité $1 - a - b > 0$ à une position j choisie avec probabilités égales parmi les autres éléments de \bar{E} , différents de n . La position X_k au temps k constitue une chaîne de Markov.

- (a) Donner la matrice de transition.
- (b) Calculer les probabilités de ruine $\psi(k)$.
- (c) Calculer l'espérance du temps $T = \min[T(0), T(2n)]$.
- (d) Calculer l'espérance du temps de retour en n d'une particule qui part de n .
- (e) Déterminer la loi stationnaire de la chaîne.
- (f) Calculer la position moyenne de la particule en regime stationnaire.

Solution :

1. Quand $|B| = 1$, on trouve une distribution geometrique $p_x(k, \{x\}) = \lambda^{k-1}(1 - \lambda)$ où : $1 - \lambda = p_x(1, \{x\}) = Q(x, \partial(A) + \sum_{y \in A-B} p(x, y)P_y[T_{\partial(A)} < T_x]) = Q(x, \partial(A) + \sum_{y \in A-B} p(x, y)(1 - P_y[T_{\partial(A)} > T_x])$, et $\lambda = Q_{B,B} + \sum_{y \in A-B} p(x, y)P_y[T_{\partial(A)} > T_x] = Q_{B,B} + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1}Q_{A,B}$, car pour $k \geq 2$ on a :

$$p_x(k, \{x\}) = \sum_{y \in A-B} p(x, y)P_y[T_{\partial(A)} > T_x]p_x(k - 1, \{x\}) = \lambda p_x(k - 1, \{x\})$$

Pour le papillon, $B = \{3\}$, $\lambda_B = x_1 + x_2 + cx_4 = 5/8$ et pour $B = \{1\}$, $\lambda_B = 3/8$.

2. Il est convenable de partager $\mathbf{p}_k = (\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k)$, où $\mathbf{b}_k = (p_x(k, B), x \in B)$, $\mathbf{a}_k = (p_x(k, B), x \in A, x \notin B)$. On peut supposer qu'il y a un seul état absorbant (en "collant ensemble" tous les états absorbants), et soit

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} Q_A & Q_{A,B} & \mathbf{q}_A \\ Q_{B,A} & Q_B & \mathbf{q}_B \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

la partition de la matrice de transition contenant les états dans l'ordre $A - B, B, \partial$. On a $\mathbf{b}_0 = 0$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{q}_B + Q_{B,A}\mathbf{a}_0$ et

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{q}_A + Q_A\mathbf{a}_0 \implies \mathbf{a}_0 = (I - Q_A)^{-1}\mathbf{q}_A, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{q}_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1}\mathbf{q}_A$$

Pour $k \geq 2$, $x \in B$, $p_x(k, B) = \sum_{y \in A} P(x, y)p_y(k-1, B)$, et donc

$$\mathbf{b}_k = Q_B\mathbf{b}_{k-1} + Q_{B,A}\mathbf{a}_{k-1}$$

tant que pour $x \notin B$, $k \geq 1$, $p_x(k, B) = \sum_{y \in A} P(x, y)p_y(k, B)$ et donc

$$\mathbf{a}_k = Q_{A,B}\mathbf{b}_k + Q_A\mathbf{a}_k \implies \mathbf{a}_k = (I - Q_A)^{-1}Q_{A,B}\mathbf{b}_k$$

Comme

$$\mathbf{b}_1 = (I_B - Q_B)\mathbf{1}_B - Q_{B,A}\mathbf{1}_A + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1}((I_A - Q_A)\mathbf{1}_A - Q_{A,B}\mathbf{1}_B) = (I_B - M)\mathbf{1}_B$$

on trouve

$$\mathbf{b}_k = (Q_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1}Q_{A,B})\mathbf{b}_{k-1} \implies \mathbf{b}_k = M^{k-1}((I_B - M)\mathbf{1}_B)$$

où $M = Q_B + Q_{B,A}(I - Q_A)^{-1}Q_{A,B}$ est la matrice de transition de la "chaîne induite" sur B (où "complement de Shur" de A en Q). Quand $B = A$, on retrouve $\mathbf{b}_k = Q_B^{k-1}\mathbf{q}_B$.

3. En résolvant le système d'absorbtion pour p_A, p_B, p_C , on trouve $p_A = 3/4, p_B = 1/2, p_C = 1/4$. 5) Soit $p_{A,k} = \mathbb{P}_A\{\text{exactement } k \text{ visites en } U \text{ avant le retour en } O\}$, avec $p_{B,k}, p_{C,k}$ définies pareillement, et $\mathbf{p}_k = (p_{A,k}, p_{B,k}, p_{C,k})$. Ainsi, $\mathbf{p}_0 = (p_A, p_B, p_C)$ et $p_0 = \frac{1}{2}(p_{A,0} + p_{B,0}) = \frac{1}{2}(p_A + p_B)$. Pour $k \geq 1$, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{p}_k + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \\ \iff \mathbf{p}_k &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \\ \iff \mathbf{p}_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \end{aligned}$$

Les vecteurs propres à droite sont les colonnes de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, les valeurs propres correspondantes sont : 0, 0, 5/8 et le vecteurs propres de Perron-Frobenius à gauche est : $(0, 3/5, 3/5)$. Dés lors, $\mathbf{p}_k = (5/8)^{k-1}(p_B + p_C) \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ et $p_k = (5/8)^{k-1}(p_B + p_C)3/10$

Exercices 3.4.2, 3.4.4 et 3.4.6 de Karlin et Pinsky.

1. Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ un processus de Markov en temps continu, à matrice génératrice donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} -\beta_0 & \beta \\ \mathbf{b} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{b} = (-\mathbf{B})\mathbf{1}$ et $\beta_0 = \beta \mathbf{1}$. Montrez que le **temps de retour** au premier état, en partant du moment qu'on le quitte, a transformée de Laplace : $\hat{b}[s] = \beta (s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{b}$ et espérance $\bar{b} = \beta (-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{1}$, et que la probabilité stationnaire de cet état satisfait $\pi_0^{-1} = 1 + \bar{b}$ **Note : Dans le cas $b_0 = 1$, on retrouve la bien-connue relation du cas du temps discret $\pi_0^{-1} = E T_0$, où T_0 est le temps total de retour au premier état.**

2. Obtenez les transformés de Laplace

$$\mathbf{L}_{i,j} = E_i[e^{-\tau} 1_{\{X_\tau=j\}}], \quad i \in \mathcal{T}, j \in \partial$$

pour les temps d'absorbtion jointes avec la position d'absorbtion, pour un processus de Markov avec plusieurs états absorbants.

3. Calculez la distribution stationnaire de la file M/Ph/ ∞ .
4. Calculez la distribution stationnaire de la file M/Ph/1, et la probabilité $\pi(s)$ que les nouveaux arrivés ne doivent pas attendre.
5. (***) Calculez pour la file M/Ph/s la probabilité $\pi(s)$ que les nouveaux arrivés ne doivent pas attendre.
6. Trouvez les fonction génératrices et transformées de Laplace de N, Q, T, W pour la file M/G/1 (la formule de Pollaczek-Khyncin).
7. Calculez la transformée de Laplace de la période occupée d'une file M/Ph/1. Vérifiez cette formule avec le cas M/M/1.
8. Montrez que la transformée de Laplace de la période occupée d'une file M/G/1 satisfait **l'équation de Kendall** :

$$z[s] = \hat{b}[s + \lambda - \lambda z[s]] \quad (10.10)$$

9. Est ce que la file "B(atch)"M/Ph/ ∞ a une distribution de forme produit ?

Solutions :

1. $P_t = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t}(e^{-t} - 1 + t) \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, Q_t = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t}(e^t - 1 - t) \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

2. (a) Les probabilités de transition infinitésimales

$$P(dt) = e^{dt G} \approx I + dt G = \begin{pmatrix} 1 - 7dt & dt & 6dt \\ 2dt & 1 - 6dt & 4dt \\ dt & 2dt & 1 - 3dt \end{pmatrix}$$

(b)

$$P(,1) \approx \begin{pmatrix} .3 & .1 & .6 \\ .2 & .4 & .4 \\ .1 & .2 & .7 \end{pmatrix}$$

(c) Les probabilités de transition au moment du premier saut sont :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/7 & 6/7 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) $\pi = (\frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{8}{13})$

(e) La loi conditionnelle de $T_3 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 3\}$, en sachant que $X_0 = 3$, est la loi exponentielle à paramètre 3 (et moyenne 1/3).

(f) En conditionnant sur le premier saut, nous trouvons :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{7} + \frac{1}{7}x_2 \\ x_2 &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

donc le même système. De lors, $x_1 = \frac{7}{40}, x_2 = \frac{9}{40}$.

(g) Conditionnant au moment du premier saut

$$E[T^{(3)}|X_0 = 3] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{7}{40} + \frac{2}{3} \frac{9}{40} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{7+18}{40}\right) = \frac{1}{3} \frac{13}{8} = \frac{13}{24}$$

(h) Soit

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le générateur du processus absorbé en 3, et soit

$$\tilde{\tilde{G}} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

le générateur du processus observé seulement en 1, 2. Diagonalisons $\tilde{\tilde{G}} = L^{-1}Diag(\lambda_i)L$, où les lignes de la matrice L sont les vecteurs propres à gauche. Ici, les valeurs propres, données par $\lambda^2 + 13\lambda + 40 = (\lambda + 8)(\lambda + 5) = 0$ sont -8 et -5 avec vecteurs propres $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Finalement,

$$\tilde{\tilde{P}}(t) = L^{-1}Diag(e^{\lambda_i t})L$$

(i) Les probabilités demandées satisfont $\bar{P}_i(t) = 1 - P_{i,3}(t), i = 1, 3$, où $P_{i,3}(t)$ sont les probabilités de transition du processus absorbé avec générateur

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A. Par la question precedente, :

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} = L^{-1} \text{Diag}(e^{\lambda_i t}) L \mathbf{1},$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-8t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-8t} \\ 2e^{-5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2e^{-5t}/3 + e^{-8t} \\ 4e^{-5t}/3 - e^{-8t} \end{pmatrix}$$

et $x_1 = \frac{2}{3} \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \frac{1}{8} = \frac{7}{40}, x_2 = \frac{9}{40}$. B. Posons $p_i(t) = \bar{P}_{i,3}(t) = 1 - P_{i,3}(t)$ pour les probabilités de non-absorption dans la colonne fixe 3. On a $p_1(0) = p_2(0) = 1$ Comme $P_{3,3}(t) = 1$, l'équation Chapman-Kolmogorov $P' = GP$ donne pour la troisième colonne :

$$\begin{aligned} (1 - p_1(t))' &= -7(1 - p_1(t)) + (1 - p_2(t)) + 6 \\ (1 - p_2(t))' &= 2(1 - p_1(t)) + -6(1 - p_2(t)) + 4 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} p_1(t)' &= -7p_1(t) + p_2(t), p_1(0) = 1 \\ p_2(t)' &= 2p_1(t) - 6p_2(t), p_2(0) = 1 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} = e^{t\tilde{G}} \mathbf{1}$$

où \tilde{G} denote le générateur avec la colonne et ligne d'absorption 3 enlevée.

3. Soit $j \in \mathbb{N}$, on veut calculer $p_j(t) = P[X_t = j]$. Dans ce qui suit on conviendra de noter $p_{-1}(t) = 0$. On a pour tout $h > 0$:

$$\begin{aligned} p_j(t+h) &= P[X_{t+h} = j] = \sum_{i=0}^j P[X_{t+h} = j \text{ et } X_t = i] \text{ car } X_t \leq X_{t+h} \text{ d'après (1)} \\ &= \sum_{i=0}^j P([X_{t+h} - X_t = j - i] \cap [X_t = i]) \\ &= \sum_{i=0}^j P[X_{t+h} - X_t = j - i] P[X_t = i] \text{ car } (X_t)_{t \geq 0} \text{ est un P.A.I.} \\ &= \sum_{i=0}^j p_{j-i}(h) p_i(t) \text{ d'après (2)} \\ &= (1 - \lambda h) p_j(t) + \lambda h p_{j-1}(t) + h \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{p_j(t+h) - p_j(t)}{h} = \lambda (p_{j-1}(t) - p_j(t)) + \varepsilon(h)$$

En passant à la limite ($h \rightarrow 0$), on obtient alors :

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ p_j'(t) = \lambda (p_{j-1}(t) - p_j(t)) \text{ si } j \neq 0 \end{cases}$$

4. c) On trouve $\pi_i = \rho\pi_{i-1}, i = 1, 2, \dots$, et donc $\pi_i = \rho^i\pi_0$ avec $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. d) $t_1 = \frac{1}{\mu-\lambda}$. e) Remarquez l'identité $t_0P_0[X_1 \neq 0] = \pi_0^{-1}$, valable pour toutes les chaînes ergodiques.
5. a) $S_i, i = 1, \dots, X_0 + 1$ sont des variables exponentielles de paramètre μ . On trouve

$$Ee^{-sT} = Ee^{-s\sum_{i=1}^{X_0+1} S_i} = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^{k-1} \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^k = (1-\rho)\frac{\mu}{\mu+s}\varphi\mu + s\mu(1-\rho) + s = \frac{(1-\rho)}{\mu(1-\rho)}$$

et donc T est exponentielle avec paramètre $\mu(1-\rho)$. b) $E\sum_{i=1}^{X_0} B_i(t) = EB_1(t) EX_0 = \lambda t \varphi\rho 1 - \rho$

6. Le temps de la première arrivée étant exponentiel, $Ee^{-\delta T} = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}$. Conditionnant sur le temps de la première arrivée, on trouve d'abord $v(0) = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}(\frac{1}{\delta} + v(0))$ et alors : $v(0) = \frac{\lambda}{\delta^2}$. En suite, $v(x) = \frac{\delta}{\lambda+\delta}\frac{1}{\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta}v(x+1), \dots$
7. (a)
(b)
(c) On trouve $\pi_2 = \rho\pi_1, \pi'_2 = \rho'\pi'_1$. Soit $k = \pi_0 + \pi_1 + \pi'_1$. Eliminant π_2, π'_2 , on arrive à :

$$\begin{aligned}\lambda pk &= (\lambda + \mu)\pi_1 \\ \lambda p'k &= (\lambda + \mu')\pi'_1 \\ k + \rho\pi_1 + \rho'\pi'_1 &= 1\end{aligned}$$

et donc $\pi_1 = \varphi k p \rho 1 + \rho, \pi'_1 = \varphi k p' \rho' 1 + \rho', \pi_0 = \varphi k p 1 + \rho + \varphi k p' 1 + \rho'$ avec $k = (1 + \varphi p \rho^2 1 + \rho + \varphi p' (\rho')^2 1 + \rho')^{-1}$.

10.7 Contrôle continu Processus de Markov 2013

1. Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ un processus de Markov en temps continu sur l'ensemble \mathbb{N} , avec générateur infinitésimal $Gf(x) = \mu_{-1}(f(x-1) - f(x)) + \mu_2(f(x+2) - f(x)), x \geq 1$ avec $\mu_{-1} = 12/13, \mu_2 = 1/13$, et avec $Gf(0) = \mu_2(f(2) - f(0))$. a) Calculez la distribution stationnaire de X_t . b) Calculez l'espérance $t(x) = E_x T$, où $T = T_0 = \inf\{t : X(t) \leq 0\}$ est le temps de vidage, ainsi que le coût de vidage $c(x) = E_x \int_0^T X_s ds$, en résolvant les équations de récurrence $Gc(x) + h(x) = 0, x \geq 1, c(0) = 0$ où $h(x) = 1$ et $h(x) = x$, respectivement.
2. Une particule décrit une marche aléatoire en temps continu sur $E = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$: si la particule est en $i < n$, alors elle se déplace en $j = i+1$ à taux λ , et si la particule est en $i > n$, alors elle se déplace en $j = i-1$ à taux λ ; si la particule est en $i = n$, alors elle se déplace à taux total μ , vers une position j choisie avec probabilités égales $\frac{1}{2n-2}$ parmi les éléments de E différentes de n . La position X_k au temps k constitue un processus de Markov en temps continu.
- (a) Donner la matrice génératrice.
(b) Déterminer la loi invariante de la chaîne.
(c) Calculer l'espérance t_i du temps d'atteinte de n d'une particule qui part de $i < n$.
(d) Calculer l'espérance du temps de retour t_n d'une particule qui part de n .

Solutions :

1. a) La distribution stationnaire satisfait est de la forme $\pi_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$, ou r_i satisfont $12r^2 - r - 1 = 0$, et sont $\frac{-1}{4}, \frac{1}{3}$. Finalement, $\pi_n = A_1 (\frac{-1}{4})^n + A_2 (\frac{1}{3})^n$, et $\pi_1 = \pi_0 \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu - 1}$ ($\iff \pi_{-1} = 0$) $\implies \pi_n = \frac{5}{14} (\frac{-1}{4})^n + \frac{10}{21} (\frac{1}{3})^n$. b) Nous devons resoudre

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}c)(x) + h(x) &= 0 \\ c(0) &= 0 \\ c(x) &\text{ accroit non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

On décompose $c(x) = c_h(x) + p(x)$ où $c_h(x) = A + A_1 r_1^x + A_2 r_2^x$, avec $A_1 = A_2 = 0$ (car $|r_i| > 1$), et $p(x) = Bx$ pour la première question, et $p(x) = x(Bx + B_1)$ pour la deuxième. On trouve par la méthode des coefficients indeterminés que les solutions sont $t(x) = \frac{13}{10}x, c(x) = \frac{13}{20}x(x + \frac{8}{5})$.

2. (a) La matrice génératrice est :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline w & w & \dots & -\mu & \dots & w & w \\ \hline \dots & 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

où $w = \frac{\mu}{2(n-1)}$.

- (b) On trouve $\pi_k = k \frac{w}{\lambda} \pi_n, \forall k < n$. La symmetrie $\pi_k = \pi_{2n-k}$ et normalization impliquent $\pi_n (1 + \frac{(n-1)n}{2(n-1)} \frac{\mu}{\lambda}) = \pi_n (1 + \frac{n\mu}{2\lambda}) = 1$ et $\pi_n = \frac{2\lambda}{2\lambda + n\mu}$
- (c) t_i satisfont $\tilde{G}t_i + 1 = 0, i \neq n \implies t_i = \frac{n-i}{\lambda}$
- (d) $t_n = \frac{1}{\mu} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-1} \frac{n-i}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{n}{2\lambda} = \frac{1}{\mu} (1 + \frac{n\mu}{2\lambda})$. En effet, $\pi_n t_n = \frac{1}{\mu}$.

Chapitre 11

Les processus semi-markoviens de sauts

11.1 Un exemple de modélisation Markovienne

Illustrons la modélisation Markovienne par un exemple :

Exemple 11.1 *Un système est composé de trois machines identiques, dont une seule travaille à un moment donné. Quand une machine se casse, une autre la remplace, s'il existe des machines en état de fonctionnement. Il y a aussi un réparateur, qui peut être appelé seulement quand deux machines sont cassées. Une fois venu, le réparateur restera jusqu'au moment où toutes les machines sont réparées. Mais, dans le cas où toutes les machines sont cassées, une catastrophe arrivera. Quelle est la distribution du temps jusqu'à la catastrophe ?*

R : Nous allons répondre à cette question d'abord dans le cas le plus simple quand les temps de fonctionnement et de réparation sont exponentielles, qui est immédiatement abordable par la théorie des processus de Markov. En suite nous allons aussi aborder le pb. pour des temps de fonctionnement et de réparation de type phase, ou, plus généralement, avec transformée de Laplace rationnelle (dans le cas général des distributions arbitraires, on pourrait utiliser finalement des approximations rationnelles).

11.2 Mise en scène

Pour mettre en place le décor, considérons un processus stochastique X_t en temps continu, sur un espace d'états \mathcal{E} fini ou dénombrable, appelé **processus de sauts**. On note $\mathcal{E} = \{e_i; i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$, et on munit \mathcal{E} de la tribu $\mathcal{P}(\mathcal{E})$, l'ensemble des parties de \mathcal{E} . Souvent, on identifie l'espace d'états \mathcal{E} fini avec l'ensemble des indices I (i.e on appelle les états par leur indice). Nous aimerions enrichir le modèle des chaînes de Markov, pour qu'il puisse accommoder la possibilité des temps de transition aléatoires $t^{(i)}, i = 1, 2, 3, \dots$ d'un état à l'autre, suivant une matrice des distributions inconnues

$$F_{x,y}(t) := P[t^{(1)} \leq t | X(0) = x, X(t_+^{(1)}) = y]$$

(qu'il faudra estimer). Un tel processus défini par une matrice stochastique des probabilités de transition P est une matrice des distributions $F(t)$, contenant les lois des temps de saut, conditionnées par le point de départ et d'arrivée, s'appelle **semi-markovien**. Nous étudierons surtout le cas particulier des temps de saut exponentielles $F_{x,y}(t) = 1 - e^{-\mu(x)t}, \forall y$, qui est le seul à satisfaire la propriété de Markov en temps continu, par sa propriété d'absence de mémoire !

Un processus markovien de renouvellement est défini par une suite des pairs des variables

$$\{(X_n, T_n), \quad X_n \in E = \{1, 2, \dots\}, \quad T_n \in \mathbb{R}_+, \quad n \geq 0\}$$

representant respectivement les positions d'un processus de sauts sur un ensemble fini ou dénombrable E , et les temps de transition. Les distributions jointes de X_n et des temps de transition entre les sauts sont définies par des "noyaux"

$$\mathbf{A}_n(t) = \{K_{i,j,n}(t) = \mathbb{P}[X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t | X_n = i], \quad i, j \in E, \quad n \geq 0\}$$

tg les matrices $\mathbf{P}_n := \mathbf{A}_n(\infty)$ sont stochastiques, et les fonctions $F_{i,j,n}(t) = A_{i,j,n}(t)/A_{i,j,n}(\infty)$ sont nondecroissantes, continues à droite. Nous traiterons seulement le cas homogène, défini par un seul noyau

$$\mathbf{A}(t) = \{A_{i,j}(dt) = \mathbb{P}[X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t | X_n = i], i, j \in E\}, \quad \forall n \geq 0.$$

Soit $\mathbf{A}^*(z)$ la matrice des **transformées de Laplace/transmittances**. Le noyau factorise donc en deux composants

$$\{A_{i,j}(t) = P_{i,j}F_{i,j}(t), i, j \in E\},$$

qui representent respectivement les distributions de la chaîne X_n des sauts, et les distributions des temps de transition entre les sauts T_n .

Définition 11.1 *Un processus markovien de renouvellement homogène de transmittances $\mathbf{Q}^*(z)$ est un processus défini par une matrice des distributions*

$$K_{i,j}(t) = P_{i,j}F_{i,j}(t),$$

tg $\mathbf{P} = \mathbf{K}(\infty)$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov, et $F_{i,j}(t)$ sont des distributions (des temps de transition entre les sauts). Soit N_t les processus de comptage associé (comptant le nb. des sauts jusqu'au temps t). Le processus en temps continu

$$Z_t = X_{N_t}$$

est appelé processus semi-markovien.

Rq : La modélisation semi-markovienne offre une flexibilité considerable. En separant les probabilités de transition $p_{i,j}$ de la chaîne sous-jacente des distributions $F_{i,j}(t)$ des temps de transition, elle permette que ceci soient arbitraires et dependant aussi des points d'arrivée des sauts (pendant que dans la modélisation markovienne $1 - F_{i,j}(t) = e^{g_{i,i}t}, \forall j \in E$).

11.3 Transformés de Laplace des temps de premier passage pour les processus semi-markoviennes (*)

Comme vu, pour les distributions fe type phase, on a toutes les transformées de Laplace des temps d'absorbtion

$$l_i(s) = \left((s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{b} \right)_i, \forall i \in \mathcal{T},$$

à partir de \mathbf{B} . Il est quand même profitable de reformuler ce résultat en fonction de la matrice génératrice \mathbf{G} , car ça permet de donner des extensions qui continuent à etre vraies pour les processus **semi-Markoviennes**!

Corollaire 11.1 (*) **Transformées de Laplace des temps de premier passage, en termes du générateur.** Soit X_t un processus de Markov des sauts avec un état absorbant, à matrice génératrice (de taux de transitions) donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\mathbf{R}_s = (s\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}$$

sa résolvante. Alors, les transformées de Laplace $l_i(s) \forall i \in \mathcal{T}$ du temps de passage à état absorbant sont données par :

$$l_i(s) = \frac{R_s(i, \partial)}{R_s(\partial, \partial)} \forall i \in \mathcal{T}.$$

De plus, une formule similaire est valable pour chaque temps de premier passage entre deux états i, j d'un processus de Markov des sauts :

$$l_{i,j}(s) = \begin{cases} \frac{R_s(i,j)}{R_s(j,j)} & \forall i \neq j \in E \\ 1 - \frac{1}{R_s(i,i)} & \forall i \in E \end{cases}$$

Exercice 11.1 a) Spécifiez les chaînes "discretisés" obtenues en regardant la file d'attente $M/G/1$ aux temps des départs et la file $G/M/1$ aux temps d'arrivé sont des chaînes de Markov en temps discret, en donnant leur matrices de transition. b) Quelles sont les matrices de transition des discretisés des files $M/G/1/K$ et $G/M/1/K$?

Sol b) : Pour la file $M/G/1/K$, posons $p_k = \mathbb{P}\{k \text{ arrivés pendant un service}\}$ et $P_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$ pour le premier cas.

$$G = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & \cdots & P_{K+1} \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & \cdots & P_{K+1} \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & P_K \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & P_{K-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & p_1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_0 & P_1 \end{pmatrix}$$

Pour la file $G/M/1/K$, posons $p_k = \mathbb{P}\{k \text{ services entre deux arrivés}\}$ pour le deuxième cas et $P_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$ pour le premier cas...

Exercice 11.2 Essayez les exercices les plus simples des chapitres antérieurs, en supposant des temps des sauts non-exponentielles.

Chapitre 12

Qu'est ce qu'il y aura dans l'examen ?

12.1 Examen d'entraînement 1.

1. L'espace des états d'une chaîne est $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 & 0 & 1-a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

- (a) Tracez le graphe de communication et identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrentes et transitoires. Y'a-t-il des classes périodiques ?
 - (b) Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.
 - (c) Trouvez la limite quand $n \rightarrow \infty$ de la matrice de transition après n étapes P^n
2. Pour une **marche aléatoire** X_t , $t = 0, 1, 2, \dots$ **sur le graphe cubique** ci-dessous, calculer :

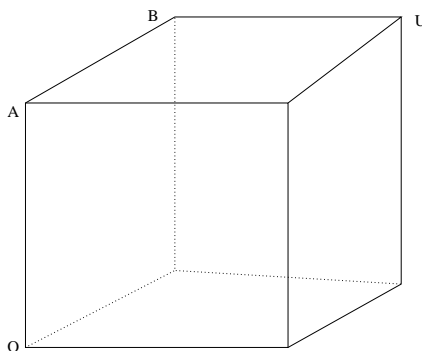


FIGURE 12.1 – Marche aléatoire simple

- (a) L'espérance en sortant de U du nombre de pas T_O jusqu'au noeud O . *Indication* : Utiliser la symétrie.
- (b) Les probabilités stationnaires du chaque noeud.

- (c) L'espérance en sortant de O du nombre de pas \tilde{T}_O jusqu'au premier retour à O .
- (d) La probabilité $p_A = \mathbb{P}_A\{X_T = U\}$, ou $T = \min[T_U, T_O]$.
- (e) La probabilité p_k en partant de O que la marche visite U exactement k fois ($k = 0, 1, 2, \dots$) avant le premier retour à O . Vérifier la somme $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$.
3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $\{1, 2\}$, de distribution initiale $\mathbf{c}_0 = (p, 1 - p)$ et de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1 - a & a \\ b & 1 - b \end{pmatrix}$
- (a) Calculez $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 2\}$, $\mathbf{c}_1(2) = \mathbb{P}\{X_1 = 2\}$, $\mathbb{P}\{X_0 = 2 | X_1 = 2\}$, et $\mathbb{P}\{X_0 = 2, X_1 = 1, X_4 = 2\}$.
- (b) Trouvez toutes les lois stationnaires $\boldsymbol{\pi}$ de la chaîne donnée (s'il y en a plus d'une seule). Spécifiez, en justifiant, si la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{c}_0 P^n$ existe pour la chaîne donnée. Si c'est le cas, quelles sont les limites $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{X_n = 2\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{X_n = 2, X_{n+1} = 2\}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{X_n = 2 | X_{n+1} = 2\}$?
- (c) Étant donné des coûts de stockage per unité de temps $h(1), h(2)$, calculez le coût moyen stationnaire

$$E_{\boldsymbol{\pi}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i)$$

ou $E_{\boldsymbol{\pi}}$ denote l'espérance avec distribution initiale de X_0 égale à $\boldsymbol{\pi}$.

4. Soit $Y_i, i = 1, \dots$, une suite des lancées de dé indépendantes. Déterminer dans les exemples suivantes si la suite X_n est une chaîne de Markov, en donnant (si possible) la matrice de transition et le graph de communication. Classifier les classes en récurrents et transitoires et calculer si possible la limite $\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$
- (a) Le maximum de résultats $X_n = \max_{1 \leq i \leq n} Y_i$
- (b) Le nombre cumulatif de non 6, après le temps n , jusqu'au prochain 6.
- (c) $X_n = Y_n + Y_{n-1}$
- (d) $X_n = \max_{1 \leq i \leq n} S_i$, ou $S_i = \sum_{k=1}^i Y_k$ et
- (e) $X_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$

Solutions :

1. (a) Classes récurrentes : (1) et (6, 7). Classe transitoire, nonpériodique : (2, 3, 4, 5).
- (b) Les distribution stationnaire des classes récurrentes sont (1) et $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
- (c) La limite quand $n \rightarrow \infty$ de la matrice de transition après n étapes P^n est

$$P_{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_{2,6} & \frac{2}{3}b_{2,6} \\ b_{3,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_{3,6} & \frac{2}{3}b_{3,6} \\ b_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_{2,6} & \frac{2}{3}b_{2,6} \\ b_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_{2,6} & \frac{2}{3}b_{2,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

où $b_{2,1} = \frac{2a}{2-b}$, $b_{3,1} = \frac{a}{2-b}$ et $b_{2,6} = 1 - b_{2,1}$, $b_{3,6} = 1 - b_{3,1}$.

3) (a)

$$\frac{(1-p)(1-b)}{(1-p)(1-b) + p a}$$

(b) Loi stationnaire : $(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$

$$\frac{\frac{a}{a+b}}{1-b}$$

(c)

$$\frac{b}{a+b}h(1) + \frac{a}{a+b}h(2)$$

12.2 Examen d'entraînement 2

1. Soit $X_t = x + \sum_{i=1}^t Z_t$ une marche sur les nombres naturels, avec la distribution de chaque pas Z_t donnée par $p_k = P[Z_t = k]$, avec : $\{p_1 = \frac{6}{7}, p_{-1} = 0, p_{-2} = \frac{1}{7}\}$. a) Vérifier si $E[Z_t] > 0$. b) Calculer les probabilités de ruine $\psi_x, x \in \mathbb{N}$. c) Vérifier la positivité du résultat. d) Calculer l'espérance du temps de ruine pour la marche sur les nombres naturels, avec la distribution de chaque pas Z_t donnée par : $\{p_{-1} = \frac{6}{7}, p_1 = 0, p_2 = \frac{1}{7}\}$ e) (*) Calculer l'espérance du temps de ruine pour la marche avec la distribution de chaque pas Z_t donnée par : $\{p_1 = \frac{6}{7}, p_{-1} = 0, p_{-2} = \frac{1}{7}\}$, en supposant que ce temps est fini (en conditionnant sur le cas où la ruine arrive).
2. **La file d'attente d'un bus avec capacité infinie.** Soit X_t une file d'attente $M(\lambda)/M(\mu)/1$, dans la quelle le serveur **sert chaque fois simultanément tous les clients** qu'il trouve en attente dans le tampon (arrivés dans la file après le début de son dernier service).
 - (a) Dessinez le graph de transitions du processus X_t , et donnez sa matrice génératrice.
 - (b) Indiquer les valeurs des probabilités $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ pour que le nombre de clients augmente/diminue, au moment du premier saut à partir d'un état $n \geq 0$.
 - (c) Calculez la distribution stationnaire de X_t .
 - (d) Formulez et résolvez le système de conditionnement pour les espérances $t_k = E_k T_0$ en sortant de $k \geq 1$ du temps T_0 (jusqu'à l'arrivée en 0 –la pause café du serveur).
 - (e) Calculez l'espérance $t_S = E_S T_0$ du temps stationnaire (avec distribution initiale stationnaire) jusqu'à la première arrivée en 0.
 - (f) Calculez l'espérance $\tilde{t}_0 = E_0[\tilde{T}_0]$ en sortant de 0 du temps \tilde{T}_0 jusqu'au premier retour en 0.

- (g) Considérez maintenant une file d'attente où il y a aussi des arrivées des couples, à taux λ_2 . Formulez et résolvez le système de conditionnement pour les espérances $t_k = E_k T_0$. Trouvez $\pi_k, k = 0, 1, 2$, par exemple en utilisant l'identité

$$\tilde{t}_k \pi_k = t^{(k)}, k = 0$$

où $t^{(k)}$ est l'espérance du temps passé en k jusqu'au premier saut.

- (h) (*) Reprenez les questions précédentes pour une chaîne de Markov représentant le nombre de clients en attente dans un arrêt de bus, en temps discret, en supposant qu'à chaque instant $t = 1, 2, \dots$ une seule personne arrive (ou pas) avec probabilité $p < 1$, et en suite le bus arrive (ou pas) avec probabilité $q < 1$, et prend tous les voyageurs (le dernier arrivé inclu). Dessinez le graph de transitions de ce processus, en indiquant les probabilités λ et μ pour que le nombre de voyageurs augmente et diminue respectivement, ainsi que la probabilité z pour que ce nombre reste inchangé. Donnez la matrice des probabilités de transition pour la chaîne X_t . Reprenez ensuite les autres questions ci-dessus.
3. On lance une pièce de monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à q et celle de sortir pile égale à $p = 1 - q$, jusqu'à ce qu'on obtient une suite pile-face-pile (arrivées consécutivement). Trouvez l'espérance t du temps jusqu'à l'arrêt, (c.-à-d. le nombre de jets N , en incluant le dernier). *Indication* : On peut utiliser un processus de Markov qui retient l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu (et qui contient dans ce cas l'état final désiré, et tous ses préfixes). Reprenez cette question, en supposant que les temps d'arrivée d'un nouveau résultat ont des distributions exponentielles avec des paramètres $\lambda_P, \lambda_F, \lambda_{PF}$ (qui dépendent des dernières deux états).
4. Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ un processus de Markov en temps continu sur l'ensemble \mathbb{N} , avec générateur infinitésimal $Gf(x) = \mu_1(f(x+1) - f(x)) + \mu_{-1}(f(x-1) - f(x)) + \mu_{-2}(f(x-2) - f(x)), x \geq 2$ avec $\mu_1 = 1/2, \mu_{-1} = 1/8, \mu_{-2} = 3/8$, et avec les passages impossibles en 1 et 0 étant anulés (c.-à-d. $Gf(1) = \mu_1(f(2) - f(1)) + \mu_{-1}(f(0) - f(1))$ et $Gf(0) = \mu_1(f(1) - f(0))$). Résolvez les équation de récurrence $Gc(x) + h(x) = 0, x \geq 1, c(0) = 0$ satisfaites par le temps de vidage $T = T_0 = \inf\{t : X(t) \leq 0\}$ et le coût de vidage $c(x) = E_x \int_0^T X_s ds$, obtenues respectivement pour $h(x) = 1$ et $h(x) = x$. Montrez que

$$c(x) = t(x) \left(\frac{x+1}{2} + \gamma \right)$$

où $\gamma = E_{ss} X_t$ est le coût moyen stationnaire de ce processus. Donnez une explication probabiliste de la partie $w(x) = t(x) \frac{x+1}{2} = c(x) - \gamma t(x)$.

5. On lance une monnaie biaisée jusqu'à la première fois quand une pile arrive après un nombre impaire de faces. Trouvez l'espérance n du nombre de pas de ce jeu, tenant compte aussi de la dernière pile.

Solutions :

1. Les probabilités de ruine satisfont $\psi_x = \frac{6}{7}\psi_{x+1} + \frac{1}{7}\psi_{x-2}, x \in \mathbb{N}$. Elles sont des combinaisons de puissances ρ_x , avec ρ une racine de

$$\frac{6}{7}\rho^3 - \rho^2 + \frac{1}{7} = (\rho - 1) \left(\frac{6}{7}\rho^2 - \frac{1}{7}\rho - \frac{1}{7} \right) = \frac{6}{7}(\rho - 1)(\rho - 1/2)(\rho + 1/3)$$

$\psi_x = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^x + A_2 \left(\frac{-1}{3}\right)^x$ satisfait $\psi_0 = \psi_{-1} = 1$ ssi $A_1 = 4/5, A_2 = 1/5$.

2. (a)

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Le graph de communication est :

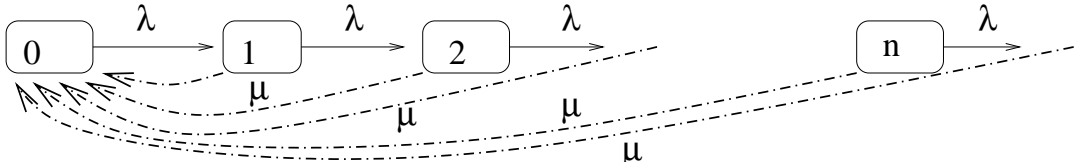


FIGURE 12.2 – Exe 2 : Le serveur sert tous les clients

- (b) En temps continu, $\hat{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$, $\hat{\mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$. En temps discret, la pb. que la file augmente est $\hat{\lambda} = p(1 - q)$ et la pb. que la file se vide est $\mu = q$. La pb. que la file reste inchangé est $z_0 = 1 - \lambda$, et $\forall n \geq 1, z_n = z = 1 - \lambda - \mu = (1 - p)(1 - q)$.
- (c) En temps discret, on trouve $\pi_i = \lambda \pi_{i-1} + z \pi_i \iff \pi_i = \tilde{\lambda} \pi_{i-1}, i = 1, 3, \dots$, avec $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$, et donc $\pi_i = \tilde{\lambda}^i \pi_0$, où la constante de normalisation est $\pi_0 = 1 - \tilde{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$. En temps continu, même réponse.
- (d) Pour le pb. d'absorption, on résout le système $t_0 = 0, \tilde{G}t_k = 0, k \neq 0$, où \tilde{G} denote la matrice de transition sur les états transients (avec la ligne et colonne de 0 enlevées). $\lambda t_{k+1} - (\lambda + \mu)t_k + 1 = 0, k = 1, 2, \dots$ donne $t_1 = t_2 = \dots = \mu^{-1}$.
- (e) $t_S = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\mu}$
- (f) Soit $T^{(1)}$ le moment du premier saut ("la période de vacance/idle period"), et soit $t^{(0)} = E[T^{(1)} | X(0) = 0] = \lambda^{-1}$ son espérance. Alors, $\tilde{t}_0 = t^{(0)} + E[t_{X(T^{(1)})}] = t^{(0)} + t_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\mu}$. Remarquez que l'identité $\tilde{t}_k \pi_k = t^{(k)}$, valable pour toutes les chaînes ergodiques, est satisfaite ici avec $k = 0$.
- (g) Pour un autre exemple, en ajoutant arrivées des couples à taux λ_2 $t_0 = t^{(0)} + \mu^{-1}$ où $t^{(0)} = (\lambda + \lambda_2)^{-1}$, et $\pi_0 = \frac{1}{1 + \mu^{-1}/t^{(0)}} = \frac{\mu}{\mu + \lambda + \lambda_2} \iff \pi_0(\lambda + \lambda_2) = (1 - \pi_0)\mu$.
Note : Par récurrence, il suit que $\pi_0 = \hat{\mu} = \frac{\mu}{\mu + \lambda + \lambda_2}$, $\pi_1 = \hat{\lambda} \pi_0 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda + \lambda_2} \pi_0$, $\pi_2 = (\hat{\lambda}^2 + \hat{\lambda}_2) \pi_0$, $\pi_3 = (\hat{\lambda}^3 + 2\hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}) \pi_0, \dots$ En general, le coefficient de $\hat{\lambda}_2^k \hat{\lambda}^m$ en π_n où $n = m + 2k$ est le nb. des placements des k blocs contigus de longueur 2 parmi n places !

3. Le processus de Markov qui retient l'information minimale est donné par le "mot" d'arrêt désiré, et par tous ses prefixes. On peut aussi considerer le processus de Markov sur des états specifiant les deux derniers résultats possibles : $\{PF\}, \{*P\}, \{P^cF\}, \emptyset$. Les deux inconnues $x_1 = x_{\{*P\}}, x_2 = x_{\{P^cF\}}$ satisfont :

$$x_1 = 1 + px_1 + q * 0, x_2 = 1 + px_1 + q * x_2 \iff x_1 = q^{-1}, x_2 = x_1 + p^{-1} = q^{-1} + p^{-1}$$

4. Pour $c(x) = E_x[\int_0^T X(t)dt]$ (coût totale de stockage) on trouve

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}c)(x) + x &= 0 \\ c(0) &= 0 \\ c(x) &\text{ accroit non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{G}x = \lambda - \mu$ et $\mathcal{G}x^2 = 2x(\lambda - \mu) + \lambda + \mu$, on trouve par la méthode des coefficients indéterminés que la solution est $c(x) = \frac{x^2}{2(\mu-\lambda)} + \frac{x(\mu+\lambda)}{2(\mu-\lambda)^2}$. On trouve que $c(x) = c_r(x) + \gamma t(x)$. **Interpretation :** La première partie, $c_r(x) = t(x)(\frac{x+1}{2})$ est la solution "fluide", qui utilise précisément la moyenne arithmétique des valeurs $(x, x-1, \dots, 1)$, comme si avant le vidage on aurait visité seulement ces valeurs, pour des durées de temps égaux. La deuxième partie suggère un "remplacement de la valeur moyenne a long terme 0 ("vue de loin") dans la solution fluide par la valeur moyenne réelle a long terme γ . Cela suggère pour grand x une décomposition du temps de vidage en deux phases : Dans la première le système approche linéairement son régime stationnaire et les fluctuations stationnaires sont négligeables. Dans la deuxième, plus longue, de longueur $t(x)$ au premier ordre d'approximation, le système est en régime stationnaire.

5. Considerons le processus de Markov sur les états : $\{FiP\}, \{P\}, \{Fi\}, \{Fp\}$, où le dernier état inclut le cas \emptyset . Soit N le nombre de pas jusqu'à la première fois quand une pile arrive après un nombre impair de faces, et $x_i, i = 1, 2, 3$ son espérance, à partir des états transitoires : $x_1 = x_{\{P\}}, x_2 = x_{\{Fi\}}, x_3 = x_{\{Fp\}}$. Les trois inconnues satisfont :

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 + px_1 + q * x_2, x_2 = 1 + q * x_3, x_3 = 1 + px_1 + q * x_2 \implies \\ x_3 &= x_1, qx_1 = 1 + qx_2 = 1 + q(1 + qx_1) \implies x_1 = \frac{1+q}{q(1-q)}\end{aligned}$$

Note : Le conditionnement sur le premier pas ne marche pas. Examinons l'espace d'états :

$$E = \{P, FP, FFP, FFFP, FFFFFP, \dots\}$$

en essayant de trouver une décomposition en cas (ou un temps d'arrêt T) qui permet une approche récursive. Dans le premier, troisième, ...cas, on recommence. Dans le deuxième, quatrième, ..., on conclut $N = 2, 4, \dots$. Le temps d'arrêt permettant une solution est donc le temps T de la première pile. En conditionnant sur T , on trouve :

$$\begin{aligned}n &= E[N] = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-1}p(2k) + \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k}p((2k+1) + n) \\ &= \frac{2pq}{(1-q^2)^2} + \frac{p(1+q^2)}{(1-q^2)^2} + n\frac{1}{1+q} = \frac{p}{(1-q)^2} + n\frac{1}{1+q}\end{aligned}$$

où on a utilisé $\sum_{k=1}^{\infty} 2kq^{2k-1} = (\frac{1}{1-q^2})' = \frac{2q}{(1-q^2)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)q^{2k} = \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{2q}{(1-q^2)^2} = \frac{(1+q^2)}{(1-q^2)^2}$. On retrouve finalement : $n = \frac{1+q}{q(1-q)}$

12.3 Examen d'entraînement 3

1. L'espace des états d'une chaîne est $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & b & c & a_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - c_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 1 - c_2 \end{pmatrix}$$

où $a_1, a_2, b, c, c_1, c_2 \in (0, 1)$ et $c = 1 - b - \sum_{i=1}^2 a_i$.

- Tracez le graphe de communication et identifiez les classes de la chaîne. Classifier les classes en récurrentes et transientes.
 - Trouvez la distribution stationnaire des classes récurrentes.
 - Trouvez les probabilités d'absorption $p_{i,\hat{j}}$ pour chaque état i transient et chaque **classe** d'états récurrents \hat{j}
 - Trouvez la limite quand $n \rightarrow \infty$ de la matrice de transition après n étapes P^n .
- On lance une pièce de monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à q et celle de sortir pile égale à $p = 1 - q$, jusqu'à ce qu'on obtient une suite pile-pile-face (arrivées consécutivement). Trouvez l'espérance $t = ET$ du temps T jusqu'à l'arrêt, (c.-à-d. le nombre de jets N , en incluant les derniers pas). *Indication* : On peut utiliser un processus de Markov qui retient l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu, et qui contient dans ce cas l'état final désiré, et tous ses prefixes. b) Reprenez cette question, en supposant que les temps d'arrivée d'un nouveau résultat ont des distributions exponentielles avec des paramètres λ_P, λ_F (qui dépendent du dernier états).
 - Soit X_t un processus Markovien en temps continu, représentant le nombre de clients dans une file d'attente avec deux serveurs A, B , ayant des taux de service $\mu_1 = 3$ et $\mu_2 = 2$, respectivement, et une salle d'attente infinie. Les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux $\lambda = 4$; si un seul client est présent, il est servi par le serveur le plus efficace.

 - Dessinez le graph de transitions du processus X_t , et donnez la matrice génératrice des probabilités de transition, et la matrice des probabilités de transition de la chaîne discrétisée associée aux temps de saut.
 - En sachant qu'au temps 0 les deux serveurs sont occupés et qu'il n'y a personne qui attend dans la file, quelle est la probabilité que le premier client qui arrive doit attendre ?
 - Formuler un système à quatre inconnues pour les probabilités stationnaires de X_t .
 - Quelle est la proportion du temps pendant le quel le serveur B est occupé ?
 - Quelle est la proportion du temps pendant le quel le serveur A est occupé ?
 - (*) Donnez des reponses numériques aux questions precedentes.
 - (*) Calculer l'espérance de la "période occupée/busy period" $t_k = E_k[T_0]$. Verifiez l'identité $\tilde{t}_k \pi_k = t^{(k)}$ pour $k = 0$.
 - Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ un processus de Markov en temps continu sur l'ensemble \mathbb{N} , avec générateur infinitésimal $Gf(x) = \mu_{-1}(f(x-1) - f(x)) + \mu_2(f(x+2) - f(x)), x \geq 1$ avec $\mu_{-1} = 6/7, \mu_2 = 1/7$, et avec $Gf(0) = \mu_2(f(2) - f(0))$. a) Calculez la distribution stationnaire de X_t . b) Calculez l'espérance $t(x) = E_x T$, où $T = T_0 = \inf\{t : X(t) \leq 0\}$ est le temps de vidage, ainsi que le coût de vidage $c(x) = E_x \int_0^T X_s ds$, en résolvant les équations de récurrence $Gc(x) + h(x) = 0, x \geq 1, c(0) = 0$ où $h(x) = 1$ et $h(x) = x$, respectivement.
 - Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ un processus de Markov en temps continu sur l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$. Supposons que la matrice infinitésimale (de taux de transitions) de X est donnée par

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

- (a) Quelles sont les probabilités de transition de la chaîne discrétisée associée aux temps de saut ?
- (b) Quelle est la loi conditionnelle de $T_3 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 3\}$, en sachant que $X_0 = 3$?
- (c) Posant $T^{(3)} = \inf\{t > T_3 : X_t = 3\}$, donnez un système des équations pour $x_1 = E[T^{(3)} | X_0 = 1]$ et $x_2 = E[T^{(3)} | X_0 = 2]$. Résolvez les équations.
- (d) Calculez, pour le processus absorbé en 3, $P_{i,j}(t) = \mathbb{P}[t \leq T^{(3)}, X(t) = j | X_0 = i], i = 1, 2$.
- (e) Calculez $\bar{P}_1(t) = \mathbb{P}[T^{(3)} \geq t | X_0 = 1]$ et $\bar{P}_2(t) = \mathbb{P}[T^{(3)} \geq t | X_0 = 2]$ à partir directement des équations de Chapman-Kolmogorov, et comparez les réponses avec ceux de la question précédente. Vérifiez aussi que $x_i = \int_0^\infty \bar{P}_i(t) dt, i = 1, 2$.
6. Des femmes et des hommes arrivent dans un magasin, après des temps fixes, unitaires. Chaque instant, une femme arrive avec probabilité λ_F , ou un homme arrive avec probabilité λ_H , ou il n'y a pas d'arrivée, avec probabilité $\lambda_0 = 1 - \lambda_F - \lambda_H$.
- (a) Trouver la probabilité p_F qu'une femme entre avant un homme. *Indication* : Conditionnez sur le premier instant, ou sur le nombre d'instant sans arrivées.
- (b) Trouver la probabilité que deux femme entrent consecutivement (c.-à-d. avec aucun homme entre eux, mais pas forcément aux moments consecutifs) avant qu'un homme entre.
- (c) Trouver la probabilité qu'au moins deux hommes soient entrés consecutivement (c.-à-d. avec aucune femme entre eux, mais pas forcément aux moments consecutifs), avant que trois femmes ne soient entrées consecutivement. *Indication* : Considérez un processus de Markov sur l'espace des états : $(H1, H2, H3, \dots) \cup (F1, F2, F3, \dots)$, qui enregistre au temps t la longueur k de la dernière série des clients $k \in \{1, 2, \dots\}$ du même sexe entrés consecutivement, et leur sexe (H/F); formulez des equations d'arrêt pour les états d'arrêt indiqués.
- (d) Quelle est la probabilité qu'au moins m hommes soient entrés consecutivement, avant que n femmes ne soient entrées consecutivement ?
7. (a) Calculer les probabilités de bonheur $p_x = P_x[T_B < T_0]$ pour une marche simple symétrique.
- (b) Calculer les probabilités de retour en $z \in [1, B - 1]$, définies comme $p_z = P_z[\tilde{T}_z < \min[T_0, T_B]]$ pour une marche simple symétrique absorbée en 0 et B .

Solutions :

- 1.
2. Considerons le processus de Markov sur les états suivants, qui spécifient une décomposition des trois derniers résultats possibles : $A = \{PFP\}, PF = \{PF\}, F = \{P^cF\}, P = \{(PF)^cP\}$, et soit $x_{PF}, x_F, x_P, x_A = 0$ le nombre espéré des pas jusqu'à l'arrêt, conditionné par ces états initiaux. La réponse est $n = 1 + px_P + qx_F$. Rq : La somme des probas de tous les états est : $ppq + pq + q^2 + p(1 - pq) = p + q = 1$, donc il s'agit vraiment d'une décomposition de l'espace des états. Les trois inconnues satisfont :

$$\begin{aligned}
 x_P &= 1 + p * x_P + q * x_{PF} && \iff x_P = q^{-1} + x_{PF}, \\
 x_F &= 1 + p * x_P + q * x_F && \iff x_F = p^{-1} + x_P = p^{-1} + q^{-1} + x_{PF}, \\
 x_{PF} &= 1 + q * x_F && \iff x_{PF} = 1 + q * p^{-1} + 1 + qx_{PF} \iff x_{PF} = 2/p + q/p^2 \\
 x_{PF} &= \frac{1+p}{p^2}, \quad x_P = \frac{1+p}{p^2} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p^2q}, \quad x_F = p^{-2} + q^{-1} + 2p^{-1} = p^{-2} + (pq)^{-1} + p^{-1} \\
 n &= \frac{1+pq}{p^2q}
 \end{aligned}$$

3. (a)

(b) Les équations d'équilibre local pour $n \geq 2$ sont $\lambda\pi_n = \mu\pi_{n+1}$, où $\mu = \mu_1 + \mu_2$, et donc $\pi_n = \pi_2\rho^{n-2}$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{5}$. La somme $\Pi_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \pi_n = \pi_2/(1-\rho)$. Pour les autres états, $\lambda\pi_0 = \mu_1\pi_A$, $0 = \mu_2\pi_B$ montre qu'il faut considérer les équations d'équilibre global : $\lambda\pi_0 = \mu_1\pi_A + \mu_2\pi_B$, $(\lambda + \mu_1)\pi_A = \mu_2\pi_2 + \lambda\pi_0$, $(\lambda + \mu_2)\pi_B = \mu_1\pi_2$, $(\lambda + \mu_1 + \mu_2)\pi_2 = (\mu_1 + \mu_2)\pi_3 + \lambda\pi_A + \lambda\pi_B \iff (\mu_1 + \mu_2)\pi_2 = \lambda(\pi_A + \pi_B)$. Les équations donnent $\pi_A = \pi_0\rho_1 \frac{\lambda + \mu_1 + \mu_2}{2\lambda + \mu_1 + \mu_2}$, $\pi_B = \pi_0\rho_2 \frac{\lambda}{2\lambda + \mu_1 + \mu_2}$, $\pi_2 = \pi_0\rho_1\rho_2 \frac{\lambda + \mu_2}{2\lambda + \mu_1 + \mu_2}$, où $\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i}$.

(c) $\frac{4}{9}$.

(d) La distribution stationnaire est $\pi_0 = \frac{13}{113}$, $\pi_A = \frac{12}{113}$, $\pi_B = \frac{8}{113}$, $\pi_2 = \frac{16}{113}$, ..., $P[B \text{ occupé}] = \frac{88}{113}$,

(e) $P[A \text{ occupé}] = \frac{92}{113}$.

4. a) La distribution stationnaire est $\pi_n = A_1(\frac{1}{2})^n + A_2(\frac{-1}{3})^n$, et $\pi_1 = \pi_0 \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1} (\iff \pi_{-1} = 0) \implies A_2 = \frac{2}{3}A_1 \implies \pi_n = \frac{2}{5}(\frac{1}{2})^n + \frac{4}{15}(\frac{-1}{3})^n$. b) Nous devons résoudre

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}c)(x) + h(x) &= 0 \\ c(0) &= 0 \\ c(x) &\text{ accroit non-exponentiellement quand } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

où

$$Gf(x) = 6/7(f(x-1) - f(x)) + 1/7(f(x+2) - f(x)), x \geq 1$$

On décompose $c(x) = c_h(x) + p(x)$ où $c_h(x) = A + A_1r_1^x + A_2r_2^x$, avec $A_1 = A_2 = 0$ (car $|r_i| > 1$), et $p(x) = Bx$ pour la première question, et $p(x) = x(Bx + B_1)$ pour la deuxième. Comme $\mathcal{G}x = -\frac{4}{7}$ et $\mathcal{G}x^2 = -\frac{8}{7}x^2 + \frac{10}{7}$, on trouve par la méthode des coefficients indéterminés que les solutions sont $t(x) = \frac{7}{4}x$, $c(x) = \frac{7}{8}x^2 + x\frac{35}{16}$.

5. (a) Les probabilités de transition au moment du premier saut sont :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/7 & 6/7 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) La loi conditionnelle de $T_3 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq 3\}$, en sachant que $X_0 = 3$, est la loi exponentielle à paramètre 7 (et moyenne 1/7).

(c) En conditionnant sur le premier saut, nous trouvons :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_2 \\ x_2 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De lors, $x_1 = x_2 = 1$.

(d) Soit

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

le générateur du processus observé seulement en 1, 2. Diagonalisons $\tilde{G} = L^{-1} \text{Diag}(\lambda_i)L$, où les lignes de la matrice L sont les vecteurs propres à gauche. Ici, les valeurs propres, données par $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 1)(\lambda + 4) = 0$ sont -1 et -4 et la matrice des vecteurs propres à droite est $R = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Finalement,

$$\tilde{P}(t) = R \text{Diag}(e^{\lambda_i t}) R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}}{3} + \frac{2e^{-4t}}{3} & \frac{2e^{-t}}{3} - \frac{2e^{-4t}}{3} \\ \frac{e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4t}}{3} & \frac{2e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4t}}{3} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} = \tilde{P}(t)\mathbf{1} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

- (e) Les probabilités demandées satisfont $\bar{P}_i(t) = 1 - P_{i,3}(t)$, $i = 1, 3$, où $P_{i,3}(t)$ sont les probabilités de transition du processus absorbé avec générateur

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posons $p_i(t) = \bar{P}_{i,3}(t) = 1 - P_{i,3}(t)$ pour les probabilités de non-absorption dans la colonne fixe 3. On a $p_1(0) = p_2(0) = 1$ Comme $P_{3,3}(t) = 1$, l'équation Chapman-Kolmogorov $P' = GP$ donne pour la troisième colonne :

$$\begin{aligned} (1 - p_1(t))' &= -3(1 - p_1(t)) + 2(1 - p_2(t)) + 1 \\ (1 - p_2(t))' &= (1 - p_1(t)) + -2(1 - p_2(t)) + 1 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} p_1(t)' &= -3p_1(t) + 2p_2(t), p_1(0) = 1 \\ p_2(t)' &= p_1(t) - 2p_2(t), p_2(0) = 1 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} = e^{t\tilde{G}}\mathbf{1}$$

où \tilde{G} denote le générateur avec la colonne et ligne d'absorption 3 enlevée. Finalement, $x_1 = x_2 = 1$.

6. (a) La probabilité p_F satisfait

$$p_F = \lambda_F + (1 - \lambda_F - \lambda_H)p_F \iff p_F = \frac{\lambda_F}{\lambda_F + \lambda_H}$$

- (b) p_F^2

- (c) Considerons la chaîne de Markov en temps discret qui enregistre la longueur du nombre des clients du même sexe entrés consecutivement et le type, ayant comme espace des états les suites $(H1, H2, H3, \dots) \cup (F1, F2, F3, \dots)$. En prenant en consideration seulement les temps quand la chaîne saute, pn a une marche aléatoire qui "avance" sur les hommes/femmes a.p. $p_H = 1 - p_F$ et p_F , et "change de sexe" outrement. Par exemple, si $\lambda_F = 2\lambda_H$, les deux probas sont $p_H = \frac{1}{3}$, $p_F = \frac{2}{3}$. En denotant par x_i, y_i la probabilité de notre événement en partant d'une suite des i femmes hommes, il faudra resoudre :

$$\begin{aligned} y_1 &= p_H + p_F x_1 \\ x_1 &= p_H y_1 + p_F x_2 \\ x_2 &= p_H y_1 \end{aligned}$$

Generalisant pour m hommes et n femmes et posant $S_{F,k} = \sum_{i=1}^k p_F^i$, $S_{H,k} = \sum_{i=1}^k p_H^i$, nous trouvont

$$y_1 = \frac{p_H^{m-1}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}, x_1 = \frac{p_H^m S_{F,n-2}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

et finalement

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^m (1 + p_F S_{F,n-2})}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}} = \frac{p_H^m S_{F,n-1}}{1 - p_H p_F S_{H,m-2} S_{F,n-2}}$$

Pour $m = 2, n = 3$, on trouve :

$$y_1 = \frac{p_H}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}, x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$

et

$$p_H y_1 + p_F x_1 = \frac{p_H^2 (1 + p_F + p_F^2)}{1 - p_H p_F (1 + p_F)}$$

7. $p_z = P_z[\tilde{T}_z < \min[T_0, T_B]] = (f_1(z-1) + f_2(z+1))/2 = 2 - 1/z - 1/(B-z)$, où $f_1(x = \frac{x}{z})$, $f_2(x = \frac{B-x}{B-z})$.

12.4 Examen d'entraînement 4

- La marche paresseuse :** Soit $X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$ une marche aléatoire sur \mathbb{Z} , avec (Z_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $P[Z_n = \pm 1] = p/q$ et $P[Z_n = 0] = 1 - p - q$, avec $0 < p + q < 1$. Pour tout x de \mathbb{N} , on note par E_x l'espérance en commençant de x (conditionnant sur $X_0 = x$). Nous arrêtons le processus au temps d'arrêt T auquel le processus sort de l'intervalle $[0, K]$ pour $0 < K$ donnés. Obtenez l'équation de récurrence et les conditions frontière satisfaites par $p_x = \mathbb{P}_x\{X_T = K\}$, $f_x = E_x X_T$, $t_x = E_x T$, $c_x = E_x[\sum_0^T X(t)]$ et $w_x = E_x a^T$. Résolvez les équations de récurrence qui en résultent pour a) p_x , b) f_x , c) t_x , d) c_x et e) w_x , quand $p = q < 1/2$.
- Une particule décrit une marche aléatoire sur $E = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$: si la particule est en $i < n$, alors elle se déplace en $j = i + 1$, et si la particule est en $i > n$, alors elle se déplace en $j = i - 1$; si la particule est en $i = n$, alors elle se déplace en une position j choisie avec probabilités égales parmi les éléments de E différentes de n . La position X_k au temps k constitue une chaîne de Markov.
 - Donner la matrice de transition.
 - Déterminer la loi invariante de la chaîne.
 - Calculer la position moyenne de la particule en régime stationnaire.
 - Calculer l'espérance du temps de retour d'une particule qui part de n .
- Quelle est la probabilité qu'un cercle de rayon r autour de l'origine ne contient aucun point d'un processus de Poisson deux-dimensionnel de taux λ ? Autrement dit, calculez la fonction de "survie" ou de "distribution complémentaire" $\bar{F}_D(r) = \mathbb{P}\{D > r\}$, où D est la distance de l'origine jusqu'au point le plus proche d'un processus de Poisson deux-dimensionnel.
 - Calculez la fonction de densité $f_D(r)$.
 - Calculez le mode de la fonction de densité.
 - Calculez par parties l'intégrale $\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$ et montrez que l'espérance est $ED = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$ (l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \sqrt{\pi/2} = \int_0^\infty \int_{r^2/2}^\infty e^{-s} ds dr$ peut-être calculé par le théorème de Fubini)
- On lance une monnaie biaisée avec probabilité de sortir pile p , et on s'arrête la première fois quand une pile arrive après un nombre impaire de faces. Trouvez l'espérance du temps de ce jeu. *Indication :* Utilisez un processus de Markov qui retient toujours l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu.
- n points indépendents sont choisis uniformément sur le périmètre d'un cercle. Quelle est la probabilité p_n qu'il existe un demi-cercle contenant tous les points? *Ind.* Trouvez p_2, p_3 . Fixez un point i et trouvez la probabilité p que le demi-cercle voisin, dans le sens des aiguilles d'une montre, contient tous les points.

Solutions :

1. Soit $(Gf)_x = p(f_{x+1} - f_x) + q(f_{x-1} - f_x)$ (formellement, la même expression comme dans le cas "non-paresseux", sauf que maintenant $p + q < 1$. Les équations sont respectivement :

$$\begin{aligned}(Gp)_x &= 0, p_K = 1, p_0 = 0 \\ (Gf)_x &= 0, f_K = K, f_0 = 0 \\ (Gt)_x + 1 &= 0, t_K = 0, t_0 = 0 \\ (Gc)_x + x &= 0, c_K = 0, c_0 = 0 \\ (Gw)_x &= (a^{-1} - 1)w_x, w_K = 1, w_0 = 1\end{aligned}$$

Ces sont exactement les mêmes équations comme pour une marche non-paresseuse, sauf que l'opérateur est différent.

- (a/b) Pour p_x et f_x on obtient donc les mêmes équations comme pour une marche symétrique avec $p = 1/2$, par exemple :

$$\begin{aligned}2pp_x &= pp_{x+1} + pp_{x-1} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ p_K &= 1, \quad p_0 = 0\end{aligned}$$

et donc les mêmes réponses $p_x = \frac{x}{K}$, $f_x = x$

- (c) Pour $t_x = E_x[T]$ (temps de sortie espéré) on trouve :

$$\begin{aligned}t_x &= \frac{t_{x+1}}{2} + \frac{t_{x-1}}{2} + \frac{1}{2p} \quad \text{for any } 1 \leq x \leq K-1 \\ t_K &= 0, \quad t_0 = 0\end{aligned}$$

avec solution $t_x = \frac{x(K-x)}{2p}$.

Remarque : Le fait que les équations sont identiques pour ces deux marches (paresseuse et non-paresseuse) n'est pas une coïncidence. En fait, il s'avère que les réponses obtenues sont les mêmes pour n'importe quel processus Markovien homogène, si on définit l'opérateur de la façon juste. Donc, la réponse pour tous les problèmes concernant espérances va impliquer un seul opérateur G (seulement les conditions frontière et la partie non homogène changent d'un problème à l'autre)- en fait, la famille des processus aléatoires Markoviens est isomorphe à une famille d'opérateurs déterministes. En plus, la structure des réponses en fonction de G est la même pour toutes les processus aléatoires Markoviens, malgré leur diversité ; c'est un fait remarquable, qui démontre la puissance de ce concept.

2. (a) La matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-2} \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Soit $w = \frac{1}{2(n-1)}$, On trouve $\pi_k = kw\pi_n = \frac{k}{2(n-1)}\pi_n$, $\forall k < n$. La symétrie $\pi_k = \pi_{2n-k}$ et normalisation impliquent $\pi_n(1 + \frac{(n-1)n}{2(n-1)}) = \pi_n(1 + \frac{n}{2}) = 1$ et $\pi_n = \frac{2}{2+n}$

(c) $E_S[X_n] = n$

(d) $t_n = \frac{2+n}{2}$

3. a) $\bar{F}(r) = e^{-\lambda r^2}$ b) $f_D(r) = 2\lambda r e^{-\lambda r^2}$. c) Le mode de la densité satisfait $(1 - 2\lambda r^2)e^{-\lambda r^2} = 0$, donc $r = \frac{1}{2\lambda}$. d) $ED = 2\lambda \int_0^\infty r^2 e^{-\lambda r^2}$ En posant $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \iff \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$, on s'aperçoit que notre intégrale est de la forme

$$\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma^3}{2}$$

(car ça représente une demi de la variance de la distribution Gaussienne). (On peut aussi retrouver ce résultat en utilisant l'intégration par parties, et en calculant l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \sqrt{\pi/2} = \int_0^\infty \int_{r^2/2}^\infty e^{-s} ds dr$ par le théorème de Fubini.) On trouve finalement que l'espérance est

$$ED = 2\lambda \frac{\sqrt{2\pi}}{4\lambda\sqrt{2\lambda}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$$

4. Soit N le nombre de pas jusqu'à la première fois quand une pile arrive après un nombre impair de faces, et n son espérance. Le conditionnement sur le premier pas ne marche pas, mais il y a d'autres approches possibles : a) Remarquons que les trois événements FP, P, FF constitue une décomposition de l'espace d'états qui permet soit de constater que notre événement d'arrêt est arrivé, soit de relancer le processus du début. Par conséquent :

$$n = pq2 + p(1 + n) + q^2(2 + n) \iff n = \frac{p + 2q}{q(1 - q)} = \frac{1 + q}{qp}$$

b) On peut aussi "habiller" cette solution en langage Markovien, en définissant une chaîne qui enregistre les états finaux transients 1 = nb paire des F, 2 = nb quelconque des P, 3 = nb impaire des F, ∂ = nb impaire des F suivi par P. Le système pour l'espérance du temps d'arrêt est :

$$\begin{aligned} n &= n_1 = 1 + pn_2 + qn_3 \\ n_2 &= qn_3 + 1 \\ n_3 &= 1 + qn_1 \end{aligned}$$

avec la même solution. c) Examinons l'espace d'états, en essayant de trouver une décomposition en cas (ou un temps d'arrêt T) qui permet une approche recursive :

$$E = \{P, FP, FFP, FFFP, FFFFFP, \dots\}$$

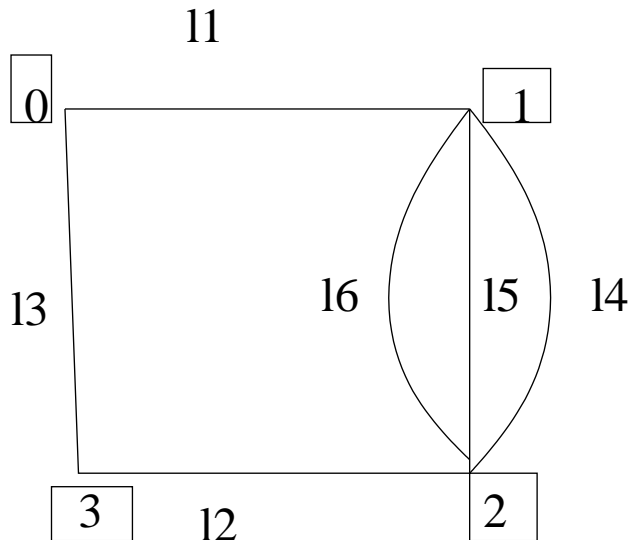
Dans le premier, troisième, ...cas, on recommence. Dans le deuxième, quatrième, ..., on conclut $N = 2, 4, \dots$. Le temps d'arrêt permettant une solution est donc le temps T de la première pile. En conditionnant sur T , on trouve :

$$\begin{aligned} n &= E[N] = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-1} p(2k) + \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k} p(2k + 1 + n) \\ &= (1 + n)p \frac{q^2}{1 - q^2} + pq(1 + q^{-1}) \sum_{k=1}^{\infty} 2kq^{2k-1} \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=1}^{\infty} 2kq^{2k-1} = \left(\frac{1}{1-q^2}\right)' = \frac{2q}{(1-q^2)^2}$, on trouve finalement : $n = \frac{q(2+pq)}{1+q^3}$.

12.5 Examen d'entraînement 5

- Considérez un génie effectuant une **marche aléatoire simple** X_t , $t = 0, 1, 2, \dots$ dans une grotte contenant quatre chambres 0, 1, 2, 3 liées par six couloirs, comme indiqué sur le graphe ci-dessous (à chaque moment $t = 1, 2, \dots$, le génie se déplace vers l'une des positions voisines à sa position actuelle, avec la même probabilité pour chaque choix). Les temps nécessaires pour traverser chaque couloir sont dénotés par $l_i, i = 1, \dots, 6$, comme indiqué sur la figure. Calculer :
 - L'espérance en sortant de i du temps $T := \min[T_3, T_0]$ jusqu'au noeuds 0 ou 3, pour $i = 1, 2$.
 - L'espérance en sortant de 0 du temps \tilde{T}_0 jusqu'au premier retour en 0.
 - Les probabilités stationnaires de chaque noeud. *Indication : On peut utiliser les équations d'équilibre détaillé.*



- (d) Les probabilités $x_i = \mathbb{P}_i\{X_T = 1\}$, $i = 1, 2$.
- (e) Supposons maintenant qu'on remplace les temps déterministes l_i par des temps exponentiels de taux $\lambda_i = l_i^{-1}$. Quelle est la matrice infinitésimale du processus de Markov obtenu ainsi? Est-ce que l'espérance en sortant de i du temps T pour $i = 1, 2$ est différente dans ce cas?
2. a) On lance une pièce de monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à q et celle de sortir pile égale à $p = 1 - q$, jusqu'à ce qu'on obtient trois piles arrivées consécutivement. Trouvez l'espérance n du nombre de pas N jusqu'à l'arrêt, en incluant la dernière pile. b) On lance une monnaie biaisée jusqu'à la première fois quand une pile arrive après un nombre impair de faces, en incluant la dernière pile. Trouvez l'espérance du nombre de pas de ce jeu. *Indication* : On peut utiliser un processus de Markov qui retient l'information minimale nécessaire pour décider si l'événement désiré a eu lieu.
3. Un scribe doit copier n pages d'un manuscrit. Comme il est fatigué, il comet un certain nombre d'erreurs partout dans le manuscrit, distribuées suivant une distribution de Poisson $Po(\lambda)$. Les erreurs peuvent se trouver sur n'importe quelle page, avec des probabilités égales.
- (a) Quelle est la distribution du nombre N_1 des erreurs sur la première page ?
- (b) Quelle est la probabilité que la première page ne contient pas des erreurs ?
- (c) Quelle est l'espérance du nombre de pages contenant des erreurs ?
4. Soit $Y(t)$ un processus de Cramér-Lundberg

$$Y(t) = u + ct - S(t), \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i, \quad (12.1)$$

où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}_C(x) = \frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{5}{6}e^{-6x}$. a) Calculez l'espérance des sinistres $m_1 = EC_1$ et le taux de profit $p = c - \lambda m_1$, si le taux de cotisation est $c = 3m_1/2$. b) Calculez la probabilité de ruine $\psi(u)$, à partir de la formule de Pollaczek-Khinchin pour sa transformée de Laplace

$$\psi^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{p}{\kappa(s)} = \frac{1}{s} - \frac{1 - \rho}{s(1 - \rho \hat{f}_e(s))},$$

où l'exposant de Lévy est $\kappa(s) = s(c - \lambda \bar{F}_C^*(s)) = cs(1 - \rho \hat{f}_e(s))$, $\rho = \frac{\lambda m_1}{c}$, et la transformée de la severité de ruine est $\hat{f}_e(s) = \bar{F}_C^*(s)/m_1$.

5. On lance une pièce de monnaie biaisée, avec la probabilité de sortir face égale à q et celle de sortir pile égale à $p = 1 - q$, jusqu'à ce qu'on obtient une suite pile-face-pile (arrivées consécutivement). Trouvez l'espérance n du nombre de jets N jusqu'à l'arrêt, en incluant le dernier.

Solutions

1. (a) Soit $t_i = E_i T_0$ ($t_0 = 0$). En conditionnant sur le premier pas, on trouve que t_i satisfait :
Finalement,

$$\left\{ t_1 \rightarrow \frac{1}{10}(13l + 7l_1 + 9l_2 + 3l_3), t_2 \rightarrow \frac{1}{5}(7l + 3l_1 + 6l_2 + 2l_3), t_3 \rightarrow \frac{1}{10}(7l + 3l_1 + 11l_2 + 7l_3) \right\}$$

Par exemple, avec ...

$$t_0 = \frac{1}{2}(2 + t_3) + \frac{1}{2}(6) = 4 + \frac{1}{2}t_3$$

$$t_2 = \frac{1}{4}(3 + 5 + 4) + \frac{1}{4}(t_3 + 4) = 4 + \frac{1}{4}t_3$$

$$t_3 = \frac{1}{2}(t_2 + 4) + \frac{1}{2}(t_0 + 2) = 3 + \frac{1}{2}(t_2 + t_0) = 7 + \frac{3}{8}t_3$$

ça donne : $t_3 = \frac{56}{5}$, $t_0 = \frac{48}{5}$, $t_2 = \frac{34}{5}$.

(b) $E\tilde{T}_1 = \frac{1}{4}(t_0 + 6) + \frac{3}{4}(t_2 + 4) = 12$

(c) La distribution stationnaire (obtenue en utilisant les équations d'équilibre détaillé) donne $\pi_i = \frac{v_i}{\sum_j v_j}$ et donc $\pi_1 = (2/(2 + 4 * 3 + 3 * 2)) = \frac{1}{10}$, $\pi_0 = 4/20 = \frac{1}{5}$, $\pi_5 = \frac{3}{20}$ (en vérifiant ainsi le théorème $E\tilde{T}_1 = \frac{1}{\pi_1}$).

(d) Le système d'absorption donne : $x_2 = \frac{6}{7}$, $x_3 = \frac{3}{7}$.

2. a) Le conditionnement sur F, PF, PP donne : $n = q(n + 1) + pq(n + 2) + 2p^2 \iff n = \frac{1+p}{p^2}$.
b)

3. a) Les nombres des erreurs N_i sur chaque page i sont des variables de Poisson "coloriée" avec probabilité $1/n$, et donc N_i sont des variables de Poisson de taux λ/n (independantes). La probabilité que $N_i \geq 1$ est $1 - e^{-\lambda/n}$. b) En décomposant la variable N comme somme des indicatrices, l'espérance de $N = \sum_{i=1}^n N_i$ est $n(1 - e^{-\lambda/n})$ (en fait, N a une distribution binomiale, car N_i sont independants, par le théorème de coloriage des variables Poisson).

4. a) L'espérance des sinistres est $m_1 = \frac{1}{6 \times 2} + \frac{5}{6 \times 6} = \frac{2}{9}$ et le taux de profit $p = \frac{1}{9}$. b) La transformée de Laplace est $\psi^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{1/9}{s(3/9 - \frac{1}{6(s+2)} - \frac{5}{6(s+6)})} = \frac{5}{9(s+1)} + \frac{1}{9(s+4)}$ et la probabilité de ruine est $\psi(u) = \frac{5}{9}e^{-u} + \frac{1}{9}e^{-4u}$.

5. Considerons le processus de Markov sur les états suivants, qui spécifient une décomposition des trois derniers résultats possibles : $A = \{PFP\}$, $PF = \{PF\}$, $F = \{P^cF\}$, $P = \{(PF)^cP\}$, et soit $x_{PF}, x_F, x_P, x_A = 0$ le nombre espéré des pas jusqu'à l'arrêt, conditionné par ces états initiaux. La réponse est $n = 1 + px_P + qx_F$. Rq : La somme des probas de tous les états est : $ppq + pq + q^2 + p(1 - pq) = p + q = 1$, donc il s'agit vraiment d'une décomposition de l'espace des états. Les trois inconnues satisfont :

$$x_P = 1 + p * x_P + q * x_{PF} \iff x_P = q^{-1} + x_{PF},$$

$$x_F = 1 + p * x_P + q * x_F \iff x_F = p^{-1} + x_P = p^{-1} + q^{-1} + x_{PF},$$

$$x_{PF} = 1 + q * x_F \iff x_{PF} = 1 + q * p^{-1} + 1 + qx_{PF} \iff x_{PF} = 2/p + q/p^2$$

$$x_{PF} = \frac{1+p}{p^2}, \quad x_P = \frac{1+p}{p^2} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p^2q}, \quad x_F = p^{-2} + q^{-1} + 2p^{-1} = p^{-2} + (pq)^{-1} + p^{-1}$$

$$n = \frac{1 + pq}{p^2q}$$

Examen de processus de Markov 2013

1. Soit $\lambda < \mu$ et soit X une variable aléatoire de type-phase avec densité $f(x) = \alpha e^{Ax}(-A)\mathbf{1}$ correspondant à $\alpha = (1 - \frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}), A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$. Calculer la transformée de Laplace $f^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$, et simplifier la fraction obtenue autant que possible. Donner une autre représentation de la densité $f(x)$. Donner une interprétation probabiliste pour les éléments de la matrice e^{tA} .
2. Soit $S(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i$ un processus de Poisson composé, avec C_i i.i.d, $EC_1 = m_1, \text{Var } C_1 = \sigma^2$, et $N_\lambda(t)$ un processus de Poisson d'intensité λ .
 - (a) Calculer la fonction génératrice des moments

$$\varphi(\theta) = Ee^{\theta S(t)}$$

- (b) Calculer $ES(t)$ et $E[S(t)]^2$, et $E[S(s)S(t)], t \leq s$.

3. Soit $Y(t)$ un processus de Cramér-Lundberg

$$Y(t) = u + ct - S(t), \quad S(t) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} C_i, \quad (12.2)$$

où $N_\lambda(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1$, et les sinistres C_i ont une distribution hyperexponentielle $\bar{F}_C(x) = \frac{1}{4}e^{-3x} + \frac{3}{4}e^{-5x}$. a) Calculez l'espérance des sinistres $m_1 = EC_1$, la transformée de la severité de ruine avec réserves initiales $u = 0$ $\hat{f}_e(s) = \bar{F}_C^*(s)/m_1$, et la probabilité de ruine avec réserves initiales $u = 0$, $\rho = \psi(0) = \lambda m_1/c$, si le taux de cotisation est $c = 15m_1/7$. b) Calculez la probabilité de ruine $\psi(u)$, à partir de la formule de Pollaczek-Khinchin pour sa transformée de Laplace

$$\psi^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{p}{\kappa(s)} = \frac{1}{s} - \frac{1 - \rho}{s(1 - \rho \hat{f}_e(s))}.$$

4. Qu'effectue d'après-vous la fonction suivante ? Donner une prévision pour $mca(1000)$.

```
function sortie=mca(n)
rand('uniform')// les variables aleatoires suivront une loi uniforme sur [0,1]
j=0
for i=1:n
a=rand()
b=rand()
if a < sqrt(1-b^2) then
j=j+1
end
end
sortie=j/n
endfunction
```

Solutions

1. Il s'agit d'une loi $expo(\lambda)$.
2. (a)

$$\varphi(\theta) = Ee^{\theta S(t)} = e^{\lambda t (\int_0^\infty e^{\theta u} f(u) du - 1)}$$

- (b) $ES(t) = \lambda t m_1$ et $E[S(t)]^2 = (\lambda t m_1)^2 + \lambda t \sigma^2$.

- (c) $E[S(s)S(t)] = E[S(t)]^2$.

3. a) L'espérance des sinistres est $m_1 = \frac{7}{30}$, $\rho = \frac{7}{15}$, et $\hat{f}_e(s) = \frac{45}{14(s+5)} + \frac{15}{14(s+3)}$. b) La transformée de Laplace est

$$\begin{aligned}\psi^*(s) &= \frac{1}{s} - \frac{8/15}{s(1 - (\frac{3}{2(s+5)} + \frac{1}{2(s+3)})} = \frac{7s + 26}{15(s^2 + 6s + 8)} \\ &= \frac{1}{15(s+4)} + \frac{2}{5(s+2)}\end{aligned}$$

et la probabilité de ruine est $\psi(u) = \frac{1}{15}e^{-4u} + \frac{2}{5}e^{-2u}$.

Chapitre 13

Programmation

13.1 Scilab

Pour documentation Scilab, voir http://cermics.enpc.fr/scilab_new/site/Liens/intro/intro.html, ou <http://www.scilab.org/product/man-eng/index.html>. Pour obtenir de l'aide, `help sum`,...

1. Est-ce que Scilab fournit la fonction `cumsum(vec)`? Si non, écrivez une fonction `cumsum(p)`, où `p` est un vecteur, qui produit un vecteur de la même longueur contenant les sommes partielles du vecteur `p`.
2. Essayez les commandes Scilab : `P=genmarkov([2,1],2)`, `P20`, `[D,Diag]=eigenmarkov(P)`, `P * D - Diag * D`, `P20 * D - Diag20 * D`. Comparez avec les résultats des commandes "généralistes" `spec` en Scilab et `eig` en Matlab. **R** : les résultats de `eigenmarkov` sont des vecteurs propres nonnegatifs, ce qui n'est pas le cas avec les commandes "généralistes" `spec` en Scilab et `eig` en Matlab.
3. Écrivez un programme Scilab qui simule une fois une v.a. (variable aléatoire) avec des probabilités spécifiés par un vecteur nonnegatif (ex : $\mathbf{p} = [1/6, 1/3, 1/2, 0]$), et prenant des valeurs dans l'ensemble 1, 2, ..., `n=length(p)`. **R** : `% random.m` generates a random variable "ind" in 1, 2, ..., n

```
//given a distribution vector "p".
function [index] = disc(p),
    u = rand(1,1); i = 1; s = p(1);
    while ((u > s) & (i < length(p))),
        i=i+1;s=s+p(i),
        // s est le cumsum de p
    end
    index=i,
endfunction
```

4. Découvrez le chemin de votre repertoire de travail par `>>pwd` et son contenu par `>>dir`. Sauvegardez la fonction antérieure dans ce repertoire, dans un fichier `lib`, contenant des programmes utiles. Vous allez pouvoir les reutiliser en chaque session, après avoir exécuté `lib` (menu fichier), ou en tapant la commande `exec('lib')`. Toutes les variables définies dans 'lib' seront alors en mémoire dans la session.
5. créez et ajoutez au fichier `lib` une fonction `sim(N,d,a)`, où `a,d` sont des vecteurs de tailles égales, qui simule un nb des fois (`N`) une variable aléatoire prenant des valeurs spécifiés par le vecteur donné `a`, avec les probabilités proportionnelles au vecteur `d` (par exemple $N = 8, a = [1, 3, 5, 100], d = [1/6, 1/3, 1/2, 0]$). La fonction doit produire une liste des `N` valeurs, nommées "sim", ainsi que leurs frequences "f" (qui doivent être approximativement proportionnelles au vecteur `d`, quand $N \rightarrow \infty$). **Note** : On commence avec `N` petit ($N = 5$). **Sol** :

```
function [simul,f] = sim(N,d,a),
    p=d/sum(d);s=cumsum(p);K=size(d,2);//Nb. des colonnes
    x=rand(1,N);y=zeros(K,N);z=zeros(K,N);
    y(1,:)=x<s(1);z(1,:)=a(1)*y(1,:);
    for k=2:K, y(k,:)=x >s(k-1) & x < s(k);
        z(k,:)=a(k)*y(k,:); end
```

```
r=sum(z,1); f=sum(y,'c')/N; simul=r;
endfunction
```

Testez le programme pour simuler les lancés d'un dé : $N=600$; $d=\text{ones}(1,6)$; $a=1 :6$;

6. Les constantes booléennes sont %t et %f
7. On peut définir un vecteur à l'aide d'incrément. Le par défaut est colonne -i $v=5 :-0.5 :3$
 $v=! 5. 4.5 4. 3.5 3.!$
8. les commandes suivantes sont équivalentes : -i $\det(\%s*\text{eye}(H)-H)$; // %s signifie que s est utilisée comme variable et -i $\text{poly}(H,'s')$
9. $\exp(H)$ est la matrice dont les coefficients sont les nombres $e^{H_{i,j}}$. L'exponentielle matricielle de H est calculée au moyen de la commande $\text{expm}(H)$
10. Les sorties de boucles sont très utiles pour arrêter le cours d'un processus itératif (précision souhaité atteinte avant le nombre maximum d'itérations). A cet effet, on utilisera la commande `break`. Exemple

```
a=5;
for i=1:100, a=(a+2/a)/2,...
if abs(a-sqrt(2)) < 10(-6) then break, ...
end;
```

11. Pour qu'une fonction puisse être utilisée dans une session SCILAB, on a recours à la l'ins-truction `getf('nom-fichier.sci')` exemple :

```
function sortie=mca(n)
rand('uniform')// les variables aleatoires suivront une loi uniforme sur [0,1]
j=0
for i=1:n
a=rand()
b=rand()
if a < sqrt(1-b^2) then
j=j+1
end
end
sortie=j/n
```

Qu'effectue d'après-vous cette fonction? Calculer `4.*mca(1000)`. Le résultat est-il surprenant?

12. On peut tracer plusieurs courbes sur un même graphique. Pour cela il faut que le vecteur d'ordonnées soit composé de deux vecteurs de données. Par exemple `plot2d([t,t], [f1(t) f2(t)])`

13.2 Programmation symbolique en Scilab

1. Approche numérique aux polynômes :

```
x=linspace(-1,1,101);
f=3+4*x.^2+6*x.^6;
plot2d(x,f)
```

2. L'objet polynôme existe en SCILAB. On peut le définir directement de trois manières :

- (a) A partir des coefficients

```
q=poly([5 2 1], 's', 'c')
roots(p)
```

- (b) A partir des racines

```
p=poly([ 1 2], 's') // polynome de la variable s dont les racines sont 1 et 2; c'
roots(p)
```

- (c) $x=\text{poly}(0, "x")$;
 $f=3+4*x.^2+6*x.^6$
`disp(f)`
`derivat(f)`

- (d) evaluation d'un polynôme pour une matrice de nombres


```
X= [1 2;3 4]
p=poly(1:3,'x','c')
m=horner(p, X)
1*X.^0+2*X.^1+3*X.^2
```

(e) evaluation d'une composition des polynômes

```
w=s*s+%pi*(1-3*s)^2
p=poly([1 2 3 4 5],'s')
horner(p,w)
```

3. Fonctions rationnelles

```
x=poly(0,"x");
g=(3+4*x^3)/(1-x^4);
disp(g);

A=[1 g;1 g^2];
disp(A);

b=[0;1];
y=A\b;
disp(y);

y(2)(1)=-1+x^4;
y(3)(1)=2+4*x^3+x^4;
disp(y);
A*y

X=logspace(-1,log10(3),30)';
Y=horner(y',X);
plot2d(X,abs(Y),logflag="ll");
```

13.3 Traitement du signal et lois de type phase en Scilab

1. syslin : Les appels

```
[s1]=syslin(dom,A,B,C [,D [,x0 ]])
[s1]=syslin(dom,N,D)
[s1]=syslin(dom,H)
```

définissent un système linéaire :

$$\begin{cases} x'(t) = AX(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \iff \begin{cases} (sI - A)x^*(s) = Bu^*(s) + x_0 \\ y^*(s) = Cx^*(s) + Du^*(s) \end{cases}$$

La relation $y^*(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]u^*(s)$ définit la fonction de transfert du système

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D(s),$$

qui apparaît également dans la représentation matricielle des transformées de Laplace des lois de type phase $f^*(s) = \alpha(sI - A)^{-1}\mathbf{a}$. dom='c' for a continuous time system, dom='d' for a discrete time system

```
A=[0,1;0,0];B=[1;1];C=[1,1];
S1=syslin('c',A,B,C) //Linear systemdéfinition
S1("A") //Display of A-matrix
S1("X0") //Display of X0
S1("dt") //Display time domain
ss2tf(S1)
```

La sortie d'un appel syslin "transfert" est une liste sl=tlist(['r','num','den','dt'],H(2),H(3),dom).

```

s=poly(0,'s');
H1=(1+2*s)/s^2, S1bis=syslin('c',H1)
H2=(1+2*s+s^3)/s^2, S2bis=syslin('c',H2)
S1bis+S2bis
ss2tf(S1)-S1bis
A=[-2, 2;0,-2];B=[0;2];C=[1,0];
Sy=syslin('c',A,B,C)
h=ss2tf(Sy)

```

2. tf2ss : transfer to state-space

```

H=[2/s,(s+1)/(s^2-5)];
Sys=tf2ss(H)
clean(ss2tf(Sys))

```

3. ss2tf : L'appel [Ds,NUM,chi]=ss2tf(sl) rend le numérateur polynomial matrix NUM, le caractère polynomial chi et le polynomial part Ds séparément c.-à-d. : $h = \text{NUM}/\text{chi} + Ds$

```

h=[1,1/s;1/(s^2+1),s/(s^2-2)]
sl=tf2ss(h);
z=ss2tf(sl)
h=clean(z)
[Ds,NUM,chi]=ss2tf(sl)
clean(chi)
clean(NUM)

```

4. pfss : partial fraction décomposition

```

s=%s
num=2;
den=s^3*(s^2+2*s+10);
g=syslin('c',num/den);
se=pfss(g)

num=s^5+8*s^4+23*s^3+35*s^2+28*s+3;
den=s^3+6*s^2+8*s;
g=syslin('c',num/den) //g is fonc. transfert
se=pfss(g)
for k=1:size(se),
cf(k)=clean(se(k)),
end;

```

$$\frac{s^5 + 8 * s^4 + 23 * s^3 + 35 * s^2 + 28 * s + 3}{s^3 + 6 * s^2 + 8 * s} = \frac{.375}{s} + \frac{.375}{s + 4} + \frac{.25}{s + 2} + 3 + 2s + s^2$$

5. addf — addition symbolique. addf("a","b") renvoie la chaîne de caractères "a+b". Des simplifications triviales du type addf("0","a") ou addf("1","2") sont effectuées. Voir aussi mulf — multiplication symbolique, subf, ldivf, rdivf

6. evstr

```

a = 1;
b = 2;
Z = ['a+1','b+1'];
evstr(Z)
Z = list(['%(1)','%(1)-%(2)'],['a+1','b+1']);
evstr(Z)
[Z1,Z2]=evstr(Z)
evstr('NaN'), evstr('Inf')

```

7. triangularisation symbolique, faite par manipulations élémentaires de lignes et de colonnes.

```

A=['1','2';'a','b']
W=trianfml([A,string(eye(2,2))])
U=W(:,3:4)
a=5;b=6;
A=evstr(A)
U=evstr(U)
U*A
evstr(W(:,1:2))

```

8. solve : solveur symbolique de systèmes linéaires triangulaires

```
A=['1','a';'0','2'];// matrice triangulaire superieure
b=['x';'y'];
w=solve(A,b)
a=1;x=2;y=5;
evstr(w)
inv([1,1;0,2])*[2;5]

A=['1','a';'1','2'];
b=['x';'y'];
w=solve(A,b)
a=1;x=2;y=5;
evstr(w)
inv([1,1;1,2])*[2;5]
```

9. solveur symbolique de systèmes arbitraires

```
function [x] = symbol_solve(A,B)
//Solution of matrix equation A*X = B, for matrices with symb elements
[nrA,ncA] = size(A)
[nrB,ncB] = size(B)
if nrA <> nrB then
error("symbolic matrices A and B must have the same number of rows");
abort
end,
A_aug = [A B]
A_aug_up = trianfml(A_aug)
A1=A_aug_up(1:nrA,1:ncA)
B1 = A_aug_up(1:nrB,ncA+1:ncA+ncB)
x=solve(A1,B1)
endfunction
```

10. (*) Ecrivez une fonction qui calcule l'exponentielle des matrices, symboliquement

11. Traduisez en Scilab le program Matlab suivant <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/numerical-inversion-of-laplace-transforms-in-matlab/content/INVLAP.m> % INVLAP Numerical Inversion of Laplace Transforms

13.4 Matlab

Pour une initiation efficace au Matlab, suivre le cours de Bernard Ycart. <http://ljk.imag.fr/membres/Be>

13.5 Regression et estimation des densités non-paramétriques

Le pb. de la regression et de l'estimation des densités non-paramétrique est de fournir une formule convenable pour trouver un "signal" caché dans des observations bruités.

Dans la gestion du risque et des files d'attente on essaie souvent d'utiliser des lois qui sont des combinaison d'exponentielles, car sous cette hypothèse on arrive souvent à des réponses explicites, évitant ainsi la tache de résoudre des équations différentielles, ou d'inverser des transformées de Laplace numériquement.

L'obstacle principal à une utilisation plus élargie des lois de type exponentielle des matrices est probablement la difficulté d'assurer la non-négativité de ces fonctions. L'approche prédominante jusqu'à récemment était de chercher des approximations de type phase, au prix d'une augmentation potentielle de la dimension des matrices utilisées (et parfois en se restreignant aux matrices avec valeurs propres réelles : voir les programmes PhFit, Gfit, etc.).

Nouvelles méthodes d'estimation des densités. Notre projet est de profiter de l'apparition récente de deux nouvelles méthodes d'estimation des densités par des fonctions de type exponentielle des matrices :

1. L'une, que nous avons proposée en Dumitrescu, Sicleru et Avram (2013), réduit le problème de la non-négativité de ces fonctions à celui de la non-négativité des polynômes (la vérification de la non-négativité des polynômes est bien implémentée aujourd'hui dans des logiciels intégrant l'optimisation semi-définie positive (SDP) comme CVX et POS3POLY).

2. L'autre, de Andersson, Carlsson, et de Hoop (2011), est une implémentation moderne des idées de Adamjan, Arov et Krein. Le code est très succinct, mais assez compliqué, et on reportera son analyse à plus tard

```
function [g,w,xi]=hadmm(f,t,K,rho,m_max,weight,nonnegative_margin)
%Compute best approximation to f using M exponentials.
N=(length(f)-1)/2;r=zeros(2*N+1,1);Lambda=zeros(N+1);
q=[1:N+1,N:-1:1]';g=f;
wbar=waitbar(0,[num2str(m_max),' iterations.'])
for iter=1:m_max,waitbar(iter/m_max,wbar);
    %Update matrix
    B=form_hankel(g)-Lambda/rho;[u,s,v]=svd(B);s=diag(s);s(K+2:end)=0;
    A=u*diag(s)*v';
    %Update residual
    g=f-(rho*q.*f-sum_hankel(Lambda+rho*A))./(weight+rho*q);
    g=max(g,nonnegative_margin);
    %Update Lagrangian
    Lambda=Lambda+rho*(A-form_hankel(g));
    %plot
    % f_approx=sum_hankel(A)./q;plot(real(f),'k.-');hold on;plot(real(f_approx));hold on;
end;
g=sum_hankel(A)./q;
% [u,s,v]=svds(form_hankel(f_approx),K+1);
[u,s,v]=svd(form_hankel(g));
xi=log(eig(u(1:end-1,1:K+1)\u(2:end,1:K+1))).'/(t(2)-t(1));
w=exp(t*xi)\g;
close(wbar);
```

```
function H=form_hankel(f) %form Hankel matrix from vector
H=hankel(f(1:(end+1)/2),f((end+1)/2:end));
```

```
function f=sum_hankel(H) %sum over anti-diagonals
N=size(H,1)-1; f=zeros(2*N+1,1); H=flipud(H);
for j=-N:N, f(j+N+1,1)=sum(diag(H,j));end;
```

Par contre, l'utilisation est très simple –voir test_script ci-dessous.

```
N=256;t=linspace(0,10,2*N+1)';
weight=(t<2)+(t>3);%Produce a gap in the data.
epsilon=0;lambda=1;a=1;
f=exp(-lambda*t).*((t-a).^2+epsilon^2)*lambda^3/(1+lambda^2*epsilon^2+(1-lambda*a)^2);
% f=exp(-lambda*t).*(1+cos(a*t)+epsilon^2)./((epsilon^2+1)/lambda+lambda/(a^2+lambda));
f=f-0.01*rand(size(f)).*exp(-t);%Perturb data
f=f.*weight;%Remove samples
K=2;%The number of exponentials is K+1.
nonnegative_margin=1e-3;
N_iterations=50;
rho=0.01;
[f_app,w,xi]=hadmm(f,t,K,rho,N_iterations,weight,nonnegative_margin);
plot(t,f);hold on;plot(t,f_app,'r');hold off;legend({'noisy distribution with gap','approximation'})
```

Exemple 13.1 Pour la densité exponentielle $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $\lambda = 1$, test_script découvre vite la réponse.

Exemple 13.2 Pour une densité hyperexponentielle $f(t) = w\lambda e^{-\lambda t} + w_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$, $\lambda = 1$, $\lambda_1 = 2$, $w = 1/4$, $w_1 = 3/4$, test_script trouve avec $K' = K + 1 = 1$ $f(t) = 1.7187e^{-1.7662t}$ (l'erreur L_2 étant 0002821). Pour $K \geq 2$

Nous allons faire des testes maintenant sur des densités qui sont plus problématiques.

Exemple 13.3 Consider the Erlang mixture $f(t) = ke^{-\lambda t}[(t-a)^2 + \epsilon^2] = ke^{-\lambda t}[t^2 - 2at + a^2 + \epsilon^2]$, where $k = \frac{\lambda^3}{1+\lambda^2\epsilon^2+(1-\lambda a)^2}$. The first three moments are

$$\left\{ \frac{(a^2 + \epsilon^2)\lambda^2 - 4a\lambda + 6}{\lambda((a^2 + \epsilon^2)\lambda^2 - 2a\lambda + 2)}, \frac{2\lambda((a^2 + \epsilon^2)\lambda - 6a) + 24}{\lambda^2((a^2 + \epsilon^2)\lambda^2 - 2a\lambda + 2)}, \frac{6((a^2 + \epsilon^2)\lambda^2 - 8a\lambda + 20)}{\lambda^3((a^2 + \epsilon^2)\lambda^2 - 2a\lambda + 2)} \right\}.$$

For example, $\epsilon = 0, \lambda = 1, a = 1$ yield the moments 3, 14, 78. This density is not phase-type, hence cannot be estimated by methods using phase-type representations, but is in \mathcal{ME}_2 . Le programme d'Andersson et al trouve une \mathcal{ME}_3

$9.0941e^{-1.3465t} - e^{-0.8340t}(4.0504 + 5.8715i)(\cos(0.2121t) + i\sin(0.2121t)) + (4.0504 - 5.8715i)(\cos(0.2121t) - i\sin(0.2121t))$

Exemple 13.4 Another challenge density is $f(t) = ke^{-\lambda t}(1 + \epsilon^2 + \cos(at))$, where $k^{-1} = \frac{\epsilon^2 + 1}{\lambda} + \frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2}$.

13.6 BUTools

Une initiation au BUTools et offerte par les fichiers test_utils_functions.m, test_ph_functions.m Les commandes les plus basiques sont :

- (a) $[\alpha, A] = \text{APHRepresentation}(\alpha_0, A_0)$: fournit une représentation APH (bidiagonale) (α, A) de la fonction représentée par (α_0, A_0) .
 - (b) $\text{MEDensity}(\alpha, A)$ donne la fonction $f(t) = \alpha e^{tA}(-A\mathbf{1})$ représentée par (α, A) . Cette fonction n'est pas incluse dans certaines versions, mais est facile à implémenter.
 - (c) $\text{MomentsFromME}(\alpha, A)$: Calcule les premiers k moments de $m_k = k! \alpha (-A)^{-k} \mathbf{1}$ d'un ME défini par une donnée vector-matrice.
 - (d) "MEFromMoments" : Calcule une représentation ME minimale basée sur 2n-1 moments. Résultat comparable avec une approximation de Padé et une transformation utilisant la matrice compagne du dénominateur
3. $\text{al0} = [\frac{15}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{1}{13}]$; $A_0 = \text{diag}([-1, -2, -3])$; $\text{MomentsFromME}(\text{al0}, A_0, 5)$ $[\text{al}, A] = \text{APHRepresentation}(\text{al0}, A_0)$; $\text{MomentsFromME}(\text{al}, A, 5)$
 4. Notre version de BUTools manque la commande MEDensity . Créez une fonction MED qui implémente la fonction pour matrices de dimension 3×3 :

```
function Dens = MED(al,A,t)
un=[1 1 1]
for i=1:length(t)
    Res(i)=al*expm(t(i)*A)*(-A)*un'
end
end
```

Testez la fonction avec

```
t= 0 : .5 : 5
plot(t, MED(al0,A0,t))
plot(t, MED(al,A,t))
```

5. Les commandes les plus importantes sont :
 - (a) $\text{CheckMEPositiveDensity}$: Vérifie si la donnée vector-matrice résulte en une densité positive
 - (b) APHFrom3Moments : Calcule la plus petite APH avec 3 moments donnés
6. $[\mathbf{i}, \mathbf{Q}] = \text{APHFrom3Moments}(3/4, 5/4, 27/8)$
 $\text{moms} = \text{MomentsFromME}(\mathbf{i}, \mathbf{Q}, 6)$
 (il s'agit des moments de $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x} = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] * \exp(x \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix})[1; 2]$; APHRepresentation trouve une représentation Coxienne avec les mêmes valeurs propres. Évidemment, la représentation matricielle n'est pas unique; comme preuve, les mêmes moments seront obtenus avec $\text{MomentsFromME}([\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], (\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, 6))$.

7. `[init, QQ] = APHFrom3Moments(1,2,6)`
`moms = MomentsFromME(init, QQ, 5)`
 (les moments de la loi $\text{expo}(1)$; ça ne semble pas marcher)
8. `[init, QQ] = APHFrom3Moments(1,6,24)`
`moms = MomentsFromME(init, QQ, 5)`
 (les moments de la loi $\text{Erl}(2,1)$)
9. `alpha=[5/6 -1/6 1/3] A=[-1 0 0; 0 -2 0; 0 0 -3]` `CheckMEPositiveDensity(alpha, A)` §
`[moms]=MomentsFromME(alpha, A, 3)` `[init, QQ] = APHFrom3Moments(moms)`
10. `alpha=[3/4 -7/4 2] A=[-1 0 0; 0 -2 0; 0 0 -3]` `CheckMEPositiveDensity(alpha, A)` `[moms]=MomentsFromME(alpha, A, 3)` `[init, QQ] = APHFrom3Moments(moms)`
11. Approximation ME de la loi $U[0,1]$, à partir des moments
`[init, QQ] = APHFrom3Moments(1/2,1/3, 1/4)`
`moms = MomentsFromME(init, QQ, 5)`
`CheckMEPositiveDensity(init, QQ)`

`[init, QQ] = MEFromMoments(1/2,1/3, 1/4,1/5,1/6)`
`moms = MomentsFromME(init, QQ, 5)`
`CheckMEPositiveDensity(init, QQ)`
12. Autres commandes sont :
 - (a) `CTMCSolve`
 - (b) `DTMCSolve`
 - (c) `SimilarityMatrix` (plutôt `SimilarityMatrix`)
 - (d) `PH3Canonical` : Calcule la représentation canonique d'ordre 3 à partir d'une représentation vectorielle d'ordre 3, si elle existe
 - (e) `MonocyclicRepresentation`
13. `q=[-0.9 0.5 0.4; 0.9 -0.9 0.0; 0.3 0.3 -0.6]` `vector=CTMCSolve(q)` `q=[0.1 0.5 0.4; 0.9 0.1 0.0; 0.3 -0.3 0.4]` `vector=DTMCSolve(q)`
14. Expliquer le fonctionnement du script


```
function r = CheckGenerator (Q)
prec = 10^-14;
if size(Q,1)~=size(Q,2)
    fprintf ('CheckGenerator: Generator is not a square matrix!');
    r = 0;
    return;
end
if any(diag(Q)>=0)
    fprintf ('CheckGenerator: The diagonal of the generator is not negative!');
    r = 0;
    return;
end
N = size(Q,1);
odQ = Q<0;
odQ(1:N+1:N^2) = 0;
if any(odQ)
    fprintf ('CheckGenerator: The generator has negative off-diagonal element!');
    r = 0;
    return;
end
if any(abs(sum(Q,2))>prec)
    fprintf ('CheckGenerator: The rowsum of the generator is not 0 (precision: %g);', prec);
    r = 0;
    return;
end
r = 1;
endfunction
```
15. Expliquer le fonctionnement du script `CTMCSolve.m`

§. Si `CheckMEPositiveDensity` se plaint de l'absence de `BUToolsVerbose`, il faudra ajouter `BUToolsVerbose=1` dans ce script, avant de l'appeler.

```

function vector = CTMCSolve (q)
if ~CheckGenerator(q)
    vector = 0;
    return;
else
    res=zeros(1,length(q));
    QQ=q;
    QQ(:,1)=ones(length(q),1);
    res(1)=1;
    vector=res/QQ;
end

```

Ajouter des commentaires qui expliquent le fonctionnement de chaque ligne. Expliquer le fonctionnement du script DTMCSolve.m

16. (*) Expliquer le fonctionnement du script

```

function [simmx] = SimilarityMatrix (A, B)
if size(A)>size(B)
    disp('The first input matrix must be smaller than the second one. Please change
    r=0;
    return;
end
ai=eye(size(B,1));
bi=eye(size(A,1));
res=vertcat(zeros((size(A,1)*size(B,1)),1),ones(size(A,1),1));
also = kron(ones(1,size(B,1)), bi);
felso = kron(ai,A)-kron(B',bi);
qq = vertcat(felso,also);
simmx = devec(qq\res, size(A,1));
end
% internal function:
function M = devec(v, rows)
    M = [];
    for i=1:length(v)/rows
        M = [M, v((i-1)*rows+1:i*rows)];
    end
end

```

17. (*) Expliquer le fonctionnement du script APHRepresentation.m

```

function [beta,B] = APHRepresentation (alpha, A)
lambda = -eig(A);
if max(abs(imag(lambda)))>0
    disp('Complex eigenvalue!')
    r=0;
    beta = 0;
    B=0;
    return;
end
lambda2 = sort(lambda);
maxelem = max(lambda2);
lambda3=lambda2(lambda2~=maxelem);
mx = diag(-lambda2)+diag(lambda3, 1);
simmx=SimilarityMatrix(A, mx);
beta=alpha*simmx;
B=mx;
end

```

18. (*) Expliquer le fonctionnement du script CheckMEPositiveDensity.m

19. (*) Expliquer le fonctionnement des scripts KroneckerProduct.m et KroneckerSum.m

13.7 Projets

Les projets seront notées à partir du travail en classe; la presence est une partie esentielle de la note.

1. Qu'est ce que fait le pg. Scilab suivant :

```

// marche(N,m) displays outcomes of the N-step random walk
function [traj] = marche(N,m)
// return the path S as a vector
    clf; // clear the entire figure
time=(0:1:N); p=0.5 *(1+m * sqrt(N)); traj=zeros(time) ;
traj=[0,cumsum(2*(rand(1,N)>p)-1)];
// vector will contain the trajectory X(0),X(1/N)...,X(1)
//for t=1:N
//traj(t+1)=traj(t) + ( 2*grand(1,1,"bin",1,p)-1 ) ;
//end ;
plot2d2(time/N,traj/sqrt(N)); // plot the path xtitle("Scaled Random
walk", "time (t)","X(t)")
endfunction

```

Executer les commandes :

```

N=10; m=.1;
time=(0:1:N);
p=0.5 *(1+m * sqrt(N)); traj=zeros(time) ;
traj=[0,cumsum(2*(rand(1,N)>p)-1)];
plot2d2(time/N,traj/sqrt(N)); // plot the path

```

```

N=10; m=.5;
time=(0:1:N);
p=0.5 *(1+m * sqrt(N)); traj=zeros(time) ;
traj=[0,cumsum(2*(rand(1,N)>p)-1)];
plot2d2(time/N,traj/sqrt(N)); // plot the path

```

```

N=100; m=.1;
time=(0:1:N);
p=0.5 *(1+m * sqrt(N)); traj=zeros(time) ;
traj=[0,cumsum(2*(rand(1,N)>p)-1)];
for t=1:N
traj(t+1)=traj(t) + ( 2*grand(1,1,"bin",1,p)-1 ) ;
end ;
plot2d2(time/N,traj/sqrt(N)); // plot the path

```

```

N=10000; m=1/N;
time=(0:1:N);
p=0.5 *(1+m * sqrt(N)); traj=zeros(time) ;
traj=[0,cumsum(2*(rand(1,N)>p)-1)];
for t=1:N
traj(t+1)=traj(t) + ( 2*grand(1,1,"bin",1,p)-1 ) ;
end ;
plot2d2(time/N,traj/sqrt(N));

```

2. **Ruine du joueur/marche arrêtée.** Pour une marche aléatoire symétrique ($p=q=1/2$), commencée en $X_0 = 0$ et arrêtée au temps $T = \min(T_0, T_B)$, simuler la probabilité de gagner' $p_B = P_1\{X_T = B\}$ pour $B = 5$, un nombre $N_r = 20$ de fois, en arrêtant chaque simulation après (ou avant) $n = 30$ pas. Refaites le calcul en utilisant un système linéaire. Comparez les deux résultats avec la valeur prévue par la théorie.
3. Simulez le mouvement Brownien dndimensionel, en modifiant le pg. suivant :

```

// marche2(T) displays outcomes of the N-step random walk
function [trajectory] = marche2(T) time=1:(T+1); p=0.5;
traj=zeros(2,T+1) ;
// vector will contain the trajectory X(0),...,X(T)
for t=1:T traj(:,t+1)=traj(:,t) + (2*grand(2,1,"bin",1,p)-1) ; end;
    clf;
    plot2d(traj(1,:),traj(2,:)) ;
xtitle("Two dim Random walk", "time (t)","X(t)") endfunction

```


4. a) Traduisez en Scilab le programme Matlab suivant, en ajoutant des commentaires qui expliquent comment il fonctionne, si besoin.

```
function p = ReturnProbability(epsilon,n)
pE = 1/4 + epsilon; pW=1/4 - epsilon; pN = 1/4; pS = 1/4;
m = 2*n+1;
//Pb. avec N=m^2 -1 inconnues p_B(x),
//les proba de visiter B a partir de x
ctr =sub2ind([m,m],n+1,n+1);% sub2ind(size, i,j) donne l'indice de (i,j) en vec(A)
% c.-à-d. m (i-1) + j
AEW = spdiags(ones(m,1)*[pW pE],[-1 1],m,m);
ANS = spdiags(ones(m,1)*[pS pN],[-1 1],m,m);
//spdiags(cols, diags,size) donne la matrice avec cols positionnes comme diagonale
//avec indices donnés par diags;
A =kron(AEW,speye(m)) + kron(speye(m),ANS);
//A est la matrice de Poisson pour la marche simple dudimensionelle
r = A(:,ctr); A(:,ctr)= 0; q = (speye(m^2)-A)\r;
p = q(ctr);
return
```

- b) Calculer la probabilité de retour $p(\epsilon, n)$ en 0 pour une marche biaisé deux-dimensionelle sur \mathbb{Z}^2 , absorbée sur les bords du carré $[-n, n]^2$, avec $p_N = p_S = 1/4$, et $p_E, p_W = 1/4 \pm \epsilon$.

5. **Bonheur du joueur pour une marche réfléchie en 0.** Considérez une marche aléatoire symétrique ($p=q=1/2$), commencée en $X_0 = 0$, réfléchie en 0 et arrêtée au temps $T_B, B \in \mathbb{N}$
a) Ecrivez une fonction qui, pour un nb. entier j donné, sort la position finale X_n d'une marche commencée en $X_0 = 0$, réfléchie en 0 et qui avance/recule en fonction de chiffres binaires de j : 1 avance, 0 recule.

```
function [d] =dist(sce)
d=0;
while sce~=0
if modulo(sce,2)==1 then d=d+1
else if d > 0 then d=d-1
end
end
end
sce=(sce-modulo(sce,2))/2
end
endfunction
```

- b) simuler le nombre des pas $T_B = B + K_B$ jusqu'au bonheur pour $B = 1$, un nombre $N_s = 100$ de fois, en arrêtant chaque simulation après (ou avant) $n = 21$ pas. Comptez les simulations qui y arrivent après $K_B = k$ pas, où $k = 0, 1, \dots, 20$. Estimez $P_B(k) = \mathbf{P}_0[K_B \leq k, k = 0, \dots, 20]$ et $k_B = E_0 K_B$. c) Nous allons recalculer maintenant ces quantités **exactement**, pour $B = 1, 2$. Ecrivez une fonction qui, pour une cible B et "horizon" k donné, compte le nombre $n_B(k)$ de toutes les marches réfléchies en 0 qui n'arrivent pas à la cible B en moins de $B + k$ pas, $k = 0, 1, \dots, 8$, c.-à-d. qui réalisent l'événement $K_B \geq k + 1$. Est ce qu'il y a des formule exactes pour $P_B(k), k_B$? **Ind** : Verifiez pour $n_B(k)$ sur le site <http://oeis.org>. En suite,

$$k_B = \sum_{j=1}^{\infty} P_B(j) = \sum_{k=0}^{\infty} P_B(k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_B(k)}{2^{B+k+1}}$$

```
function [b]=compte(B,k) //compte le nombre de chemins qui passe par
//le bonheur (B) en un nombre de pas infèrieur ou égal
//à B+k.
b=0;
for(sce=0:(2^(B+k)-1))
j=0
d=0;
while ((sce~=0)&(d<B)&(j<(B+k))) //continue si la cible n'est pas atteinte
j=j+1;
if modulo(sce,2)==1 then d=d+1 //dernier chiffre=1, on monte
else if d>0 then d=d-1 //dernier chiffre=0, on descend
end
end
```

```

sce=(sce-modulo(sce,2))/2 //on efface le dernier chiffre
end
if d==B then b=b+1 //si arret par bonheur, b=1
end
end
endfunction

```

6. Considérez les marches simples cycliques bougeant à droite/gauche avec probas $p, q > 0, p + q = 1$ sur un polygone (régulier) avec n sommets. Expliquez pourquoi pour $n = 4$ ou 6 , la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ n'existe pas. Est-ce qu'il y a une limite dans le cas des marches simples cycliques avec n prime? Le cas échéant, trouvez cette limite (au moins pour la marche symétrique avec $p = q = 1/2$). Que se passe-t-il si $p + q < 1$, et la marche peut rester sur place avec proba $1 - p - q$?
7. Le comportement transient et asymptotique d'une marche cyclique, et les puissances des matrices circulantes. Considérez la matrice A
 $A = \text{matrix}(3, 3, [[1-b-c, b, c], [c, 1-c-b, b], [b, c, 1-c-b]])$
 Calculez A^2, A^n and $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$.
8. *Bonheur dans le rectangle* (problème de Folkmar Bornemann, Dirk Laurie, Stan Wagon, Jorg Waldvogel : The SIAM 100-Digit Challenge, A Study in High-Accuracy Numerical Computing). Considérez une marche aléatoire symétrique simple sur $X(t) = (X_1(t), X_2(t)) \in h\mathbb{R}^2$, ($p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 1/4$) commencée en $X(0) = (0, 0)$ et arrêtée au temps $T = \min(T_1, T_B)$, où

$$T_B = \{\inf n : |X_1(n)| > B\}$$

$$T_0 = \{\inf n : |X_2(n)| = 1\}$$

c.-à-d. l'espace des états est le rectangle $E = \{|x_1| \leq B, |x_2| \leq 1\}$. Supposons $h = 1/n, n \in \mathbb{N}$ (quand $B/h \notin \mathbb{N}$, T_B est défini comme le temps quand la marche essaie de dépasser les côtés courts (verticales). Soit $p_{B,h}(x) = P_x[T_B < T_0], p_B = \lim_{h \rightarrow 0} p_{B,h}(0, 0)[T_B < T_0]$, c.-à-d. la probabilité de sortir par les côtés verticales pour le mouvement Brownien, à partir du centre.

- (a) Approximer $p_{B,h}$ par la méthode de simulation Monte-Carlo, en utilisant un sous-programme qui simule une marche simple (sur les voisins) et qui teste appartenance aux états d'arrêt (si intéressés en graphiques, écrivez aussi un programme qui trace tous les points de l'espace des états, en utilisant une couleur différente pour les états d'arrêt).
 Qu'est-ce que vous obtenez pour $B = 1, B = \sqrt{3}$, et $B_k = (k + 1/k)$, pour $k = 4, 5, 6, \dots$?
- (b) Formuler un système linéaire qui donne l'inconnue $p_{B,h}$ et résolvez le système.
- (c) Essayer de trouver le comportement asymptotique de p_{B_k} quand $k \rightarrow \infty$.
- (d) Est-ce qu'il existe des coefficients a, b tq $\lim_{B \rightarrow \infty} \frac{p_B}{aB^b} = 1 \Leftrightarrow \log(p_B) \sim b \log(B) + \log(a)$?
9. Q : SuperBonus : Ajouter maintenant un rectangle de dimensions $1, B$ dessus le premier, centré. Approximer p_B par la méthode de Monte Carlo et par la méthode d'approximation itérative des fonctions harmoniques. Qu'est-ce que vous obtenez pour $B = 1, B = \sqrt{3}$, et $B = (n + 1/n)$, pour $n = 4, 5, 6, \dots$? Quelle des trois méthodes ci-dessus est la plus facile à implémenter pour un domaine deux-dimensionnel arbitraire, et quelle méthode est plus exacte?

Conclusions :

- (a) La simulation Monte Carlo produit des résultats décentes. Mais, évidemment, elle ne peut pas obtenir des résultats précis pour le pb. limite, car elle ne profite pas des deux traits particuliers cruciaux : a) qu'il s'agit de résoudre l'équation de Dirichlet $\Delta f(x) = 0$ avec conditions frontière 0 et 1, b) et que le domaine est un rectangle. Ces traits particuliers ramène ici à une solution explicite à partir du centre, implémentable dans une ligne symbolique! $b = 1; N[2 \text{ArcSin}[\text{Sqrt}[\text{ModularLambda}[bI]]]/(\text{Pi}), 40]$. La réponse pour $b = \sqrt{3}$ et $1/6$!
- (b) Mais, obtenir cette solution exacte dans un cas particulier a demandé beaucoup de travail! La solution la plus raisonnable est de revenir au pb. discret, et profiter que le pb. se réduit alors à un système linéaire. Un prg. Matlab est offert dans le livre, mais seulement pour les rectangles! Il exploite le fait que la matrice du système linéaire en deux dimensions se décompose comme une somme Kronecker des matrices des marches unidimensionnelles correspondant au deux coordonnées (qui sont indépendantes).

- (c) Finalement, pour un domaine deux-dimensionnel arbitraire, la simulation Monte Carlo et la méthode d'approximation itérative semblent assez raisonnables.

13.8 Initiation Matlab et Chebfun

MATLAB Spline command:
`>>x = 0:10; y = sin(x); xx = 0:.25:10; yy = spline(x,y,xx);`
`>>plot(x,y,'o',xx,yy)`
 This generates a spline for the sine curve, then samples it over a finer mesh.

The two vectors
`>>t = 1900:10:1990;`
`>>p = [75.995 91.972 105.711 123.203 131.669`
`150.697 179.323 203.212 226.505 249.633];`
 represent the census years from 1900 to 1990 and the corresponding United States population in millions of people. The expression
`>>spline(t,p,2000)`
 uses the cubic spline to extrapolate and predict the population in the year 2000.
 Algorithms A tridiagonal linear system (with, possibly, several right sides) is being solved for the information needed to describe the coefficients of the various cubic polynomials which make up the interpolating spline. spline uses the functions ppval, mkpp, and unmkpp. These routines form a small suite of functions for working with piecewise polynomials. For access to more advanced features, see the interp1 reference page.

Chebfun aide : help chebfun/norm Guide,1.4 PIECEWISE SMOOTH CHEBFUNS

in the default "splitting off" mode a function with a jump in its derivative produces a warning message,
`>>f = chebfun('abs(x-.3)');`
 We can see the structure with "struct", Matlab's command for seeing the various fields within an object:
`>>struct(f)`
 The output shows that f consists of two funs with breakpoints at -1, 1, and a number very close to 0.3. The "imps" field refers to "impulses", which relate to values at breakpoints, including possible information related to delta functions, discussed in Section 2.4. The "trans" field is 0 for a column chebfun and 1 for a row chebfun (Section 1.6 and Chapter 6). The "jacobian" and "ID" fields are used for automatic differentiation. Here is an example where breakpoints are introduced by the "max" command, leading to a chebfun with 13 pieces:
`f = chebfun('sin(20*x)');`
`g = chebfun('exp(x-1)');`
`h = max(f,g);`
`plot(h)`
`struct(h)`
`mean(h)`
`std(h)`

Guide,1.5. INFINITE INTERVALS AND INFINITE FUNCTION VALUES

Here's the integral of a function on [1,inf]:
`sum(chebfun('1./x.^4',[1 inf]))`
`ans = 0.333333333326922`
 Notice that several digits of accuracy have been lost here. Be careful! -- operations involving infinities in Chebfun are not always as accurate and robust as their finite counterparts.

Here is an example of a function that diverges to infinity, which we can capture by including the flag 'blowup 2' (try help blowup for details):

```
h = chebfun('(1/pi)./sqrt(1-x.^2)', 'blowup', 2); plot(h)
In this case the integral comes out just right:
sum(h)
```

GUIDE 4 : CHEBFUN AND APPROXIMATION THEORY

By Chebyshev points we shall mean as usual the set of points in $[-1,1]$ defined by

$$x(j) = -\cos(j \pi/N), \quad 0 \leq j \leq N,$$

where N is an integer ≥ 1 . (If $N=0$, we take $x(0)=0$.) Through any data values $f(j)$ at these points there is a unique polynomial interpolant $p(x)$ of degree $\leq N$, which we call the Chebyshev interpolant. In particular, if the data are $f(j) = (-1)^{n-j}$, then $p(x)$ is T_N , the N th Chebyshev polynomial, which can also be defined by the formula $T_N(x) = \cos(N \arccos(x))$. In Chebfun, the command "chebpoly(N)" returns a chebfun corresponding to T_N , and "poly" returns coefficients in the monomial basis $1, x, x^2, \dots$. Thus we can print the coefficients of the first few Chebyshev polynomials like this:

```
for N = 0:8
    disp(poly(chebpoly(N)))
end
subplot(2,2,1), plot(chebpoly(2))
subplot(2,2,2), plot(chebpoly(3))
subplot(2,2,3), plot(chebpoly(15))
subplot(2,2,4), plot(chebpoly(50))
```

ftp ://129.67.151.32/pub/Documents/techreports/NA-08-07.pdf

```
>> nodes = 0:8;
>> vals = sin(nodes);
>> f = chebfun(@(x) spline(nodes,vals,x), [0 8]);
>> struct(h)
>> f.ends
```

```
>> f = chebfun(@(x) sqrt(x), [0 1]);
>> length(f)
>> f.ends
```

```
>>for j = 1:10
>>x0 = rand;
>>f = chebfun(@(x) exp(x)+cos(7*x)+0.1*sign(x-x0));
>>fends = f.ends;
>>disp([x0 fends(2)x0-fends(2)])
>>end
```

```

>>f = chebfun(@(x) cos(exp(2*x)),[0 1]);
>>h = 0.1; ends = 0:h:1;
>>midpts = h/2:h:1;
>>fh = chebfun(num2cell(f(midpts)),ends);
>>plot(f),hold on, plot(fh)
>> sum(f)
>> sum(fh)
>> norm(f-fh,inf)

step = chebfun(0.5); B = step; for n = 1:4
  B = conv(B,step);
  subplot(2,2,n)
  plot(B), hold on, plot(B.ends,B(B.ends),'.')
end

>> x = chebfun(@(x) x,[-n-1 n+1]);
>> sigma = sqrt(4/3);
>> gaussian = exp(-(x/sigma).^2/2)/(sigma*sqrt(2*pi));
>> norm(B-gaussian,inf)

>>f = chebfun('-exp(x)', '2*abs(x-0.5)',-1:1);
>>fn = chebfun(@(x)f(x),40);
>>plot(f), hold on, plot(fn,'.-')

>>runge = @(x) 1./(1+25*x.^2);
>>exact = chebfun(runge); errp = [];
>>errq= []; nn = 2:2:200;
>>for n = nn
  p = chebfun(runge,n);
  errp = [errp;
  norm(p-exact,inf)];
  q = chebfun(runge,runge,[-1 0 1],[n/2 n/2]);
  errq = [errq;
  norm(q-exact,inf)];
>>end
>>semilogy(nn,errp,'.-'), hold on,
>>semilogy(nn,errq,'.-') hold on,
>>grid on semilogy(nn,errq,'.-r','linewidth',.9,'markersize',8)

>> fx = @(x) chebfun(@(y) sin(6*x)+sin(5*y)+sin(8*x+3*y));
>> g = chebfun(@(x) min(fx(x)));
>> [minval,xmin] = min(g)
minval = -2.937379284008478 xmin = 0.740775338910084
>> [minval2,ymin] = min(fx(xmin))
minval2 = -2.937379284008477 ymin = 0.338025338316668

>>s = chebfun(@(s) s,[0 1]);
>>c = [-2+.05i -.2+.05i -.2-.05i -2-.05i];
>>z = [c(1)+s*(c(2)-c(1)) c(2)*c(3).^s./c(2).^s
>>c(3)+s*(c(4)-c(3)) c(4)*c(1).^s./c(4).^s]
>>plot(z)
>> f = log(z).*tanh(z);
>> I = sum(f.*diff(z))
I = 0.0000000000000007 + 5.674755637702221i

```